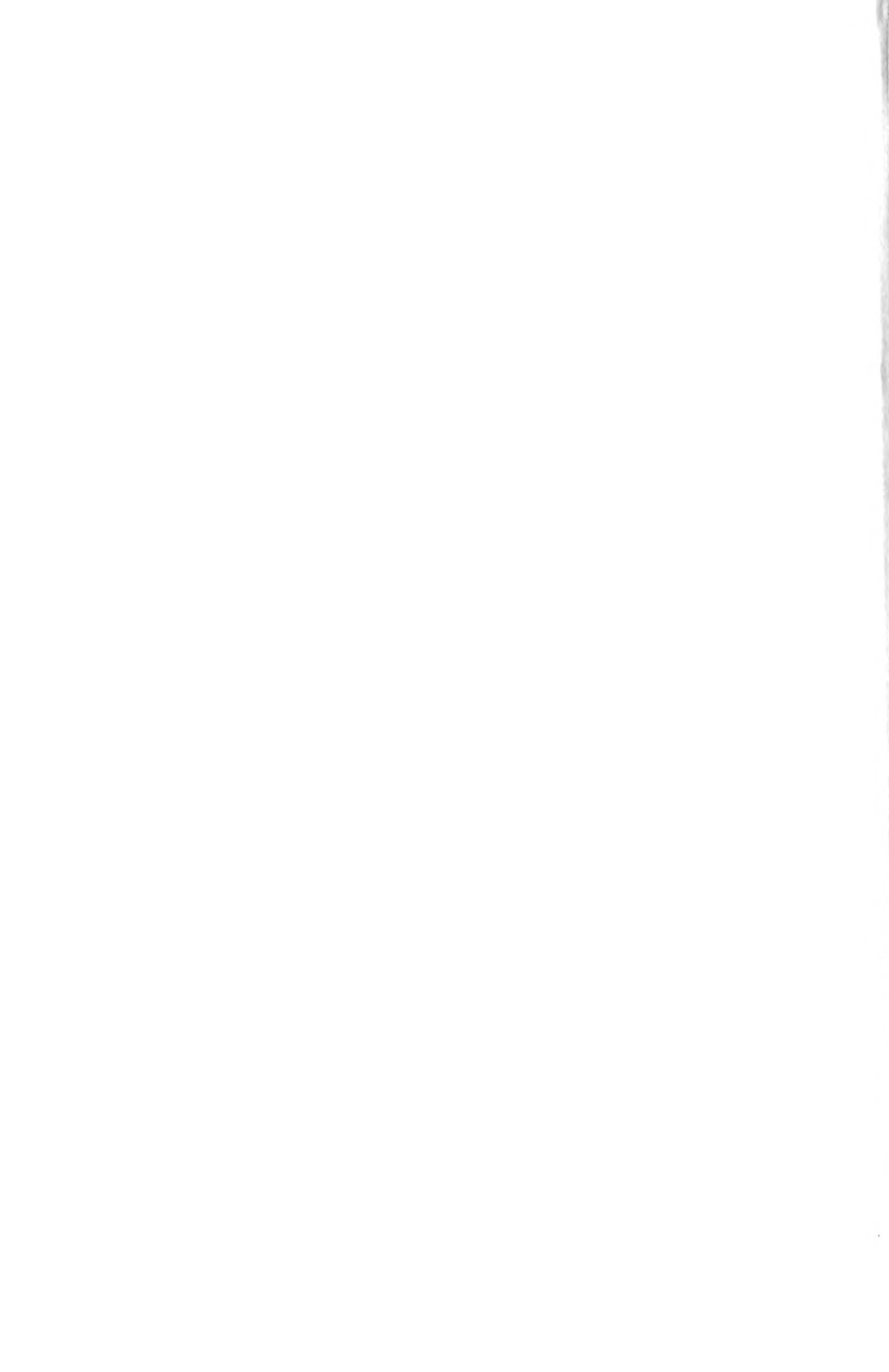


UNIVERSITY OF TORONTO



3 1761 01214242 8









THEORIE  
DER  
ABEL'SCHEN FUNCTIONEN

VON  
**DR. HERMANN STAHL,**  
PROFESSOR DER MATHEMATIK IN TÜBINGEN.

-----

MIT FIGUREN IM TEXT.



LEIPZIG,  
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.  
1896.

1075-00 -  
23 / 11

ALLE RECHTE,  
EINSCHLIESSLICH DES ÜBERSETZUNGSRECHTS, VORBEHALTEN.

Q F

345

C 13

## Vorwort.

---

Der grossartige Entwurf, den Riemann<sup>1)</sup> im Jahre 1857 von der Theorie der Abel'schen Functionen gegeben hat<sup>2)</sup>, ist seitdem ununterbrochen weiter ausgebaut worden. Nächst den grösseren, allgemein bekannten Werken über die Abel'schen Functionen von C. Neumann<sup>3)</sup>, Clebsch und Gordan<sup>4)</sup>, Briot<sup>5)</sup>, die in engerem oder weiterem Anschluss an Riemann das Verständniss von dessen Theorie vermitteln, waren es besonders die Untersuchungen der Herren F. Prym<sup>6)</sup> über die hyperelliptischen Functionen und H. Weber<sup>7)</sup> über die Abel'schen Functionen vom Geschlecht  $p = 3$ , die auf die weiteren Ausführungen der Riemann'schen Theorie anregend und fördernd gewirkt haben.

Es fehlt indess augenblicklich an einem Lehrbuch, das nicht nur eine Uebersicht über die von Riemann selber geschaffene Theorie, sondern auch über die seither hinzugekommenen Ausführungen der-

---

1) B. Riemann, Ges. Werke, hrsggb. von H. Weber, Leipzig. 1. A. 1876. 2. A. 1892. S. 81–135.

2) Kurz vor Riemann's Veröffentlichung fallen die ersten Mittheilungen von Herrn Weierstrass über seine Theorie der hyperelliptischen Functionen. Herr W. hat seitdem seine Methoden auf die Abel'schen Functionen und schliesslich auf die allgemeinsten  $2p$ -fach periodischen Functionen von  $p$  Variabeln ausgedehnt. Der dritte Band der ges. Werke soll die Untersuchungen bringen. Das vorliegende Werk hat es nur mit den Methoden von Riemann zu thun.

3) C. Neumann, Vorl. üb. Riemann's Theorie der Abel'schen Integrale, Leipzig. 1. A. 1865. 2. A. 1884.

4) Clebsch u. Gordan, Theorie der Abel'schen Functionen. Leipzig 1866. (Citirt: Ab. F.)

5) Briot, Théorie des fonctions Abéliennes. Paris 1879.

6) F. Prym, Neue Theorie der ultraelliptischen Functionen, Wiener Denkschriften. Bd. 24. 1864. 2. A. Berlin 1885. Zum Theil schon als Dissertation Berlin 1863. Prym, Zur Theorie der Functionen in einer zweiblättr. Fläche. Zürich 1866. Bez. der Untersuchungen über Thetafunctionen s. S. 282.

7) H. Weber, Theorie der Abel'schen Functionen vom Geschlecht 3. Berlin 1876. (Citirt: Ab. F.  $p = 3$ .)

selben gibt. Das vorliegende, aus Vorlesungen erwachsene Werk soll versuchen, hier einzutreten. Die Darstellung schliesst sich im Grossen und Ganzen eng an die Riemann'sche Abhandlung an und zerfällt wie diese in zwei Theile, von denen der erste die algebraischen Functionen und Abel'schen Integrale, der zweite das Jacobi'sche Umkehrproblem zum Gegenstand hat. Indess bin ich von der Riemann'schen Behandlung besonders in zwei Punkten abgewichen, worüber ich kurz Rechenschaft geben muss.

Der erste Punkt betrifft die Behandlung der algebraischen Functionen. Diese ist von Riemann selber in rein algebraischer Form nur bis zu einem gewissen Grade und unter beschränkenden Voraussetzungen durchgeführt, dann aber, der grösseren Allgemeinheit halber, durch functionentheoretische Betrachtungen auf Grund des Dirichlet'schen Principes ergänzt worden. In ihrer ganzen Allgemeinheit ist die Theorie der algebraischen Functionen noch heute Gegenstand ausgedehnter Untersuchungen; sie hat sich mehr und mehr zu einer besonderen Disciplin entwickelt, die noch keineswegs abgeschlossen ist<sup>1)</sup>. Zunächst aber bedurften die von Riemann mit transcendentalen Mitteln gewonnenen Sätze einer rein algebraischen Beweisführung. Eine solche wurde im Anschluss an Clebsch und Gordan zuerst von den Herren Brill und Nöther in einer wichtigen Arbeit (Mathem. Ann. Bd. 7. 1873) gegeben unter der Voraussetzung, dass die zu Grunde liegende, algebraische Gleichung von singulären Punkten nur mehrfache Punkte mit getrennten Tangenten besitze, auf welchen Fall sich die allgemeinste, algebraische Gleichung durch eindeutige Transformation zurückführen lässt. An diese algebraisch-geometrische Theorie von Brill und Nöther schliesst sich unsere Darstellung (Abschn. II § 7—11) an mit der weiteren Beschränkung, dass von singulären Punkten nur Doppelpunkte vorkommen, auf welche sich wiederum die mehrfachen Punkte mit getrennten Tangenten durch eindeutige Transformation zurückführen lassen. Doch sind die Entwicklungen unter Voraussetzung von Doppelpunkten so gegeben, dass eine Ausdehnung auf den allgemeineren Fall der mehrfachen Punkte den Gedankengang im Wesentlichen ungeändert lässt. Es schien aus didactischen Gründen zweckmässig, den algebraischen Theil der Theorie

1) Vgl. Brill u. Nöther, die Entwicklung der Theorie der algebraischen Functionen. Sonderabdruck aus dem Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung. Berlin 1894. In diesem Bericht ist u. A. besonders auch auf die algebraische Theorie von Herrn Weierstrass (Vorlesungen von 1869 an) eingegangen, während die mehr arithmetischen Untersuchungen von Kronecker und Dedekind-Weber von dem Bericht ausgeschlossen waren.

nicht zu weit auszudehnen, sondern mehr nur die leitenden Gedanken hervortreten zu lassen.

Der zweite Punkt betrifft die Einführung der Thetafunction. Diese geschieht bei Riemann rein historisch und ohne Vermittelung mit dem Umkehrproblem, zu dessen Lösung sie doch dienen soll. Ein erster Weg, vom Umkehrproblem ausgehend, zur Thetafunction zu gelangen, ist von Herrn Weierstrass und im Anschluss daran von Clebsch und Gordan eingeschlagen worden. Man gewinnt hier die Thetafunction, indem man eine Formel aus der Theorie der elliptischen Functionen, welche das Integral 3. Gattung durch den Logarithmus der Thetafunction darstellt, für den Fall der Abel'schen Functionen und für  $p$  Variable erweitert. Indess führt diese Herleitung nur durch eine längere, nicht leicht zu übersehende Rechnung zur Thetafunction und ihren Eigenschaften und die mannigfachen Darstellungen der algebraischen Functionen und Abel'schen Integrale durch die Thetafunction lassen sich, da sie entsprechend ebenfalls rechnerisch durchzuführen sind, nur schwer im voraus übersehen. Ein zweites Verfahren, vom Umkehrproblem zur Thetafunction zu gelangen, ist von Herrn Hermite für die elliptischen Functionen angegeben und von Herrn Weber auf die Abel'schen Functionen ausgedehnt worden. Dasselbe geht von der Bemerkung aus, dass die darzustellenden Umkehrfunktionen  $2p$ -fach periodische Functionen von  $p$  Variablen sind, und zeigt, dass solche Functionen sich durch Quotienten von  $p$ -fach unendlichen Reihen in den  $p$  Variablen darstellen lassen. Diese Reihen sind die Thetafunctionen. Die Riemann'sche Theorie, die sich an diese Herleitung der Thetafunctionen unmittelbar und natürlich anschliesst, bietet nunmehr den grossen Vortheil, dass man alle möglichen Darstellungen von algebraischen Functionen und Abel'schen Integralen durch die Thetafunction von vornherein übersieht und beherrscht und dass man dadurch einen tieferen Einblick in die innere Natur der Probleme und ihre Lösung gewinnt. Aus diesen Gründen habe ich die zweite Herleitung der Thetafunction vorgezogen (§ 25).

Im Uebrigen war ich bestrebt, die Entwicklungen möglichst in Riemann's Sinn zu geben und aus der neueren Litteratur das auszuwählen, was sich enger an die Riemann'sche Theorie anschliesst. Bei der Lösung des Umkehrproblems habe ich frühere, eigene Arbeiten benutzt, welche mir einerseits zur Einführung in die allgemeine Theorie am geeignetsten schienen (Abschnitt VI) und andererseits die allgemeinsten Bildungen enthalten dürften (Abschnitt VII). Die vor Allem wichtigen invarianten Darstellungen lassen sich für allgemeines  $p$  noch

nicht durchführen. Die neueren Untersuchungen in dieser Richtung beschäftigen sich noch mit den Fällen  $p = 3$  und  $p = 4$ .

Auf specielle Fälle ist nicht eingegangen, weil solche in den erwähnten Arbeiten der Herren Prym, Neumann, Weber und Thomae<sup>1)</sup> eingehend in Riemann'schem Sinne behandelt sind. Dagegen habe ich in der Einleitung zum ersten und zweiten Theil die wichtigsten Sätze und Formeln aus der Theorie der elliptischen Functionen vorausgeschickt und auf ihre Analogie mit den Sätzen und Formeln in der Theorie der Abel'schen Functionen hingewiesen. Von Litteratur ist nur das angeführt, was in näherer Beziehung zum Texte steht. Es wird dies umsonst genügen, als die Grundgedanken doch sämmtlich auf Riemann zurückgehen. Zur Ergänzung der Litteraturangaben kann, wenigstens für einen Theil des behandelten Stoffes, der bereits erwähnte Bericht von Brill und Nöther dienen. An manchen Stellen, wie z. B. bei der Besprechung des Zusammenhanges einer Fläche (§ 2) und bei der Formulirung des Jacobi'schen Umkehrproblems (§ 25) habe ich mich mit der historischen Anführung von Erklärungen und Sätzen begnügt, um längere Einschaltungen, welche die Uebersicht über die Haupttheile erschweren konnten, zu vermeiden.

Ich bin meinem Freunde, Herrn F. Prym, zu besonderem Danke verpflichtet für die Bereitwilligkeit, mit der er mir die Einsicht in zwei Vorlesungen von Riemann gestattet hat. Die erste Vorlesung (Sommer 1861, angezeigt unter dem Titel: Ueber Functionen einer veränderlichen, complexen Grösse, insbesondere elliptische und Abel'sche, 4 St. wöch.) behandelt den ersten Theil der Riemann'schen Theorie (Ges. W. S. 81—120) und gibt wesentlich Ausführungen derselben. Von besonderem Interesse in ihr ist ein Abriss der Theorie der elliptischen Functionen nach Riemann's Methoden. Die zweite Vorlesung (Winter 1861/62, angezeigt als Fortsetzung der ersten, 3 St. wöch.) enthält in ihrer ersten Hälfte den zweiten Theil der Riemann'schen Theorie (Ges. W. S. 120—135), in ihrer zweiten Hälfte nach einigen weiteren, allgemeinen Sätzen eine Reihe von Ausführungen für den Fall  $p = 3$ . Die erste Vorlesung und die erste Hälfte der zweiten Vorlesung sind von Herrn Prym ausgearbeitet und, autographirt, in engerem Kreise verbreitet. Die zweite Hälfte der zweiten Vorlesung ist nur in einer Nachschrift von Herrn Prym und der Abschrift eines Theiles derselben von G. Roch vorhanden und aus dieser zum grösseren Theil in Riemann's Ges. W. (S. 456—472) aufgenommen. Man darf wohl dem Wunsche

1) Thomae, Ueber eine specielle Klasse Abel'scher Functionen. Halle 1877; und: Ueber eine specielle Klasse Abel'scher Functionen vom Geschlecht 3. Halle 1879.

Ausdruck geben, dass die noch unbenutzten Theile jener Vorlesung bei einer erneuten Auflage von Riemann's Werken Verwendung finden möchten. Ich hebe aus ihnen folgende, in der Zwischenzeit von anderen Autoren gefundenen und veröffentlichten Formeln hervor. Erstens die in § 31 mitgetheilte Formel (21); zweitens eine Gleichung für  $p = 3$ , die übereinstimmt mit der Gleichung, die Herr Weber (Ab. F.  $p = 3$ . S. 107. Gl. (11)) aufgestellt hat und die für allgemeines  $p$  in unsrer Darstellung in der ersten Gleichung (26) § 33 enthalten ist; drittens eine Formel für  $p = 3$  (ohne Beweis), die sich mit der von Herrn Frobenius (Journ. für Math. Bd. 98. S. 260. 1884) gegebenen Formel (7) deckt und die zu den in unserer Darstellung S. 279 erwähnten Formeln ( $P$ ) gehört.

Zum Schluss ist es mir ein Bedürfniss, meinen Freunden und Collegen, die mich bei der Arbeit unterstützt haben, auch an dieser Stelle meinen wärmsten Dank auszusprechen, Herrn A. Brill für die Hilfe, die er mir bei Bearbeitung der Abschnitte II und IV durch Rath und That so eingehend gewährt hat, und Herrn O. Hölder für eine Reihe sehr werthvoller Bemerkungen allgemeiner Art.

Tübingen, Juli 1896.

H. Stahl.

### Druckfehler.

- S. 142, Z. 7 v. u. in (8a) zu lesen:  $N_i$  und  $M_i$  statt  $N_i$  und  $M_i$ .  
S. 190, Z. 17 v. o. zu lesen: in (30) und (31) § 33 statt in (12) § 31 und  
(29) § 33.  
S. 281, Z. 5 v. o. zu lesen: (20—26) statt (2—26).  
S. 281, Z. 21 v. o. zu lesen: so dass die statt so dass.



# Inhalt.

## I. Theil. Die rationalen Functionen und Abel'schen Integrale.

	Seite
Einleitung . . . . .	1
Erster Abschnitt. Die algebraische Grundgleichung $F(x, y) = 0$ . . . . .	7
§ 1. Die $n$ Zweigfunctionen . . . . .	7
§ 2. Die Riemann'sche Verzweigungsfläche . . . . .	16
§ 3. Normalform der Verzweigungsfläche . . . . .	31
§ 4. Analytische Untersuchung von $F(x, y) = 0$ . . . . .	38
§ 5. Zahl und Lage der kritischen Punkte . . . . .	45
§ 6. Die in der Verzweigungsfläche eindeutigen und regulären Functionen . . . . .	52
Zweiter Abschnitt. Die rationalen Functionen von $(x, y)$ . . . . .	60
§ 7. Die Nullpunkte der ganzen, rationalen Function . . . . .	61
§ 8. Kriterien für eine ganze, rationale Function . . . . .	67
§ 9. Die adjungirten Functionen . . . . .	71
§ 10. Die allgemeinen, rationalen Functionen . . . . .	75
§ 11. Der Riemann-Roch'sche Satz . . . . .	81
§ 12. Bildung der rationalen Function aus gegebenen Elementen . . . . .	85
§ 13. Bedingungsgleichungen zwischen den Elementen einer rationalen Function . . . . .	92
Dritter Abschnitt. Die Abel'schen Integrale. . . . .	102
§ 14. Das allgemeine Abel'sche Integral . . . . .	102
§ 15. Die $p$ Integrale erster Gattung . . . . .	110
§ 16. Das Integral zweiter und dritter Gattung . . . . .	124
§ 17. Zerlegung des allgemeinen Integrals . . . . .	130
§ 18. Beziehungen zwischen zwei Abel'schen Integralen . . . . .	136
§ 19. Das Abel'sche Theorem . . . . .	143
§ 20. Das Abel'sche Theorem für Integrale erster Gattung und seine Umkehrung . . . . .	149
Vierter Abschnitt. Die eindeutigen Transformationen . . . . .	157
§ 21. Die eindeutige Transformation. Hilfssätze. . . . .	159
§ 22. Die invariante Zahl $p$ und die Klassenmoduln . . . . .	163
§ 23. Die invarianten Formen der Grundgleichung, der rationalen Functionen und der Abel'schen Integrale . . . . .	171
§ 24. Allgemeine Form der Grundgleichung und der Abel'schen Integrale . . . . .	178

<b>II. Theil. Das Jacobi'sche Umkehrproblem.</b>		Seite
Einleitung . . . . .		187
Fünfter Abschnitt. Die Thetafunction und ihre Nullpunkte .		193
§ 25. Formulirung des Umkehrproblems. Herleitung der Thetafunction		193
§ 26. Die Thetafunction erster Ordnung. . . . .		204
§ 27. Die Nullpunkte der Function $\vartheta(u - e)$ . . . . .		217
§ 28. Identisches Verschwinden der Thetafunction. Eindeutigkeit des Umkehrproblems . . . . .		224
Sechster Abschnitt. Die Lösung des Umkehrproblems. . . . .		235
§ 29. Die Nullpunkte der Function $\vartheta_u(u - e)$ . Die Berührungscurven $\psi_u = 0$ . . . . .		235
§ 30. Thetaquotienten und Wurzelfunctionen . . . . .		241
§ 31. Lösung des Umkehrproblems . . . . .		248
§ 32. Bestimmung der Berührungsfunktionen $\psi_u$ . Zuordnung zu den Thetacharakteristiken $\mu$ . . . . .		257
§ 33. Die Normalintegrale 1. Gattung und die Thetamoduln . . . . .		270
Siebenter Abschnitt. Allgemeine Darstellungen durch Thetafunctionen. . . . .		283
§ 34. Darstellung allgemeiner Thetaquotienten mit speciellen Argumenten . . . . .		283
§ 35. Darstellung allgemeiner Thetaquotienten mit allgemeinen Argumenten . . . . .		290
§ 36. Specielle Darstellungen. Eigenschaften der Abel'schen Functionen		297
§ 37. Beziehungen zwischen Thetafunctionen und Abel'schen Integralen		309
Achter Abschnitt. Die lineare Transformation der Thetafunction . . . . .		320
§ 38. Transformation der Perioden . . . . .		321
§ 39. Transformation der Periodencharakteristiken . . . . .		329
§ 40. Die lineare Transformation der Thetafunctionen . . . . .		340
§ 41. Transformation der Thetacharakteristiken . . . . .		347

# Erster Theil.

## Die rationalen Functionen und Abel'schen Integrale.

### Einleitung.

Die Theorie der Abel'schen Functionen und Integrale bildet eine Verallgemeinerung der Theorie der elliptischen Functionen und Integrale. Zum leichteren Verständniss der ersteren dürfte eine kurze Uebersicht über die Hauptpunkte der letzteren Theorie zweckmässig sein.

In der Theorie der elliptischen Functionen geht man aus von einer Gleichung zwischen zwei complexen Variabeln  $(x, y)$  vom Grade  $n = 3$  und vom Geschlecht  $p = 1$  von der Form<sup>1)</sup>

$$y^2 = R(x) = 4x^3 - g_2x - g_3 = 4(x - e_1)(x - e_2)(x - e_3), \quad (1)$$

wo  $g_2$  und  $g_3$  beliebige, reelle oder complexe Grössen sind.

Die erste Aufgabe ist die Untersuchung der Gleichung (1); sie führt zu zwei geometrischen Vorstellungen, die beide von Wichtigkeit sind. Die erste derselben betrachtet als Ort der complexen Variabeln  $x$  nicht eine einfache Ebene, sondern eine zweiblättrige, im Unendlichen geschlossene Fläche  $T$ , in welcher die zweiwerthige Function  $y = \sqrt{Rx}$  eindeutig ist, so dass jedem Werthepaar  $(x, y)$  oder  $(x, \sqrt{Rx})$  eindeutig ein Punkt dieser Fläche entspricht und umgekehrt. Die Fläche  $T$  heisst die Riemann'sche Verzweigungsfläche der Function  $y = \sqrt{Rx}$ ; sie hat vier Verzweigungspunkte  $e_1, e_2, e_3, \infty$ . Ihre beiden Blätter gehen in einander über längs zweier Verzweigungsschnitte, die zwischen  $e_3$  und  $e_2$  und zwischen  $e_1$  und  $\infty$  verlaufen mögen. Die Fläche  $T$  ist nicht einfach zusammenhängend, sondern wird erst durch  $2p = 2$  Querschnitte  $a$  und  $b$  einfach zusammenhängend gemacht. Wir denken uns  $b$  im oberen Blatt um die Punkte  $e_3$  und  $e_2$ ,  $a$  theils im oberen theils im unteren Blatt um die Punkte  $e_2$  und  $e_1$  gelegt. Die

1) Diese Uebersicht schliesst sich in der Behandlung an Riemann, in der Bezeichnung an das Werk: Weierstrass, Formen und Lehrsätze zum Gebrauche der elliptischen Functionen, bearbeitet u. hggb. von Schwarz (2. A. 1893) an.

zweite geometrische Vorstellung betrachtet (1) als Gleichung einer Curve vom Grade  $n = 3$  und vom Geschlecht  $p = 1$  mit complexen Coefficienten und complexen Coordinaten  $(x, y)$  und wendet auf sie alle Bezeichnungen an, die bei reellen Curven gebräuchlich sind. Sie spricht von einer Ebene, der  $(x, y)$ -Ebene, in der die Curve liegt (die aber keine reelle Existenz hat), und nennt ein Werthepaar  $(x, y)$ , das der Gleichung (1) genügt, einen Punkt dieser Curve u. s. f. Die letztere Deutung von (1) als Curve lässt eine besonders einfache Ausdrucksweise zu bei algebraischen Fragen und geometrischen Anwendungen, die Darstellung von  $y$  durch die Verzweigungsfläche  $T$  bietet dagegen besondere Vorzüge bei transcendenten Fragen.

Eine functionentheoretische Untersuchung zeigt, dass jede in  $T$  eindeutige oder wie  $T$  verzweigte Function des Ortes, die regulär ist, d. h. nur in einer endlichen Zahl von Punkten in  $T$  und in jedem derselben nur in endlicher Ordnung unendlich wird, eine rationale Function von  $(x, y)$  oder von  $(x, \sqrt{Rx})$  ist.

Diese Untersuchung der Gleichung (1) findet ihre Verallgemeinerung in den Betrachtungen des Abschnittes I.

Eine zweite Aufgabe ist die algebraische Untersuchung der rationalen Functionen von  $(x, y)$  oder von  $(x, \sqrt{Rx})$ . Diese Functionen sind, wenn  $f(x)$  und  $\varphi(x)$  rationale, gebrochene Functionen von  $x$  allein darstellen, von der Form

$$(2) \quad \frac{f(x) + \varphi(x) \sqrt{Rx}}{\sqrt{Rx}}.$$

Für diese Function gilt, im Gegensatz zu den rationalen Functionen von  $x$  allein, Folgendes:

Die Function (2) ist eindeutig und stetig in der zweiblättrigen Fläche  $T$  mit Ausnahme einer endlichen Anzahl von Punkten, in welchen die Function in endlicher Ordnung unendlich wird. Diese Eigenschaft ist nach dem Obigen charakteristisch für die rationalen Functionen von  $(x, y)$  und kann zur Definition derselben dienen.

Ferner ist die Zahl  $\varrho$  der Punkte, in welchen die rationale Function (2) unendlich in erster Ordnung ( $= \infty^1$ ) und Null in erster Ordnung ( $= 0^1$ ) wird, die gleiche; diese Zahl heisst die Ordnung der Function. Aber die Ordnung  $\varrho$  ist nicht willkürlich, sie hat eine untere Grenze  $p + 1 = 2$  und die  $\varrho \infty^1$  Punkte und die  $\varrho 0^1$  Punkte der Function sind nicht unabhängig von einander, sondern von diesen  $2\varrho$  Punkten ist einer ( $p = 1$ ) durch die  $2\varrho - 1$  übrigen bestimmt.

Hieraus ergeben sich für die Bildung der rationalen Function von  $(x, \sqrt{Rx})$  die Sätze:

Die Function ist bis auf einen constanten Factor bestimmt, wenn von ihren  $\infty^1$  Punkten und  $0^1$  Punkten alle bis auf einen gegeben sind; der letzte Punkt ist dann eindeutig bestimmt.

Die Function ist ferner bis auf eine additive Constante bestimmt, wenn ihre  $\varrho \infty^1$  Punkte und  $\varrho - 1$  von den zugehörigen Residuen gegeben sind. Das letzte Residuum ist dann eindeutig bestimmt.

Diese Untersuchungen über die rationalen Functionen finden ihre Verallgemeinerung in den Betrachtungen des Abschnittes II.

Eine dritte Frage gilt den Integralen der rationalen Functionen (2), den sog. elliptischen Integralen, die sich (abgesehen von Integralen rationaler Functionen von  $x$  allein) darstellen in der Form:

$$\int_c^x \frac{f(x) dx}{\sqrt{R x}}, \quad (3)$$

wo  $f(x)$  eine gebrochene, rationale Function von  $x$  ist.

Die charakteristischen Eigenschaften der Integralfunction (3) von  $x$  sind folgende:

Die Function (3) wird im Allgemeinen nicht nur algebraisch sondern auch logarithmisch unendlich; sie ist ferner in der Fläche  $T$  eine unendlich vieldeutige Function des Ortes, derart, dass sie um gewisse Constanten  $A$  und  $B$ , die sog. Periodicitätsmoduln, wächst, wenn der Integrationsweg die Querschnitte  $a$  und  $b$  überschreitet.

Das allgemeine elliptische Integral (3) lässt sich in einfachere Integrale zerlegen, die wesentlich verschiedenen Charakter haben, nämlich in Integrale der 1., 2. und 3. Gattung. Ein Integral 1. Gattung bleibt in allen Punkten von  $T$  endlich; es gibt (entsprechend dem Geschlecht  $p = 1$  der Gleichung (1)) nur ein Integral 1. Gattung, nämlich:

$$u = - \int_c^x \frac{dx}{\sqrt{R x}}. \quad (4)$$

Dagegen existiren beliebig viele Integrale 2. Gattung d. h. solche, die nur in einem Punkt von  $T$  algebraisch unendlich werden, und Integrale 3. Gattung d. h. solche, die nur in zwei Punkten von  $T$  logarithmisch unendlich werden. So stellen die Integrale

$$\int_c^x \frac{x dx}{\sqrt{R x}} \quad \text{und} \quad \int_c^x \frac{\sqrt{R x_0} dx}{\sqrt{R x} (x - x_0)} \quad (5)$$

ein Integral 2. Gattung mit dem algebraischen Unstetigkeitspunkt ( $x = \infty, \sqrt{Rx} = \infty$ ) und ein Integral 3. Gattung mit den beiden logarithmischen Unstetigkeitspunkten  $(x_0, +\sqrt{Rx_0})$  und  $(x_0, -\sqrt{Rx_0})$  dar.

Untersucht man die Beziehungen, die zwischen zwei elliptischen Integralen und ihren Unstetigkeitspunkten oder zwischen einem elliptischen Integral und einer rationalen Function sowie deren Unstetigkeitspunkten stattfinden, so erhält man eine Reihe von Gleichungen und Sätzen, aus denen wir nur das Abel'sche Theorem für die Integrale 1. Gattung hervorheben:

Die Summe der Werthe des elliptischen Integrals 1. Gattung, genommen zwischen zwei Punktsystemen, in welchen eine rationale Function  $r$  von  $(x, y)$  die Werthe  $\infty^1$  und  $0^1$  annimmt, ist gleich 0.

Setzt man z. B.  $r = ax + by + c$ , wo  $a, b, c$  beliebige Constanten sind, so wird  $r = \infty^3$  im Punkt  $(x = \infty, y = \infty)$  der Curve (1) und  $r = 0^1$  in drei Punkten  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ , die, wenn man  $\sqrt{Rx}$  für  $y$  schreibt, durch die Gleichung verbunden sind:

$$(6) \quad \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \sqrt{Rx_1} \\ 1 & x_2 & \sqrt{Rx_2} \\ 1 & x_3 & \sqrt{Rx_3} \end{vmatrix} = 0.$$

Bezeichnet man die drei Integrale 1. Gattung von der Form (4) mit den oberen Grenzen  $x_1, x_2, x_3$  durch  $u_1, u_2, u_3$ , so sagt das Abel'sche Theorem aus, dass

$$(7) \quad u_1 + u_2 + u_3 \equiv 0.$$

Aus (6) folgt also (7), und umgekehrt kann man aus (7) wieder die Gleichung (6) ableiten.

Die vorstehenden Sätze über die elliptischen Integrale finden ihre Verallgemeinerung im Abschnitt III; die Sätze über das Integral 1. Gattung in § 15; über die Integrale 2. und 3. Gattung in § 16; das Abel'sche Theorem in §§ 19 und 20.

Hieran schliessen sich wichtige Folgerungen bez. der Umkehrfunction des Integrals 1. Gattung. Betrachtet man in (4)  $x$  als Function von  $u$  und setzt

$$(8) \quad x = p(u) \quad y = \sqrt{Rx} = -\frac{dx}{du} = -p'(u)$$

und nennt die Periodicitätsmoduln des Integrals (4) an den Querschnitten  $a$  und  $b$  bezüglich  $2\omega$  und  $2\omega'$ , so gibt die conforme Abbildung der Verzweigungsfläche  $T$  mittels des Integrals (4) in der  $u$ -Ebene ein Parallelogramm, dessen gegenüberliegende Seiten den parallelen Rändern der Querschnitte  $a$  und  $b$  entsprechen. Hieraus

folgt, dass die Functionen (8) eindeutige, doppelt periodische Functionen der Variablen  $u$  mit den Perioden  $2\omega$  und  $2\omega'$  sind; solche Functionen heissen elliptische Functionen. Ebenso sind die Wurzelfunctionen  $\sqrt{x - e_i}$  ( $i = 1, 2, 3$ ) elliptische oder doppelt periodische Functionen von  $u$  mit etwas veränderten Perioden.

Die Aequivalenz der Bedingungen (6) und (7) führt zu dem algebraischen Additionstheorem der Function  $p(u)$ , welches aussagt, dass  $p(u_1 + u_2)$  sich rational durch  $pu_1, pu_2, p'u_1, p'u_2$  oder algebraisch durch  $pu_1, pu_2$  allein ausdrücken lässt; es ist nämlich

$$p(u_1 + u_2) = \frac{2(pu_1 pu_2 - \frac{1}{4}g_2)(pu_1 + pu_2) - g_3 - p'u_1 p'u_2}{2(pu_1 - pu_2)^2}. \quad (9)$$

Ein ähnliches Additionstheorem besteht für  $p'(u)$ , für die Wurzelfunctionen  $\sqrt{p u - e_i}$  und allgemein für jede doppelt periodische Function.

Diese Sätze über die elliptischen Functionen finden ihre Verallgemeinerung erst später in Abschnitt VII § 36 Satz V—IX.

Eine vierte Betrachtung dient zur Erweiterung der erhaltenen Resultate. Die letzteren gelten zunächst für die algebraische Grundgleichung (1) vom Grade  $n = 3$  und vom Geschlecht  $p = 1$ . Sie lassen sich aber auf eine algebraische Gleichung  $F_1(x_1, y_1) = 0$  von beliebigem Grade  $n_1$  und von demselben Geschlecht  $p = 1$  übertragen durch die sog. eindeutige Transformation d. h. eine Transformation der Form

$$x_1 = \varphi(x, y) \quad y_1 = \psi(x, y), \quad (10)$$

wo  $\varphi$  und  $\psi$  rationale Functionen von  $x$  und  $y$  sind von der Beschaffenheit, dass sich umgekehrt mit Hilfe von (1) oder  $F_1(x_1, y_1) = 0$  auch  $x$  und  $y$  als rationale Functionen von  $(x_1, y_1)$  darstellen. Es zeigt sich, dass durch eine solche Transformation eine gegebene Gleichung  $F_1(x_1, y_1) = 0$  vom Geschlecht  $p = 1$  stets auf die Form (1) gebracht werden kann derart, dass die absolute Invariante von (1), nämlich  $g_2^3 : g_3^2$ , mit der von  $F_1(x_1, y_1) = 0$  identisch wird. Damit hat man auch die Theorie der zu  $F_1(x_1, y_1) = 0$  gehörigen elliptischen Functionen und Integrale.

Diese Untersuchungen finden ihre Verallgemeinerung im Abschnitt IV.

Wir brechen hier die Uebersicht über die Theorie der elliptischen Functionen ab und geben die Fortsetzung derselben in der Einleitung zum zweiten Theil, der das Umkehrproblem behandelt. Im Rückblick auf das Vorstehende lässt sich nun der Inhalt des ersten Theiles unserer Darstellung der Theorie der Abel'schen Functionen leicht

übersehen. Derselbe handelt unter Voraussetzung einer algebraischen Gleichung  $F(x, y) = 0$  vom Grade  $n$  und vom Geschlecht  $p$  von den rationalen Functionen von  $(x, y)$  und ihren Integralen, den Abel'schen Integralen, und zerfällt in folgende vier Abschnitte:

Abschnitt I untersucht die algebraische Grundgleichung  $F(x, y) = 0$  und die zugehörige Verzweigungsfläche  $T$ .

Abschnitt II behandelt die Eigenschaften und Bildungsweisen der rationalen Functionen von  $(x, y)$ .

Abschnitt III betrachtet die zu  $F = 0$  gehörigen Abel'schen Integrale und die Beziehungen derselben zu einander und zu den rationalen Functionen einschliesslich des Abel'schen Theorems.

Abschnitt IV gibt die Erweiterung der gewonnenen Theorie durch Anwendung der eindeutigen Transformation auf die Gleichung  $F(x, y) = 0$  und die zugehörigen rationalen Functionen und Abel'schen Integrale.

---



## Erster Abschnitt.

### Die algebraische Grundgleichung.

Wir geben zuerst (§§ 1—3) eine geometrische Untersuchung der Gleichung  $F(x, y) = 0$  und der Zweigfunctionen  $y = f(x)$ , welche zur Construction der mehrblättrigen Verzweigungsfläche  $T$  von  $y$  führt. Alsdann folgt (§§ 4—6) eine analytische Untersuchung von  $F(x, y) = 0$  und der in  $T$  eindeutigen, regulären Functionen.

#### § 1. Die $n$ Zweigfunctionen.

Die Grundlage der folgenden Untersuchungen bildet eine algebraische Gleichung zwischen zwei complexen Variablen  $x$  und  $y$ :  $F(x, y) = 0$ . Diese Gleichung sei in  $x$ , wie in  $y$  rational und ganz und ausserdem irreducibel, d. h. nicht in Gleichungen derselben Art von niederem Grade zerfällbar. Der Grad von  $F(x, y)$  in  $y$  sei  $n$  und nach Potenzen von  $y$  geordnet sei

$$F(x, y) = y^n \varphi_0(x) + y^{n-1} \varphi_1(x) + \cdots + y \varphi_{n-1}(x) + \varphi_n(x) = 0, \quad (1)$$

wobei die Coefficienten  $\varphi_i(x)$  ganze rationale Functionen in  $x$  sind.

Man betrachte  $x$  als die unabhängige,  $y$  als die abhängige Variable und denke sich die erstere geometrisch dargestellt in einer Ebene, der  $x$ -Ebene, die im Unendlichen geschlossen ist wie eine Kugel. Durch Auflösung von (1) nach  $y$  erhält man  $n$  verschiedene Functionen

$$y_1 = f_1(x) \quad y_2 = f_2(x) \quad \cdots \quad y_n = f_n(x), \quad (2)$$

welche die Zweigfunctionen oder Zweige der durch (1) definirten  $n$ -deutigen Function  $y = f(x)$  heissen.

Ein im Endlichen gelegener Punkt der  $x$ -Ebene heisst ein regulärer Punkt der  $n$ -deutigen Function  $y = f(x)$ , wenn in ihm die  $n$  Zweigfunctionen endliche und von einander verschiedene Werthe haben; er heisst ein kritischer Punkt von  $y = f(x)$ , wenn in ihm einzelne Zweigfunctionen einander gleich oder unendlich werden.

Der Punkt  $x = \infty$  kann für die Function  $y = f(x)$  ebenfalls regulär oder kritisch sein; die Untersuchung für ihn lässt sich stets

durch die Substitution  $x = \xi^{-1}$  auf den Punkt  $\xi = 0$  einer  $\xi$ -Ebene zurückführen. Wir werden daher das Verhalten der Zweigfunctionen im Punkte  $x = \infty$  immer nur kurz erwähnen.

Wie die kritischen Punkte analytisch zu ermitteln und genauer zu unterscheiden sind, zeigt sich später (§ 4). Man sieht aber sofort, dass ihre Zahl eine endliche ist. Denn die Punkte, in denen die Zweigfunctionen unendlich werden, sind die Nullpunkte von  $\varphi_0(x)$ , und ausserdem unter Umständen der Punkt  $x = \infty$ , ihre Zahl ist daher endlich. Und die Punkte, in denen mehrere Zweigfunctionen gleich werden, sind die Nullpunkte der Discriminante, die man durch Elimination von  $y$  aus  $F(x, y) = 0$  und  $F'(y) = 0$  erhält und ausserdem unter Umständen der Punkt  $x = \infty$ ; ihre Zahl ist daher ebenfalls endlich.

Für das Verhalten der Zweigfunctionen in der Umgebung eines Punktes  $x = a$  gilt der fundamentale Satz<sup>1)</sup>:

- (1) Hat die Gleichung  $F(x, y) = 0$  für einen Punkt  $x = a$   $m$  Wurzeln  $y$ , die gleich demselben Werth  $b$  sind, so hat sie für einen nahe an  $a$  liegenden Punkt  $x$   $m$  nahe an  $b$  liegende Wurzeln; oder genauer: jede der  $m$  zugehörigen Zweigfunctionen  $y$  ist in der Umgebung des Punktes  $x = a$  stetig.

Beweis. Lässt man  $a$  um  $\xi$  wachsen und bezeichnet den entsprechenden Zuwachs von  $b$  mit  $\eta$ , so ist zu zeigen, dass es eine positive Grösse  $\varrho$  gibt derart, dass für alle Zuwüchse  $\xi$ , für die der Modul  $|\xi| \leq \varrho$  ist, stets  $m$  und nur  $m$  Zuwüchse  $\eta$  existiren, deren Modul  $|\eta| < \sigma$ , wo  $\sigma$  eine beliebig kleine, vorgegebene Grösse ist. Setzt man  $x = a + \xi$ ,  $y = b + \eta$  und entwickelt  $F(x, y) = 0$  nach Potenzen von  $\eta$ , so erhält man:

$$(3) \quad F(a + \xi, b + \eta) = X_0 + X_1\eta + X_2\eta^2 + \dots + X_n\eta^n = 0.$$

Die Coefficienten  $X_0, X_1, \dots, X_n$  sind Functionen von  $\xi$  und den Constanten  $a$  und  $b$ . Wir schreiben die Gleichung (3)

$$F(a + \xi, b + \eta) = \eta^m X_m (1 + P + Q),$$

wo

$$P = \frac{\eta}{X_m} (X_{m+1} + X_{m+2}\eta + \dots + X_n\eta^{n-m-1})$$

$$Q = \frac{1}{\eta^m X_m} (X_0 + X_1\eta + \dots + X_{m-1}\eta^{m-1}).$$

Nach Voraussetzung ist für  $\xi = 0$   $X_0 = X_1 = \dots = X_{m-1} = 0$ , dagegen  $X_m \geq 0$ . Man kann daher um  $a$  einen Kreis mit endlichem

1) Cauchy, Exerc. d'Analyse et de Physique. II. S. 109—136 (1841).

Radius  $\varrho_0$  beschreiben, der keine Wurzel von  $X_m = 0$  enthält. Wir setzen  $|\xi| < \varrho_0$  und bezeichnen mit  $A$  den kleinsten Modul von  $X_m$  im Kreise  $\varrho_0$ , mit  $B$  den grössten unter den Moduln von  $X_{m+1}, \dots, X_n$  im Kreise  $\varrho_0$ . Setzt man gleichzeitig  $|\eta| = \sigma < 1$ , so kann man zuerst  $\sigma$  so bestimmen, dass  $|P| < \frac{1}{2}$  wird, wenn  $|\xi| < \varrho_0$  und  $|\eta| = \sigma$  wird; man erhält dies  $\sigma$ , da

$$|P| < \frac{\sigma B}{A} (1 + \sigma + \sigma^2 + \dots) \quad \text{oder} \quad |P| < \frac{B}{A} \frac{\sigma}{1 - \sigma}$$

ist, aus

$$\frac{B}{A} \frac{\sigma}{1 - \sigma} = \frac{1}{2} \quad \text{also} \quad \sigma = \frac{A}{A + 2B}.$$

Zu dem so bestimmten  $\sigma$  kann man ferner, da  $Q = 0$  wird für  $\xi = 0$ , ein  $\varrho < \varrho_0$  wählen, so dass auch  $|Q| < \frac{1}{2}$  wird, wenn  $|\eta| = \sigma$  und  $|\xi| \leq \varrho$ . Denn bezeichnet man mit  $C$  den grössten unter den Moduln von  $X_0, X_1, \dots, X_{m-1}$  im Kreise  $\varrho < \varrho_0$ , so ist

$$|Q| < \frac{C}{\sigma^m A} (1 + \sigma + \sigma^2 + \dots + \sigma^{m-1})$$

und es wird  $|Q| < \frac{1}{2}$ , wenn man  $\varrho$  bestimmt aus

$$\frac{C}{A} \frac{1 - \sigma^m}{\sigma^m (1 - \sigma)} = \frac{1}{2}.$$

Nunmehr hat man für  $|\eta| = \sigma$  und  $|\xi| \leq \varrho$  die Werthe  $|P| < \frac{1}{2}$  und  $|Q| < \frac{1}{2}$ . Hieraus zieht man einen Schluss auf die Anzahl der Wurzeln  $\eta$  der Gleichung (3), die kleiner sind als  $\sigma$ . Nach einem bekannten Satze der Functionentheorie hat man in einer Ebene der complexen Variablen  $y$  die Punkte  $b$  und  $b + \eta$  zu markiren und festzustellen, um welches Vielfache von  $2i\pi$  sich die Function

$$\log F(a + \xi, b + \eta) = m \log \eta + \log X_m + \log (1 + P + Q)$$

ändert, wenn man den Punkt  $b + \eta$  auf einem Kreise vom Radius  $\sigma$  um den Punkt  $b$  führt. Nun vermehrt sich hierbei  $m \log \eta$  um  $m 2i\pi$ ; dagegen nimmt  $\log X_m$  seinen ursprünglichen Werth wieder an und ebenso  $\log (1 + P + Q)$ , das letztere, weil für alle Punkte auf dem Kreise sowohl  $|P|$  als  $|Q|$  kleiner als  $\frac{1}{2}$  sind, also  $|P + Q| < 1$  ist. Mithin liegen in dem Kreise vom Radius  $\sigma$  um  $b$  genau  $m$  Wurzeln  $\eta$  von (3), deren Modul  $< \sigma$  ist. Wiederholt man jetzt die Betrachtung, indem man  $\sigma' < \sigma$  annimmt, so kann man zu  $\sigma'$  ein passendes  $\varrho' < \varrho$  finden. Für  $|\xi| < \varrho'$  werden nun gerade  $m$  Werthe von  $\eta$ , die kleiner als  $\sigma'$  sind, existiren. Es sind also die früheren  $m$  Wurzeln  $\eta$  jetzt in den kleineren Kreis mit dem Radius  $\sigma'$  gerückt. Hieraus folgt, dass

in der Umgebung des Punktes  $x = a$  in der  $x$ -Ebene ein Gebiet existirt, definirt durch  $\xi < \varrho$ , in welchem die betrachteten  $m$  Zweifunctionen stetig sind und dass diese  $m$  Zweifunctionen in  $x = a$  den gemeinsamen Werth  $b$  annehmen. (q. e. d.)

Ist  $x = a$  ein regulärer Punkt, so folgt aus (I) der Satz:

(II) In der Umgebung eines regulären Punktes ist jede Zweifunction eindeutig und stetig und besitzt eine stetige Ableitung.

Dem aus (I) folgt bereits, wenn man  $m = 1$  setzt, dass für jede Zweifunction in der Umgebung eines regulären Punktes in der  $x$ -Ebene ein Gebiet existirt, für welches die Zweifunction eindeutig und stetig ist. Um zu zeigen, dass in diesem Gebiet die Zweifunction eine stetige Ableitung besitzt, sei  $x$  ein regulärer Punkt,  $y$  die betrachtete Zweifunction. Ferner seien  $\xi$  und  $\eta$  zusammengehörige Zuwüchse von  $x$  und  $y$  (wie früher von  $a$  und  $b$ ), die den Bedingungen  $|\xi| < \varrho$ ,  $|\eta| < \sigma$  genügen, wo  $\varrho$  und  $\sigma$  die im Beweis von Satz I definirten, der betrachteten Zweifunction entsprechenden Grössen sind. Die Entwicklung von  $F(x + \xi, y + \eta) = 0$  nach Potenzen von  $\xi$  und  $\eta$  gibt, da  $F(x, y) = 0$  ist,

$$\xi \left( \frac{\partial F}{\partial x} + E \right) + \eta \left( \frac{\partial F}{\partial y} + H \right) = 0,$$

wo  $E$  und  $H$  mit  $\xi$  und  $\eta$  gleichzeitig gegen Null convergiren. Da nun wegen der Stetigkeit auch  $\eta$  mit  $\xi$  gegen Null convergirt, so erhält man einen und nur einen Werth für den Quotienten

$$\left( \frac{\eta}{\xi} \right)_{\xi=0} = - \frac{\partial F}{\partial x} : \frac{\partial F}{\partial y}.$$

Dieser Werth stellt die Ableitung von  $y$  nach  $x$  dar; dieselbe ist endlich, da  $x$  ein regulärer Punkt, also  $\frac{\partial F}{\partial y}$  nicht  $= 0$ , und sie ist stetig, da nach dem Früheren die Zweifunction  $y$  eine stetige Function von  $x$  ist.

Die Sätze I und II bilden die Grundlage für die weitere Untersuchung der Zweifunctionen<sup>1)</sup>. Aus (II) folgt: Ist  $x = a$  ein beliebiger, aber fest gewählter, regulärer Punkt, so lässt sich jede Zweifunction in der Umgebung von  $x = a$  in eine Potenzreihe entwickeln, die nach ganzen, positiven Potenzen von  $x - a$  fortschreitet und in einem Kreise convergirt, der durch den nächsten kritischen

1) Puiseux, Journ. de Mathém. T. XV u. XVI. 1850 u. 51. Deutsch von H. Fischer: V. Puiseux' Untersuchungen über die algebraischen Functionen. Halle 1861. S. 7 ff.

Punkt geht. Durch Transformation dieser Potenzreihen in andere mit übereinander greifenden Convergenzkreisen kann man die Zweigfunctionen fortsetzen über die ganze  $x$ -Ebene und dadurch ihr Verhalten und ihren Verlauf in allen Theilen der  $x$ -Ebene untersuchen. Es ergeben sich dabei zwei wichtige Sätze.

Bezeichnet man mit  $A$  ein einfach zusammenhängendes, endliches oder unendliches Gebiet in der  $x$ -Ebene, so lautet der erste Satz:

(III) Enthält das Gebiet  $A$  nur reguläre aber keine kritischen Punkte und beschreibt  $x$  in  $A$  eine geschlossene Linie, so fällt für jede Zweigfunction der Endwerth mit dem Anfangswerth zusammen.

Es ist zu zeigen, dass, wenn man in  $A$  eine Zweigfunction, von einem Punkte  $a$  ausgehend, auf zwei verschiedenen Curven nach einem anderen Punkte  $a_1$  führt, die beiden Endwerthe der Function stets dieselben sind, was sich mit der Behauptung des Satzes (III) deckt. Betrachtet man zunächst in  $A$  zwei unendlich wenig verschiedene Wege  $ama_1$  und  $ana_1$ , und geht mit dem Anfangswerth  $y_a$ , den eine bestimmte Zweigfunction  $y$  im Punkt  $a$  hat, auf diesen Wegen nach  $a_1$ , so sind die beiden Werthe  $y_m$  und  $y_n$ , die  $y$  in unendlich nahen Punkten  $m$  und  $n$  der beiden Curven annimmt, stets unendlich wenig verschieden wegen der Stetigkeit der Zweigfunction an regulären Stellen. Daher können  $y_m$  und  $y_n$  auch in  $a_1$  nicht zwei Werthe haben, die um eine endliche Grösse verschieden sind, d. h. die Werthe von  $y$  müssen in  $a_1$  zusammenfallen. Man kann nun von den zwei unendlich nahen Curven zu zwei beliebigen Curven zwischen  $a$  und  $a_1$  in  $A$  übergehen, indem man den Weg  $ama_1$  durch allmähliche Veränderung in einen anderen Weg  $apa_1$  umformt. Auch dann muss die Zweigfunction  $y$ , die mit dem Werth  $y_a$  in  $a$  beginnt, auf beiden Wegen denselben Endwerth in  $a_1$  erhalten, da  $A$  keinen kritischen Punkt enthält, also bei der Umwandlung des ersten Weges in den zweiten auch kein solcher Punkt überschritten wird. (q. e. d.)

Dagegen sagt der zweite Satz<sup>1)</sup>:

(IV) Enthält das Gebiet  $A$  kritische Punkte und beschreibt  $x$ , von einem regulären Punkt ausgehend, in  $A$  eine geschlossene Linie, die durch keinen kritischen Punkt hindurchgeht, so erfahren die  $n$  Zweigfunctionen  $y_1, \dots, y_n$  im Allgemeinen eine Permutation und sondern sich bei wiederholtem Durchlaufen derselben Linie in ein oder mehrere cyclische Systeme.

1) Puiseux-Fischer S. 27.

Durchläuft nämlich  $x$  in  $A$  eine geschlossene Linie in bestimmter Richtung, so geht eine der Zweigfunctionen etwa  $y_1$  entweder wieder in  $y_1$  oder in eine andere Zweigfunction etwa  $y_2$  über. Bei einem zweiten Durchlaufen der Linie in derselben Richtung geht diese Function  $y_2$  entweder über in  $y_1$  oder in eine dritte Zweigfunction  $y_3$ . Denn eine Rückkehr zu  $y_2$  ist ausgeschlossen, da ein Durchlaufen der Linie in entgegengesetzter Richtung  $y_2$  in  $y_1$  überführen muss. Ist  $y_2$  in  $y_3$  übergegangen, so führt ein drittes Durchlaufen der Linie  $y_3$  entweder in  $y_1$  oder in eine vierte Zweigfunction etwa  $y_4$  über. Denn ein Uebergang von  $y_3$  in  $y_3$  selber oder aber in  $y_2$  ist ausgeschlossen, weil ein Durchlaufen der Curve in entgegengesetzter Richtung nach dem Vorstehenden  $y_3$  in  $y_2$ , dagegen  $y_2$  in  $y_1$  überführen muss. Führt man so fort, so ist klar, dass man spätestens nach  $n$  Umläufen wieder den ursprünglichen Werth  $y_1$  erhalten muss. In diesem Falle gehen die  $n$  Zweigfunctionen  $y_1, y_2, \dots, y_n$  nach einem Umlauf etwa in  $y_2, y_3, \dots, y_n, y_1$ , folglich nach zwei Umläufen in  $y_3, y_4, \dots, y_n, y_1, y_2$ , nach  $n-1$  Umläufen in  $y_n, y_1, \dots, y_{n-1}$  und nach  $n$  Umläufen wieder in  $y_1, y_2, \dots, y_n$  über. Man sagt dann, die  $n$  Zweigfunctionen bilden für die geschlossene Curve ein einziges, cyclisches System. Im Allgemeinen werden indess schon  $n_1 (< n)$  Zweigfunctionen unter sich ein solches System bilden,  $n_2$  weitere ein zweites u. s. f., wobei  $n_1 + n_2 + \dots = n$  sein muss. Die Zahlen  $n_1, n_2, \dots$  können dabei zum Theil oder auch alle gleich 1 sein. (q. e. d.)

Um den Einfluss der kritischen Punkte auf den Verlauf und Zusammenhang der Zweigfunctionen genauer zu untersuchen, führe man die von dem regulären Punkt  $a$  ausgehende und nach  $a$  zurückkehrende geschlossene Curve durch Zusammenziehen, ohne dabei einen kritischen Punkt zu überschreiten, zurück auf eine Anzahl von nach einander zu durchlaufenden, geschlossenen Curven, die nur je einen kritischen Punkt einschliessen und untersuche den Einfluss dieser Curven auf die Zweigfunctionen. Man nennt eine von  $a$  ausgehende, nur einen kritischen Punkt  $\xi$  umschliessende Curve eine Schleife (nach Puiseux auch Elementarcurve) und denkt sich dieselbe als eine Curve, die längs einer Linie  $s$  von  $a$  aus bis zu einem regulären Punkt  $\alpha$  in der Nähe von  $\xi$ , dann auf einem kleinen Kreise um  $\xi$  herum und längs  $s$  wieder nach  $a$  zurückführt. Durchläuft  $x$  eine solche Schleife um einen im Endlichen der  $x$ -Ebene liegenden kritischen Punkt  $\xi$ , so gilt Folgendes:

Die in  $a$  für die  $n$  Zweigfunctionen gültigen Entwicklungen seien

$$(4) \quad y_1 = f_1(x - a), \quad y_2 = f_2(x - a) \cdots y_n = f_n(x - a).$$

Geht  $x$  auf  $s$  von  $a$  nach  $\alpha$ , so mögen diese Entwicklungen bez. übergehen in die Functionen

$$\eta_1 = \varphi_1(x) \quad \eta_2 = \varphi_2(x) \cdots \eta_n = \varphi_n(x). \quad (5)$$

Umläuft  $x$  den Punkt  $\xi$  von  $\alpha$  aus auf einem kleinen Kreise, so erfahren die Functionen (5) eine Permutation (nach Satz IV), die bezeichnet sei durch  $\eta_{i_1}, \eta_{i_2}, \dots, \eta_{i_n}$ . Kehrt endlich  $x$  von  $\alpha$  auf  $s$  zurück nach  $a$ , so haben die Functionen (4) eine entsprechende Permutation erfahren, d. h. sie sind übergegangen in die Functionen  $y_{i_1}, y_{i_2}, \dots, y_{i_n}$ . Wird die Schleife wiederholt durchlaufen, so gruppieren sich die Functionen (4) zu Cyclen, derart, dass jedem Cyclus eine Anzahl der Functionen (4) angehört, die sich beim Durchlaufen der Schleife unter sich permutiren. Dabei können einzelne Cyclen eine Function allein enthalten. Man kann hiernach die beim Durchlaufen der Schleife auftretende Zahl der Cyclen, ferner die Anzahl und die Nummern der jedem Cyclus zugehörigen Zweifunctionen (4) feststellen. Vom Punkte  $a$  aus werden also dem kritischen Punkte  $\xi$  durch die Schleife  $s$  die Zweifunctionen (4) in bestimmten Cyclen zugeordnet. Es ist aber wichtig zu bemerken, dass diese Zuordnung von der Lage der Schleifenlinien  $s$  zwischen  $a$  und  $\xi$  abhängt. Denn wählt man zwischen  $a$  und  $\xi$  statt  $s$  eine andere Linie  $t$ , die zusammen mit  $s$  beliebige kritische Punkte einschliessen mag, so gehen die Functionen (4) durch stetige Fortsetzung längs der Linie  $t$  im Punkt  $a$  nicht mehr bez. in die Functionen (5), sondern nach Satz IV in eine Permutation dieser Functionen und die Functionen (4) beim Durchlaufen der Schleife  $t$  nicht mehr bez. in die Functionen  $y_{i_1}, y_{i_2}, \dots, y_{i_n}$ , sondern in eine entsprechende Permutation derselben über. Beim Verlegen der Linie  $s$  zwischen  $a$  und  $\xi$  bleibt daher wohl die Zahl der Cyclen und die Anzahl der jedem Cyclus zugehörigen Zweifunctionen erhalten, nicht aber die Nummern dieser Zweifunctionen in jedem Cyclus.

Handelt es sich für den kritischen Punkt  $\xi$  blos darum, die Zahl der Cyclen und die Anzahl der jedem Cyclus zugehörigen Zweifunctionen festzustellen, so genügt es offenbar, sämtliche Zweifunctionen auf einem kleinen Kreise um  $\xi$  zu führen und die dabei auftretenden Cyclen zu bestimmen. Es ist klar, dass hierbei von den kritischen Punkten solche, in denen nur eine Zweifunction unendlich wird, nicht in Betracht kommen, wohl aber solche, in denen von den  $n$  Zweifunctionen mehrere denselben endlichen (oder unendlichen) Werth haben. Es ergibt sich aber aus der Betrachtung der Cyclen eine weitere Unterscheidung der letzteren Punkte, nämlich eine Unter-

scheidung in kritische Punkte ohne und mit Verzweigung. Die zwei einfachsten Fälle sind folgende:

1. In dem Punkte  $\xi$  haben die Zweigfunctionen verschiedene Werthe, nur  $\lambda (> 1)$  Zweigfunctionen haben denselben Werth und diese  $\lambda$  Zweigfunctionen bilden in der Umgebung von  $\xi$  einen einzigen Cylus. Man sagt dann, die  $\lambda$  Zweigfunctionen hängen in dem Punkte  $\xi$  zusammen oder sie sind in ihm verzweigt. Ein solcher Punkt  $\xi$  heisst ein kritischer Punkt mit Verzweigung, genauer ein  $\lambda - 1$ -facher Verzweigungspunkt oder auch ein Verzweigungspunkt von der Ordnung  $\lambda$ .
2. In dem Punkte  $\xi$  haben die Zweigfunctionen verschiedene Werthe, nur  $\mu (> 1)$  Zweigfunctionen haben denselben Werth, aber jede dieser  $\mu$  Functionen geht bei einmaligem Umlaufen des Punktes  $\xi$  in sich selbst über. Man sagt dann, die  $\mu$  Zweigfunctionen hängen in dem Punkte  $\xi$  nicht zusammen, sie verlaufen in der Umgebung des Punktes  $\xi$  getrennt von einander. Ein solcher Punkt  $\xi$  heisst ein kritischer Punkt ohne Verzweigung, genauer ein  $\mu$ -facher Punkt mit getrennten Zweigen.

Mit Rücksicht auf diese Unterscheidung folgt für das Verhalten der Zweigfunctionen in einem beliebigen kritischen Punkte der Satz:

- (V) In dem allgemeinsten kritischen Punkte  $\xi$  zerfallen die  $n$  Zweigfunctionen  $y$  in Gruppen, so dass die Functionen einer jeden Gruppe in  $\xi$  denselben Werth  $\eta$  (oder  $\infty$ ) haben; dabei können in einer Gruppe noch solche Functionen auftreten, die unverzweigt oder getrennt verlaufen und andere Functionen, die einen oder mehrere Cylen bilden.

Allgemein heisst ein kritischer Punkt  $\xi$  ein Verzweigungspunkt oder ein Punkt ohne Verzweigung, je nachdem für ihn unter den  $n$  Zweigfunctionen  $y$  Cylen auftreten oder nicht. Wir bemerken noch Folgendes. Ist ein Punkt  $\xi$  in mehrfacher Weise Verzweigungspunkt, so dass in ihm  $\lambda'$  Zweige den Werth  $\eta'$  haben und einen ersten Cylus von der Ordnung  $\lambda'$  bilden,  $\lambda''$  andere Zweige den Werth  $\eta''$  haben und einen zweiten Cylus von der Ordnung  $\lambda''$  bilden u. s. f. (wobei die Werthe  $\eta'$ ,  $\eta''$ , ... auch zum Theil oder alle zusammenfallen können und unabhängig davon die Zahlen  $\lambda'$ ,  $\lambda''$ , ... auch zum Theil oder alle gleich sein können), so kann man, um die auf den folgenden Seiten angegebenen Operationen auszuführen, sich statt  $\xi$  mehrere nahe zusammenliegende Punkte  $\xi'$ ,  $\xi''$  ... denken, in denen je nur ein Cylus von bez.  $\lambda'$ ,  $\lambda''$ , ... Zweigen stattfindet und hat dann nach Ausführung



der Operationen nur die Punkte  $\xi'$ ,  $\xi''$ , ... wieder in den Punkt  $\xi$  zusammenrücken zu lassen.

Für den Verlauf und den Zusammenhang der Zweifunctionen sind offenbar ausschliesslich die Verzweigungspunkte von Einfluss, während die kritischen Punkte ohne Verzweigung sich wie reguläre Punkte verhalten, vorausgesetzt, dass die Zweifunctionen, die in einem solchen Punkte gleiche Werthe haben, nicht durch den Punkt geführt werden. Unter dieser Voraussetzung kann man schon in III und IV den Ausdruck „kritische Punkte“ durch „Verzweigungspunkte“ ersetzen.

Die vorstehenden Betrachtungen führen nun zu einer allgemeinen Vorstellung über die Werthvertheilung der  $n$ -werthigen Function  $y = f(x)$ . Man denke sich sämmtliche Verzweigungspunkte  $\xi_1, \xi_2, \dots$  (die übrigen kritischen Punkte kommen hierbei nicht in Betracht) in der  $x$ -Ebene festgelegt und mittels einer von dem regulären Punkt  $a$  nach dem Verzweigungspunkt  $\xi_i$  gehenden Schleife  $s_i$  die dem Punkt  $\xi_i$  zugehörigen Cyclen der Zweifunctionen ermittelt. Die Nummern der in einem solchen Cyclen enthaltenen Zweifunction hängen aber nach dem Vorigen von der Lage der Schleife  $s_i$  zwischen  $a$  und  $\xi_i$  ab und ändern sich mit derselben; es ist daher eine Bestimmung über diese Lage zu treffen. Hierzu ordne man die Verzweigungspunkte  $\xi_1, \xi_2, \dots$  in eine beliebige Reihenfolge und verbinde sie in dieser Folge durch eine sich selbst nicht schneidende Hilfslinie  $C$ . Man ziehe alsdann von  $a$  nach  $\xi_1, \xi_2, \dots$  bez. die Schleifen  $s_1, s_2, \dots$  derart, dass sie einander und  $C$  nicht schneiden. Bei dieser Anordnung sind für jeden Verzweigungspunkt die Cyclen und in jedem Cyclen die Nummern der ihm angehörigen Zweifunctionen eindeutig bestimmt. Alsdann lösche man die Linie  $C$ . Wählt man jetzt in  $a$  zunächst nur einen der  $n$  Zweige, etwa  $y_1$ , und bildet die stetige Fortsetzung desselben, indem man die Variable  $x$  von  $a$  aus einen beliebigen Weg beschreiben lässt, der keine der Schleifenlinien  $s_i$  überschreitet, so erhält man für jeden Punkt der  $x$ -Ebene einen bestimmten Werth des betrachteten Zweiges. Die Werthe des Zweiges ändern sich nach Satz I stetig mit der Lage von  $x$  auch dann noch, wenn der Weg in einen der Punkte  $\xi_i$  selber führt. Nur an den Curven  $s_i$  ist der Zweig im Allgemeinen unstetig, d. h. die Werthe des Zweiges in gegenüberliegenden Punkten zu beiden Seiten der Curven  $s_i$  sind im Allgemeinen verschieden.

Auf diese Weise ist der erste Zweig  $y_1$  in der ganzen  $x$ -Ebene festgelegt. Legt man in derselben Weise auch die übrigen Zweige  $y_2, \dots, y_n$  in der  $x$ -Ebene fest, so ist nach den vorstehenden Entwick-

lungen klar, dass beim Ueberschreiten der Schleifenlinien  $s_i$  die verschiedenen Zweige in bestimmter Weise stetig in einander übergehen müssen. Es gilt nun schliesslich der Satz:

(VI) Wenn  $F(x, y) = 0$  irreducibel ist, so schliessen sich die sämtlichen Fortsetzungen der  $n$  Zweigfunctionen  $y_i = f_i(x)$  zu einer einzigen analytischen Function zusammen.<sup>1)</sup>

Wir behaupten mit anderen Worten: Ist  $F(x, y) = 0$  irreducibel, so kann man, von dem regulären Punkt  $a$  ausgehend, in der  $x$ -Ebene stets eine geschlossene Curve so wählen, dass der Endwerth  $y'_i$ , den die Zweigfunction  $y_i$  nach dem Durchlaufen der Curve in  $a$  erreicht, mit einem der Werthe  $y_1, y_2, \dots, y_n$  von  $y$  in  $a$ , den man beliebig voraus bestimmen kann, zusammenfällt.

In der That kann man durch eine passende Reihe von Schleifen, also auch durch eine geschlossene Curve, von jedem der in  $a$  stattfindenden Zweigwerthe zu jedem andern vorausbestimmten Zweigwerth gelangen. Denn, wäre dies nicht der Fall, so müsste es einen Cyclus von weniger als  $n$  Zweigwerthen  $y_k, y_l, \dots$  geben, die nur immer in einander übergehen, welche Schleifen um die Verzweigungspunkte man auch durchläuft. Eine jede symmetrische Verbindung der Functionen  $y_k, y_l, \dots$  müsste also, indem man sie von  $a$  aus über einen geschlossenen Weg in der  $x$ -Ebene führt, in  $a$  wieder den ursprünglichen Werth annehmen. Sie wäre also in der ganzen  $x$ -Ebene eindeutig und folglich, da sie nur in endlicher Ordnung unendlich wird, eine rationale Function von  $x$ . Man könnte daher eine Gleichung in  $y$  aufstellen, deren Coefficienten rationale Functionen von  $x$  wären und deren Wurzeln nur aus einem Theil der  $n$  Zweigfunctionen  $y_i$  bestünden. Diese Gleichung müsste also ein Factor von  $F(x, y) = 0$  sein, was der Voraussetzung, dass  $F(x, y) = 0$  irreducibel sei, widerspricht. (q. e. d.)

## § 2. Die Riemann'sche Verzweigungsfläche.<sup>2)</sup>

Der Zusammenhang der  $n$  Zweigfunctionen und der Gesamtverlauf der  $n$ -werthigen Function  $y$  gewinnt bedeutend an Anschaulichkeit, wenn man eine geometrische Vorstellung benutzt, die von Riemann ausgebildet ist. Dieselbe betrachtet als Ort der Variablen  $x$  nicht, wie bisher geschah, die einfache  $x$ -Ebene, sondern eine über der  $x$ -Ebene  $n$ -blättrig ausgebreitete, in sich zusammenhängende

1) Puiseux-Fischer S. 134 ff.

2) Riemann, Ges. W. S. 7. 83. 95 ff.

Fläche  $T$ , die Riemann'sche Verzweigungsfläche von  $y$ . Eine solche Fläche verwandelt gradezu die in der  $x$ -Ebene  $n$ -werthige Function  $y$  in eine einwerthige Function des Ortes in der Fläche. Sie ermöglicht dadurch die Anwendung der Sätze über einwerthige Functionen und ihre Integrale auf die Function  $y$ , oder allgemeiner auf rationale Functionen von  $x$  und  $y$  und deren Integrale. Die Construction der Verzweigungsfläche von  $y$  ist folgende:

Da jedem  $x$   $n$  Werthe von  $y$  entsprechen, so breite man über der einfachen  $x$ -Ebene  $n$  getrennte, im Unendlichen geschlossene Blätter  $B_1, B_2, \dots, B_n$  aus und ordne den über dem regulären Punkt  $a$  der  $x$ -Ebene in diesen Blättern liegenden  $n$  Punkten die Werthe der Zweifunctionen

$$b_1 = f_1(a), \quad b_2 = f_2(a) \quad \cdots \quad b_n = f_n(a) \quad (1)$$

in beliebiger Reihenfolge zu, etwa so, dass dem Blatt  $B_k$  der Werth  $b_k$  entspricht. Damit sind auch in der Umgebung von  $a$  den  $n$  Blättern die  $n$  Zweifunctionen

$$y_1 = f_1(x), \quad y_2 = f_2(x) \quad \cdots \quad y_n = f_n(x) \quad (2)$$

zugeordnet. Der in § 1 festgestellte Zusammenhang der  $n$  Zweifunctionen überträgt sich nun in folgender Weise auf die  $n$  Blätter.

Es sind lediglich die Verzweigungspunkte ins Auge zu fassen, weil in ihrer und nur in ihrer Umgebung die Blätter in einander übergehen, während sie in allen anderen Punkten getrennt bleiben. Man lege in der  $x$ -Ebene von  $a$  aus nach den Verzweigungspunkten  $\xi_1, \xi_2, \dots$  die Schleifen  $s_1, s_2, \dots$  in der in § 1 angegebenen Weise, markire in allen  $n$  Blättern die über je einem Verzweigungspunkt  $\xi_i$  liegenden  $n$  Punkte und durchschneide die sämtlichen Blätter längs derjenigen Curven  $S_i$ , die über den in der  $x$ -Ebene gezogenen Schleifenlinien  $s_i$  hinlaufen. Setzt man nun in jedem Blatte die in der Umgebung des Punktes  $a$  durch die Werthe  $b_i$  (1) bereits festgelegten Zweifunctionen stetig fort, ohne die Schnitte  $S_i$  zu überschreiten, so wird jeder Punkt eines jeden der  $n$  Blätter der Träger eines ganz bestimmten Werthes von  $y$ . Dabei hat in übereinander liegenden Punkten der  $n$  Blätter  $x$  denselben Werth, aber  $y$  je einen der zugehörigen Zweigwerthe. Ein bestimmter Punkt eines Blattes ist demnach nicht durch den Werth von  $x$  allein, sondern durch zwei zusammengehörige Werthe  $(x, y)$  charakterisirt.

Die  $n$  Blätter sind vorläufig noch von einander getrennt; sie stellen aber in ihrer Gesammtheit einen Ort oder ein Gebiet dar, welches die ganze Ausbreitung der  $n$ -werthigen Function  $y$  enthält. Jede Zweifunction ist eindeutig und stetig in ihrem Blatt aus-

gebreitet, mit Ausnahme der Schnitte  $S_i$ . Längs dieser aber schliessen sich die Zweige von  $y$  in den verschiedenen Blättern aneinander und es sind demgemäss noch die Blätter längs der Schnitte  $S_i$  unter einander zu verbinden. Hierzu untersuche man für einen Verzweigungspunkt  $\xi_i$  mittels der zugehörigen Schleife  $s_i$  in der  $x$ -Ebene die Zahl  $\lambda_i$  und die Nummern der in ihm zusammenhängenden Functionszweige. Man verbinde dann die diesen Zweigen entsprechenden Blätter längs der Schnitte  $S_i$  in der Reihenfolge, in der ihr Zusammenhang durch die Schleife  $s_i$  festgestellt war, während in den übrigen Blättern der Schnitt  $S_i$  zu löschen ist. Man kann dies anschaulich so ausdrücken. Um den  $\lambda_i - 1$ -fachen Verzweigungspunkt  $\xi_i$  der Fläche winden sich die  $\lambda_i$  Blätter in bestimmter Weise schraubenförmig herum (wie eine Schraubenfläche von unendlich kleiner Höhe des Schraubenganges), derart, dass ein Umkreisen des Punktes in der Fläche aus dem ersten der in ihm zusammenhängenden Blätter in ein zweites, ein abermaliges Umkreisen aus dem zweiten in ein drittes Blatt führt u. s. f., so dass eine Curve erst, nachdem sie den Punkt  $\xi_i$   $\lambda_i$ -mal umkreist hat, in das erste Blatt zurückführt und sich schliesst. Hierbei hat man sich vorzustellen, dass das letzte der  $\lambda_i$  Blätter sich längs des Schnittes  $S_i$  mit dem ersten Blatt wieder vereinigt, indem es alle zwischenliegenden Blätter durchsetzt. Die Verzweigungspunkte heissen wegen dieses Verhaltens auch Windungspunkte. Führt man diese Construction für die sämmtlichen Verzweigungspunkte  $\xi_i$ , von denen auch einige über einander liegen können, durch, so stellt die Fläche in der Umgebung derselben die Verzweigungsart der Function  $y$  in der richtigen Weise dar.

Indem man die  $\lambda_i$  Blätter, die in  $\xi_i$  zusammenhängen, längs der Schnitte  $S_i$  verbindet, tritt aber auch die in jenen  $\lambda_i$  Blättern über  $a$  liegende Gruppe von  $\lambda_i$  Punkten zu einem Punkte zusammen, der für den Augenblick durch  $a_i$  bezeichnet sei. Es hängen also, wenn die angegebene Construction für die sämmtlichen Verzweigungspunkte  $\xi_i$  durchgeführt ist, die  $n$  Blätter noch in den über  $a$  liegenden Gruppenpunkten  $a_i$  in gewisser Weise zusammen. Soll die Verzweigungsart der Function  $y$  auch im Punkte  $a$  durch die Fläche dargestellt sein, so müssen, da  $a$  ein regulärer Punkt war, die letzteren Zusammenhänge sich wieder aufheben oder die  $n$  Blätter in den über  $a$  liegenden Punkten sich wieder trennen. Dies ist in der That der Fall. Umläuft man nämlich in der einfachen  $x$ -Ebene mit einer beliebigen Zweigfunction  $y_k$  eine geschlossene Curve, die alle Verzweigungspunkte  $\xi_i$  und den einfachen Punkt  $a$  einschliesst, so tritt keine Werthänderung von  $y_k$  ein. Die geschlossene Curve lässt

sich aber zusammenziehen in die Gesamtheit der von  $a$  ausgehenden, die Verzweigungspunkte  $\xi_i$  umschliessenden Schleifen  $s_i$ . Daher kann auch keine Werthänderung von  $y_k$  eintreten, wenn man in der  $x$ -Ebene die Schleifen  $s_i$  in der früher festgesetzten Ordnung durchläuft. Nun finden aber in den Gruppenpunkten  $a_i$  dieselben Zusammenhänge der Blätter statt, wie in den entsprechenden Verzweigungspunkten  $\xi_i$ . Daher folgt, dass in der oben construirten,  $n$ -blättrigen Fläche die im Punkt  $a$  dem  $k^{\text{ten}}$  Blatt zugeordnete Zweigfunction  $y_k$ , wenn man dieselbe, im  $k^{\text{ten}}$  Blatt beginnend und stetig in der Fläche fortgehend, um die über  $a$  liegenden Punkte  $a_i$  auf einem kleinem Kreise herumführt, wobei sie an jedem in diesen Punkten einmündenden Schnitte  $S_i$  in ein anderes Blatt eintreten kann, doch nach einmaligem Umlaufen in das  $k^{\text{te}}$  Blatt zurückkehrt, dass also wirklich die  $n$  Zweige in den  $n$  Blättern über dem Punkt  $a$  getrennt verlaufen.

Nach dem Vorstehenden erscheint die Construction der  $n$ -blättrigen Fläche immer noch in Abhängigkeit von dem Punkte  $a$ , da die von den Verzweigungspunkten ausgehenden Schnitte  $S_i$ , längs deren die Blätter zusammenhängen, alle in den über  $a$  liegenden Punkten der Fläche zusammenlaufen. Es lassen sich aber offenbar die die Blätter aneinander fügenden Schnitte  $S_i$  in gewisse Gruppen zusammenfassen, als solche von einander trennen und von  $a$  aus verschieben, ohne kritische Punkte zu überschreiten, so dass die Verzweigung von  $y$  ungestört bleibt. Hierdurch erhält man eine von dem zufällig gewählten Punkte  $a$  ganz unabhängige Fläche. Dies ist die gesuchte Verzweigungsfläche  $T$  der  $n$ -werthigen Function  $y$ . Die Linien zwischen den Verzweigungspunkten, längs deren die  $n$  Blätter zusammenhängen, heissen die Verzweigungsschnitte der Fläche  $T$ . Die angegebene Construction liefert die Verzweigungsfläche von  $y$  in mannigfacher Form, da die Anordnung der Verzweigungsschnitte noch mancherlei Aenderungen zulässt. Wie aber auch die Wahl derselben getroffen sei, die Verzweigungsfläche von  $y$  muss bei unsrer Voraussetzung, dass die Gleichung  $F(x, y) = 0$  unzerfällbar sei, nach Satz VI § 1 stets eine einzige, zusammenhängende Fläche sein und nicht blos in einzelnen Punkten, sondern längs ganzer Verzweigungsschnitte zusammenhängen.

Aus der Construction geht zugleich hervor, dass die durch  $F(x, y) = 0$  definirte Function  $y$  in der  $n$ -blättrigen Fläche  $T$  sich verhält wie eine eindeutige Function, d. h. dass jeder in der Fläche von einem Punkt zu einem anderen führende Weg, der nicht durch einen kritischen Punkt geht, auch stets denselben Endwerth der Function liefert.

Die  $n$ -blättrige Verzweigungsfläche  $T$  erläutert nun das Verhalten der Zweigfunctionen noch anschaulicher als die einfache  $x$ -Ebene. Wie schon bemerkt, ist ein jeder Punkt eines jeden Blattes nicht durch den Werth von  $x$  allein, sondern erst durch ein Werthepaar  $(x, y)$ , das der Gleichung  $F(x, y) = 0$  genügt, charakterisirt.

Hat nun für einen Punkt  $x = a$  der  $x$ -Ebene eine Zweigfunction  $y$  den Werth  $b$  (während die übrigen Zweigfunctionen beliebige, auch unter sich gleiche, nur von  $b$  verschiedene Werthe annehmen sollen) so gehört in der Fläche  $T$  das Werthepaar  $(a, b)$  einem bestimmten Punkt eines bestimmten Blattes an, in dessen Umgebung dieses Blatt völlig getrennt von den anderen Blättern verläuft. Ein solcher Punkt  $(a, b)$  soll ein einfacher Punkt der Fläche  $T$  heissen. Einem regulären Punkt  $x = a$  der  $x$ -Ebene entsprechen also in  $T$   $n$  über  $a$  liegende, einfache Punkte, in jedem Blatt ein solcher Punkt.

Haben dagegen für einen Punkt  $x = a$  der  $x$ -Ebene  $\lambda (> 1)$  Zweigfunctionen  $y$  denselben Werth  $b$  und bilden diese in der Umgebung von  $x = a$  einen einzigen Cyclus (während die übrigen Zweigfunctionen wieder beliebige, nur von  $b$  verschiedene Werthe annehmen sollen), so bezeichnet in der Fläche  $T$  das Werthepaar  $(a, b)$  gleichzeitig  $\lambda$  Punkte, die in einen Punkt zusammenfallen, in dessen Umgebung die  $\lambda$  entsprechenden Blätter schraubenförmig zusammenhängen. Ein solcher Punkt  $(a, b)$  heisst ein  $\lambda - 1$ -facher Verzweigungspunkt oder Windungspunkt der Fläche  $T$ . Ist  $\lambda = 2$ , so heisst der Punkt  $(a, b)$  ein einfacher Verzweigungspunkt der Fläche  $T$ .

Haben endlich für einen Punkt  $x = a$  der  $x$ -Ebene  $\mu (> 1)$  Zweigfunctionen  $y$  denselben Werth  $b$ , ohne in der Umgebung von  $x = a$  zusammen zu hängen (während die übrigen Zweigfunctionen beliebig, aber von  $b$  verschieden sind), so bezeichnet in der Fläche  $T$  das Werthepaar  $(a, b)$  gleichzeitig  $\mu$  Punkte, die in einen Punkt zusammenfallen, in dessen Umgebung aber die  $\mu$  entsprechenden Blätter getrennt verlaufen. Ein solcher Punkt  $(a, b)$  heisst ein  $\mu$ -facher Punkt mit getrennten Blättern der Fläche  $T$ . In einem solchen Punkte hängen die  $\mu$  Blätter nicht zusammen; um indess anzudeuten, dass in ihm den  $\mu$  Blättern derselbe Werth von  $y$  zukommt, gebrauchen wir den Ausdruck, die  $\mu$  Blätter berühren sich in dem betreffenden Punkt. Ist  $\mu = 2$ , so heisst der Punkt  $(a, b)$  ein Doppelpunkt der Fläche  $T$ .

Nach Satz V § 1 sondern sich im allgemeinsten Falle die demselben Werth  $x = a$  in der Fläche  $T$  entsprechenden  $n$  Punkte in Gruppen von Punkten  $(a, b)$ ,  $(a, b_1)$ ,  $\dots$ , deren jede gleichzeitig ein-

fache Punkte, mehrfache Punkte mit getrennten Blättern und einen oder mehrere Verzweigungspunkte von beliebiger Ordnung enthalten kann.

Die  $n$ -blättrige Fläche  $T$  erläutert ferner in einfacher Weise den Charakter der Reihenentwicklung der Zweigfunctionen  $y$  in der Umgebung der betrachteten Punkte.

Aus den Sätzen I und II § 1 folgt:

- (I) Ist  $(a, b)$  ein einfacher Punkt der Fläche  $T$ , in dem also  $y$  den endlichen Werth  $b$  hat und das zugehörige Blatt von den anderen getrennt verläuft, so besitzt die zugehörige Zweigfunction  $y$  in der Umgebung des Punktes eine für das zugehörige Blatt gültige Reihenentwicklung, die nach ganzen, positiven Potenzen von  $x - a$  fortschreitet und einen gewissen Convergenzkreis hat.

Diese Entwicklung ist also von der Form

$$y - b = \alpha(x - a) + \beta(x - a)^2 + \gamma(x - a)^3 + \dots \quad (3)$$

Hier können von den Coefficienten  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$  auch etliche in endlicher Zahl verschwinden. Ist  $(a, b_1)$  ein zweiter einfacher Punkt, der über dem ersteren in einem anderen Blatte liegt, so gilt für die zugehörige Zweigfunction und für das Blatt eine Entwicklung von derselben Form (3), nur mit anderen Coefficienten  $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \dots$  und im Allgemeinen mit anderem Convergenzkreis.

Ist  $(a, \infty)$  ein einfacher Punkt, in dem nur eine Zweigfunction unendlich wird, während die übrigen endlich sind, so gilt für diese Zweigfunction eine Entwicklung, die neben ganzzahligen Potenzen von  $x - a$  mit positiven noch solche mit negativen Exponenten in endlicher Zahl enthält.

- (II) Ist  $(a, b)$  in  $T$  ein  $\mu$ -facher Punkt ohne Verzweigung, in dem also  $\mu$  Zweigfunctionen  $y$  denselben Werth  $b$  haben und die  $\mu$  zugehörigen Blätter sich ohne zusammen zu hängen berühren, so besitzt jede dieser  $\mu$  Zweigfunctionen in der Umgebung des Punktes eine besondere, für das ihr zugehörige Blatt gültige Reihenentwicklung, die nach ganzen Potenzen von  $x - a$  fortschreitet und einen besonderen Convergenzkreis hat.

Diese Entwicklungen sind also von der Form

$$y - b = \alpha_i(x - a) + \beta_i(x - a)^2 + \gamma_i(x - a)^3 + \dots \quad (i = 1, 2, \dots, \mu). \quad (4)$$

Auch hier können die Coefficienten  $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \dots$  in endlicher Zahl verschwinden. Sind die  $\mu$  in  $a$  gleichen Zweigfunctionen unendlich, so

treten in den  $\mu$  zugehörigen Reihenentwicklungen neben den Potenzen mit positiven auch solche mit negativen Exponenten in endlicher Zahl auf.

Anders beschaffen sind die Reihenentwicklungen in der Umgebung eines Verzweigungspunktes; hier gilt der Satz<sup>1)</sup>:

(III) Ist  $(a, b)$  ein  $\lambda - 1$ -facher Verzweigungspunkt der Fläche  $T$ , in dem  $\lambda$  Zweigfunctionen  $y$  denselben Werth  $b$  haben und die  $\lambda$  zugehörigen Blätter schraubenförmig zusammenhängen, so besitzen diese  $\lambda$  Zweigfunctionen in der Umgebung des Punktes eine gemeinsame, für alle  $\lambda$  Blätter gültige Reihenentwicklung, die nach ganzen, positiven Potenzen von  $(x - a)^{\frac{1}{\lambda}}$  fortschreitet und einen gewissen Convergenzkreis hat.

Zum Beweise benutzt man die Vorstellung eines Verzweigungspunktes als Windungspunkt der Fläche  $T$ . Man führe statt  $x$  eine neue Variable  $\xi$  ein durch die Substitution  $x - a = \xi^\lambda$ , wodurch

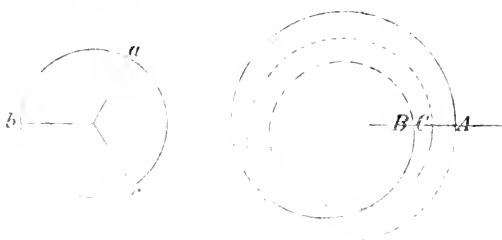


Fig. 1.

$$y = f(x) = f(a + \xi^\lambda) = \varphi(\xi)$$

wird. Um zu untersuchen, wie sich  $\varphi(\xi)$  in der Umgebung des Punktes  $\xi = 0$  einer  $\xi$ -Ebene verhält, bilde man die  $\lambda$  im Punkt  $(a, b)$  zusammenhängenden Blätter

der Verzweigungsfläche  $T$  durch die angegebene Substitution auf die  $\xi$ -Ebene ab. (Fig. 1, wo  $\lambda = 3$ .) Zu diesem Zwecke setze man

$$x - a = r(\cos \varphi + i \sin \varphi),$$

so dass

$$\xi = r^{\frac{1}{\lambda}} \left( \cos \frac{\varphi}{\lambda} + i \sin \frac{\varphi}{\lambda} \right)$$

wird. Lässt man nun den Punkt  $(x, y)$  in der Verzweigungsfläche  $T$  eine geschlossene Curve um  $(a, b)$  beschreiben, die sich aus  $\lambda$  über einander liegenden kreisförmigen Umläufen um  $(a, b)$  vom Radius  $r$  zusammensetzt, so bleibt längs derselben  $r$ , also auch  $r^{\frac{1}{\lambda}}$  constant und es beschreibt folglich auch  $\xi$  einen Kreis um den Punkt  $\xi = 0$  der  $\xi$ -Ebene vom Radius  $r^{\frac{1}{\lambda}}$ . Dabei wächst bei jedem Umlauf von

1) Riemann, Ges. W. S. 25 ff.



$(x, y)$   $\varphi$  um  $2\pi$ , also  $\frac{\varphi}{\lambda}$  um  $\frac{2\pi}{\lambda}$ , oder den  $\lambda$  Kreisflächen von  $T$ , die der Radius  $r$  während des Umlaufs um  $(a, b)$  überstreicht, entsprechen in der  $\xi$ -Ebene  $\lambda$  Kreissectoren vom Centriwinkel  $\frac{2\pi}{\lambda}$ .

Während also  $(x, y)$  nach  $\lambda$  Umläufen, kehrt  $\xi$  schon nach einem Umlauf zu seinem Ausgangspunkt zurück. Da hiernach  $\xi$  nicht aus seinem Blatt herantritt, hat die Function  $y = \varphi(\xi)$  in  $\xi = 0$  keinen Verzweigungspunkt, sie ist vielmehr in der Umgebung von  $\xi = 0$  eindeutig und entwickelbar nach ganzen Potenzen von  $\xi$ . Hieraus folgt aber für  $y = f(x)$  eine Entwicklung, die in der Umgebung von  $(a, b)$  für die  $\lambda$  Zweigfunctionen  $y$  gemeinsam gilt und von der Form ist

$$y - b = \alpha_1(x - a)^{\frac{1}{\lambda}} + \alpha_2(x - a)^{\frac{2}{\lambda}} + \dots \quad (5)$$

Man kann auch leicht die Entwicklung von  $y$  in jedem der  $\lambda$  in  $(a, b)$  zusammenhängenden Blätter angeben. Setzt man  $e^{\frac{2i\pi}{\lambda}} = \varepsilon$  und berücksichtigt, dass bei jedem Umlaufen von  $(a, b)$   $(x - a)^{\frac{1}{\lambda}}$  in  $\varepsilon(x - a)^{\frac{1}{\lambda}}$  übergeht, so erhält man, wenn (5) den Werth von  $y$  in einem Punkte des ersten der  $\lambda$  Blätter darstellt, den Werth  $y_1$  von  $y$  in dem entsprechenden Punkte  $x = a$  des zweiten Blattes aus

$$y_1 - b = \varepsilon \alpha_1(x - a)^{\frac{1}{\lambda}} + \varepsilon^2 \alpha_2(x - a)^{\frac{2}{\lambda}} + \dots$$

und den Werth  $y_2$  von  $y$  in dem entsprechenden Punkte  $x = a$  des dritten Blattes aus

$$y_2 - b = \varepsilon^2 \alpha_1(x - a)^{\frac{1}{\lambda}} + \varepsilon^4 \alpha_2(x - a)^{\frac{2}{\lambda}} + \dots \quad \text{u. s. f.}$$

Auch hier können die Coefficienten  $\alpha_1, \alpha_2, \dots$  in endlicher Zahl verschwinden; aber die Entwicklung beginnt in jedem der  $\lambda$  Blätter mit derselben ganzzahligen Potenz von  $(x - a)^{\frac{1}{\lambda}}$ .

Haben die  $\lambda$  Zweigfunctionen  $y$  für  $x = a$  den Werth  $\infty$ , so treten auf der rechten Seite in (5) noch Glieder auf, die ganzzahlige Potenzen von  $(x - a)^{\frac{1}{\lambda}}$  mit negativen Exponenten in endlicher Anzahl enthalten.

Fasst man das Vorstehende zusammen, so kann man den Satz (V) § 1 über die Beschaffenheit des allgemeinsten, kritischen Punktes auch so aussprechen:

(IV) Die über einem kritischen Punkte  $x = a$  der  $x$ -Ebene liegenden  $n$  Punkte der Verzweigungsfläche  $T$  treten

gruppenweise zusammen in Punkte  $(a, b)$ ,  $(a, b_1)$ , ... Die durch einen solchen Punkt, z. B.  $(a, b)$  gehenden Blätter der Fläche trennen sich wieder in solche, die in der Umgebung des Punktes unverzweigt oder getrennt verlaufen und in solche, die einen oder mehrere Cyclen bilden. Die zugehörigen Reihenentwicklungen der Function  $y$  sind in den Formen (3), (4), (5), enthalten.

Es ist zweckmässig und besonders für Abzählungen vereinfachend, mit Riemann<sup>1)</sup> folgende Ausdrucksweise einzuführen.

Ist  $(a, b)$  ein einfacher Punkt im Endlichen von  $T$ , so soll in diesem Punkte für das zugehörige Blatt die Grösse  $x - a$  als unendlich klein von der Ordnung 1 oder durch  $0^1$ , die Grösse  $(x - a)^{-1}$  als unendlich gross von der Ordnung 1 oder durch  $\infty^1$  bezeichnet sein, also z. B.  $(x - a)^u = 0^u$  und  $(x - a)^{-u} = \infty^u$  gesetzt werden. Liegt der einfache Punkt im Unendlichen von  $T$ , so soll in ihm  $x = \infty^1$  und  $x^{-1} = 0^1$  gesetzt werden.

Ist  $(a, b)$  ein  $\mu$ -facher Punkt mit getrennten Blättern im Endlichen von  $T$ , so soll in diesem Punkte für jedes der  $\mu$  in ihm sich berührenden Blätter die Grösse  $x - a = 0^1$  und  $(x - a)^{-1} = \infty^1$  gesetzt werden. Liegt der  $\mu$ -fache Punkt im Unendlichen von  $T$ , so soll in ihm für jedes der  $\mu$  Blätter  $x = \infty^1$  und  $x^{-1} = 0^1$  sein.

Ist  $(a, b)$  ein  $\lambda - 1$ -facher Verzweigungspunkt im Endlichen von  $T$ , so soll in diesem Punkt für die  $\lambda$  in ihm zusammenhängenden Blätter  $(x - a)^{\frac{1}{\lambda}} = 0^1$  und  $(x - a)^{-\frac{1}{\lambda}} = \infty^1$  gesetzt werden. Liegt der  $\lambda - 1$ -fache Verzweigungspunkt im Unendlichen von  $T$ , so soll in ihm  $x^{\frac{1}{\lambda}} = \infty^1$  und  $x^{-\frac{1}{\lambda}} = 0^1$  gesetzt werden.

Wir erwähnen hier noch einer geometrischen Vorstellung, die für die Erläuterung von analytischen Operationen von Interesse ist. Zu dem Zwecke unterscheiden wir verschiedene Arten von mehrfachen Punkten oder Verzweigungspunkten.

Ein  $\mu$ -facher Punkt  $(a, b)$  mit getrennten Zweigen möge, wenn die  $\mu$  Entwicklungen (4) von  $y - b$  sämmtlich mit dem Gliede  $(x - a)^1$  beginnen, ein  $\mu$ -facher Punkt erster Art, andernfalls ein  $\mu$ -facher Punkt höherer Art heissen.

Ein  $\lambda - 1$ -facher Verzweigungspunkt  $(a, b)$  möge, wenn die Entwicklung (5) von  $y - b$  mit dem Gliede  $(x - a)^{\frac{1}{\lambda}}$  beginnt, ein  $\lambda - 1$ -facher Verzweigungspunkt erster Art, andernfalls ein  $\lambda - 1$ -facher Verzweigungspunkt höherer Art heissen.

1) Riemann, Ges. W. S 96.

Wir zeigen an zwei Beispielen, wie sich singuläre Punkte erzeugen lassen durch einen Grenzübergang, indem man nämlich einfache Verzweigungspunkte zusammenrücken lässt, was einer Variation der Coefficienten in  $F(x, y) = 0$  entspricht.

- (V) 1. Ein  $\lambda - 1$ -facher Verzweigungspunkt 1. Art entsteht durch Zusammenfallen von  $\lambda - 1$  einfachen Verzweigungspunkten 1. Art von gewisser Lage. (Fig. 2, wo  $\lambda = 4$ .)

Zum Beweise betrachten wir  $\lambda$  Blätter  $B_1, \dots, B_\lambda$  und  $\lambda - 1$  einfache Verzweigungspunkte 1. Art  $\xi_1, \dots, \xi_{\lambda-1}$ . Längs den von den letzteren ausgehenden Verzweigungsschnitten  $S_1, \dots, S_{\lambda-1}$  mögen bez. die Blätterpaare  $B_1$  und  $B_\lambda, B_2$  und  $B_\lambda, \dots, B_{\lambda-1}$  und  $B_\lambda$  zusammenhängen. Die Punkte  $\xi$  sollen so nahe zusammenliegen und die Linien  $S$  eine solche Lage haben, dass ein alle Punkte  $\xi$  umschliessender und keinen anderen Verzweigungspunkt einschliessender Kreis der Reihe nach die Linien  $S_1, S_2, \dots, S_{\lambda-1}$  trifft. Geht man von einem im Blatt  $B_1$  auf dem Kreise liegenden Punkt aus, so führt ein einmaliges Durchlaufen des Kreises in das Blatt  $B_2$ , da man an dem Verzweigungsschnitt  $S_1$  aus  $B_1$  nach  $B_\lambda$ , an  $S_2$  aus  $B_\lambda$  nach  $B_2$  kommt und an den übrigen Verzweigungsschnitten stets in  $B_2$  bleibt. So ist ersichtlich, dass ein einmaliges Durchlaufen des Kreises aus den Blättern  $B_1, B_2, \dots, B_{\lambda-1}, B_\lambda$  bez. in die Blätter  $B_2, B_3, \dots, B_\lambda, B_1$  führt, also erst ein  $\lambda$ -maliges Durchlaufen des Kreises in das ursprüngliche Blatt zurückführt. Lässt man daher die  $\lambda - 1$  Punkte  $\xi_i$  in einen Punkt  $\Xi$  zusammenfallen, so zeigt dieser Punkt das nämliche Verhalten wie ein  $\lambda - 1$ -facher Verzweigungspunkt. Der Punkt  $\Xi$  absorbiert, wie man auch sagt,  $\lambda - 1$  einfache Verzweigungspunkte. Dass  $\Xi$  ein Verzweigungspunkt 1. Art ist, folgt später analytisch aus dem Satze (II) § 5.

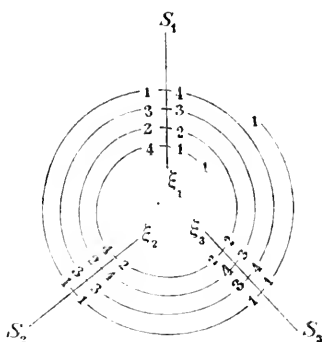


Fig. 2.

- (VI) 2. Ein  $\mu$ -facher Punkt 1. Art entsteht durch Zusammenfallen von  $\mu(\mu - 1)$  einfachen Verzweigungspunkten 1. Art von gewisser Lage. (Fig. 3, wo  $\mu = 3$ .)

Wir betrachten  $\mu$  Blätter  $B_1, \dots, B_\mu$  und  $\frac{1}{2}\mu(\mu - 1)$  Paare von einfachen Verzweigungspunkten 1. Art. Es sei  $\xi_{ik}$  und  $\xi_{ki}$  ein solches Paar, es seien  $S_{ik}$  und  $S_{ki}$  die bez. von  $\xi_{ik}$  und  $\xi_{ki}$  ausgehenden Verzweigungsschnitte und es mögen sowohl längs  $S_{ik}$  wie längs  $S_{ki}$

die Blätter  $B_i$  und  $B_k$  zusammenhängen. Die genannten Punkte  $\xi$  sollen ferner so nahe zusammenliegen und die zugehörigen Linien  $S$  eine solche Lage haben, dass ein alle  $\xi$  umschliessender und keinen anderen Verzweigungspunkt einschliessender Kreis der Reihe nach alle Linien  $S$  trifft und zwar jedes-mal unmittelbar nach der Linie  $S_{ik}$  die Linie  $S_{ki}$ . Geht man von einem im Blatt  $B_1$  auf dem Kreise liegenden Punkt aus, so kommt man nach einmaligem Durchlaufen des Kreises, wie leicht zu sehen, wieder in denselben Punkt des Blattes  $B_1$  zurück. Dasselbe gilt von jedem der  $\mu$  Blätter. Lässt man daher die  $\mu(\mu - 1)$  Punkte  $\xi$  zusammenrücken, so zeigt der entstehende Punkt  $\Xi$  dasselbe Verhalten, wie ein  $\mu$ -facher Punkt mit getrennten Blättern. Lässt man, bevor alle Punkte  $\xi$  zusammenfallen, zunächst nur je ein Paar  $\xi_{ik}$



Fig. 3.

und  $\xi_{ki}$  ( $i, k = 1, \dots, \mu$ ) sich vereinigen, so entstehen  $\frac{1}{2}\mu(\mu - 1)$  Doppelpunkte (S. 20) und durch Zusammenrücken dieser Doppelpunkte ebenfalls der Punkt  $\Xi$ . Dieser Punkt absorbiert also  $\mu(\mu - 1)$  einfache Verzweigungspunkte oder  $\frac{1}{2}\mu(\mu - 1)$  Doppelpunkte. Dass  $\Xi$  ein  $\mu$ -facher Punkt 1. Art ist, ergibt sich analytisch durch die Abzählungen des Satzes (III) § 5.

Die Sätze 1. und 2. beziehen sich auf Verzweigungspunkte und mehrfache Punkte 1. Art. In ähnlicher Weise lässt sich jeder Verzweigungspunkt oder mehrfache Punkt höherer Art auffassen als entstanden durch Zusammenfallen einer Anzahl von einfachen Verzweigungspunkten 1. Art, welche verschiedene Blattpaare verbinden. Um wenigstens ein Beispiel von Punkten höherer Art zu geben, sei  $(a, b)$  ein einfacher Verzweigungspunkt, für den die Entwicklung von  $y$  nach Potenzen von  $(x - a)^{\frac{1}{2}}$  mit dem Gliede  $x - a$  beginnt, also lautet<sup>1)</sup>:

$$(6) \quad y - b = \alpha_2(x - a) + \alpha_3(x - a)^{\frac{3}{2}} + \dots$$

Wie eine geometrische Betrachtung ähnlich der obigen und eine Abzählung ähnlich der in § 5 zeigt, entsteht ein solcher Punkt durch Zusammenfallen von drei einfachen Verzweigungspunkten 1. Art,

1) Man kann den Punkt einen Rückkehrpunkt der Fläche  $T$  nennen (vgl. § 5).

welche dieselben zwei Blätter von  $T$  verbinden. Dabei vereinigen sich zwei der drei Punkte zu einem Doppelpunkt (ihre Verzweigung hebt sich auf nach Riemann's Ausdruck<sup>1)</sup>), der dritte bleibt als Vereinigungspunkt erhalten.

Für spätere Untersuchungen ist noch eine wichtige Frage zu erledigen. Die im Vorigen construirte  $n$ -blättrige Verzweigungsfläche  $T$  ist mehrfach zusammenhängend, kann aber durch Querschnitte in eine einfach zusammenhängende Fläche verwandelt werden. Es bleibt also die Zahl und Lage dieser Querschnitte zu untersuchen. Wir erinnern an die folgenden Erklärungen und Sätze der allgemeinen Functionentheorie<sup>2)</sup>.

Eine beliebig im Raum gelegene Fläche heisst einfach zusammenhängend, wenn in ihr jede geschlossene Linie für sich allein die vollständige Begrenzung eines Flächentheiles bildet; eine solche Fläche ist immer von einer einzigen Linie begrenzt.

Eine Fläche heisst mehrfach zusammenhängend, wenn es in ihr geschlossene Linien gibt, die nicht für sich allein, sondern nur im Verein mit Randcurven der Fläche die vollständige Begrenzung eines Flächentheiles bilden. Das einfachste Beispiel einer einfach zusammenhängenden Fläche ist etwa eine Kreisfläche, das einer mehrfach zusammenhängenden Fläche eine an mehreren Stellen durchlöcherter Kreisfläche.

Querschnitt der Fläche heisst ein Schnitt, der von einem Randpunkt der Fläche durch das Innere zu einem anderen Randpunkt der Fläche führt, ohne dazwischen den Rand der Fläche zu berühren oder zu überschreiten.

Rückkehrschnitt der Fläche heisst ein in sich zurücklaufender Schnitt, der den Rand der Fläche nirgends berührt oder überschreitet und sich selber nirgends durchkreuzt.

Werden mehrere Querschnitte und Rückkehrschnitte nach einander gelegt, so sind jedesmal, nachdem ein solcher Schnitt gelegt ist, seine beiden Ränder mit zur Begrenzung zu nehmen.

Eine mehrfach zusammenhängende Fläche  $A$  lässt sich stets auf verschiedene Arten durch Querschnitte in eine einfach zusammenhängende Fläche  $A'$  verwandeln; dabei gilt der Satz:

Für alle diese Verwandlungen ist die Zahl der Querschnitte die gleiche. Ist diese Zahl  $= m$ , so heisst die

1) Riemann, Ges. W. S. 104 u. 105.

2) Riemann, Ges. W. S. 85 ff. Das Folgende schliesst sich an C. Neumann, Vorl. über Riemann's Theoris etc. S. 146 ff. an.

Fläche  $m + 1$ -fach zusammenhängend und  $m + 1$  die Grundzahl der Fläche.

Man kann dies verallgemeinern. Ein aus beliebig vielen, mehrfach zusammenhängenden Flächen bestehendes System  $S$  lässt sich stets auf verschiedene Arten durch Querschnitte in ein aus lauter einfach zusammenhängenden Flächen bestehendes System  $S'$  verwandeln; dabei gilt der Satz:

Für alle diese Verwandlungen von  $S$  ist die Differenz  $m - \alpha$  zwischen der jedesmaligen Anzahl  $m$  der Querschnitte und der jedesmaligen Zahl  $\alpha$  der einfach zusammenhängenden Flächenstücke von  $S'$  die gleiche. Die Zahl  $m - \alpha + 2$  heisst die Grundzahl des Flächensystemes  $S$ .

Die Grundzahl einer Fläche oder eines Systems von Flächen ändert sich nicht, wenn man beliebige Rückkehrschnitte hinzufügt oder wegnimmt; sie ändert sich auch nicht bei stetiger Deformation der Fläche (d. h. Dehnung und Biegung ohne Zerreissung oder Zusammenfaltung), da hierbei jeder Querschnitt und Rückkehrschnitt als solcher erhalten bleibt.

Ist eine mehrfach zusammenhängende Fläche  $A$  geschlossen d. h. ohne Begrenzung, wie z. B. die Oberfläche einer Kugel oder eines Ringes, so macht man dieselbe zunächst durch Punktirung d. h. Auscheidung eines beliebigen Punktes (oder kleinen Kreises) zu einer begrenzten Fläche  $A$  (punktirte Fläche). Die weitere Verwandlung in eine einfach zusammenhängende Fläche geschieht so, dass der erste Querschnitt ein von diesem Begrenzungspunkt ausgehender und in ihn zurückkehrender Schnitt ist, der hier nicht als Rückkehrschnitt zu betrachten ist. Die Zahl der Querschnitte, die erforderlich ist, eine geschlossene Fläche in eine einfach zusammenhängende Fläche zu verwandeln, ist stets gerade. Denn die Begrenzung einer einfach zusammenhängenden Fläche besteht aus einer Linie; die geschlossene Fläche aber erhält durch eine ungerade Anzahl von Querschnitten eine gerade Zahl von Grenzlinien, durch eine gerade Anzahl von Querschnitten eine ungerade Zahl von Grenzlinien. Eine Ringfläche z. B. wird durch zwei Querschnitte (etwa eine Meridianlinie und einen Parallelkreis), eine an vier Stellen durchlöcherter Ringfläche durch fünf Querschnitte in eine einfach zusammenhängende Fläche verwandelt (im letzten Falle findet keine Punktirung statt).

Die Anwendung dieser Sätze auf die  $n$ -blättrige, kugelförmige Verzweigungsfläche  $T$  ergibt Folgendes. Da  $T$  eine geschlossene Fläche ist, so ist die Zahl der Querschnitte, die  $T$  in eine einfach

zusammenhängende Fläche verwandelt, eine gerade Zahl  $= 2p$  oder die Grundzahl der Fläche ist  $= 2p + 1$ . Die Zahl  $p$  ist von fundamentaler Bedeutung und heisst das Geschlecht der Gleichung  $F(x, y) = 0$ . Um sie zu bestimmen (Fig. 4), nehmen wir an,  $T$  habe im Ganzen  $\varrho$  verschiedene Verzweigungs- oder Windungspunkte  $\xi_1, \dots, \xi_\varrho$  bez. von der Ordnung  $\lambda_1, \dots, \lambda_\varrho$  und denken uns durch stetige Umformung der Fläche diese Punkte derart verschoben, dass nirgends zwei solcher Punkte übereinander liegen. Wir bilden aus  $T$  eine punktierte Fläche  $\tilde{T}$  und führen in  $T$  zwei kreisförmige und  $\varrho$  geradlinige (eigentlich bogenförmige) also im Ganzen  $\varrho + 2$  Schnitte, von denen jeder die sämtlichen  $n$  Blätter durchdringt. Durch die zwei Kreisschnitte werde  $T$  in einen gürtelförmigen Theil  $G$ , der sämtliche Verzweigungspunkte enthält, und in zwei äussere, calottenförmige Theile  $C$  und  $C'$  zerlegt. Durch die  $\varrho$  geradlinigen Schnitte, von denen jeder einen Punkt von  $C$  mit einem Punkte von  $C'$  verbindet, werde der Theil  $G$  in  $\varrho$  Theile  $G_1, \dots, G_\varrho$  zerlegt, deren jeder nur je einen der  $\varrho$  Vereinigungspunkte  $\xi_1, \dots, \xi_\varrho$  enthält, der Theil  $G_i$  etwa den Punkt  $\xi_i$ . Die Calotte  $C$  (und ebenso  $C'$ ) besteht aus  $n$  getrennten, einfach zusammenhängenden Flächenstücken, die Fläche  $G_i$  aus  $n - \lambda_i$  einblättrigen Stücken und einer  $\lambda_i$ -blättrigen Windungsfläche, im Ganzen also aus  $n - \lambda_i + 1$  einfach zusammenhängenden Stücken (da die  $\lambda_i$ -blättrige Windungsfläche durch stetige Deformation einfach zusammenhängend gemacht werden kann).

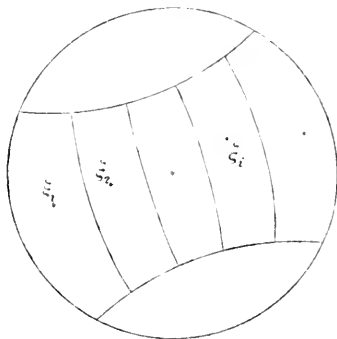


Fig. 4.

Durch die  $\varrho + 2$  Schnitte wird die Fläche  $T$  im Ganzen in

$$\alpha = 2n + \sum_i (n - \lambda_i + 1) = 2n + \varrho n - \sum_i (\lambda_i - 1) \quad (i = 1, \dots, \varrho)$$

einzelne und einfach zusammenhängende Stücke verwandelt. Die  $\varrho + 2$  Schnitte repräsentiren aber, da sie alle  $n$  Blätter durchdringen, im Ganzen  $m = \varrho n + 1$  Querschnitte und  $2n - 1$  Rückkehrschnitte. Denn von den  $2n$  kreisförmigen Schnitten ist einer (der durch die punktierte Stelle gehende) als Querschnitt, die anderen sind als Rückkehrschnitte anzusehen. Die  $\varrho n$  geradlinigen Schnitte aber sind sämtlich Querschnitte. Aus den Zahlen  $m$  und  $\alpha$  erhält man die Grundzahl der Fläche  $T$ , nämlich  $2p + 1 = m - \alpha + 2$ ; man findet

$$2p = \sum_i (\lambda_i - 1) - 2n + 2 \quad (i = 1, \dots, \varrho). \quad (7)$$

Sind sämtliche  $\varrho$  Verzweigungspunkte einfach, oder ist  $\lambda_i = 2$  ( $i = 1, \dots, \varrho$ ) und ist die Zahl der einfachen Verzweigungspunkte  $= \omega$ , so hat man

$$(8) \quad 2p = \omega - 2n + 2.^1)$$

Hiernach hat man den Satz:

(VII) Die  $n$ -blättrige Verzweigungsfläche  $T$  wird durch  $2p$  Querschnitte in eine einfach zusammenhängende Fläche  $T'$  verwandelt. Die Zahl  $p$ , das Geschlecht der Gleichung  $F(x, y) = 0$ , ist bestimmt durch die Gleichung (7), in der  $\varrho$  die Zahl der Verzweigungspunkte in  $T$  und  $\lambda_1, \dots, \lambda_\varrho$  die Ordnungszahlen dieser Punkte bedeuten.

Nachdem die Zahl  $2p$  der Querschnitte, die  $T$  in eine einfach zusammenhängende Fläche verwandeln, ermittelt ist, bleibt noch die Lage der Querschnitte zu untersuchen; diese kann in mannigfacher Weise gewählt werden. Besonders wichtig ist folgende, von Riemann<sup>2)</sup> angegebene, übersichtliche und symmetrische Anordnung. Man lege zunächst einen in sich zurückkehrenden Schnitt  $a_1$ , durch den die Fläche nicht in getrennte Stücke zerfällt. Dann besteht die Begrenzung der Fläche aus zwei getrennten Linien, nämlich den beiden Rändern von  $a_1$ . Nun lege man einen zweiten Schnitt  $b_1$ , der von einem Punkte des ersten Randes von  $a_1$  nach dem gegenüberliegenden Punkte des zweiten Randes von  $a_1$  führt. Dann besteht die Begrenzung der Fläche aus einer einzigen Linie, nämlich den beiden Rändern des Paares  $(a_1, b_1)$ . Ist die Fläche noch nicht einfach zusammenhängend (also nicht  $p = 1$ ), so ziehe man ein zweites Paar von Schnitten in derselben Weise  $(a_2, b_2)$  und stelle die Verbindung zwischen den beiden Querschnittpaaren  $(a_1, b_1)$  und  $(a_2, b_2)$  her durch zwei Schnitte  $c_1$  und  $c_2$ , die von einem beliebig gewählten Punkt  $O$  der Fläche nach dem Kreuzungspunkt des Paares  $(a_1, b_1)$  und dem des Paares  $(a_2, b_2)$  führen. Nun besteht die Begrenzung der Fläche wieder aus einer einzigen Linie. Führt man so fort, bis man schliesslich  $p$  Paare  $(a_i, b_i)$  und  $p$  einzelne Schnitte  $c_i$  hat, so ist die Fläche in eine einfach zusammenhängende verwandelt. Die Schnitte  $c_i$ , welche die Paare  $(a_i, b_i)$  mit einem und demselben Punkte  $O$  der Fläche verbinden, können beliebig zu  $a_i$  oder zu  $b_i$  gerechnet werden, so dass man in Wirklichkeit nur  $2p$  Querschnitte hat. Die Linien

1) Riemann, Ges. W. S. 107 mit anderem Beweis. Einen dem obigen verwandten, geometrischen Beweis der Gleichung (8) gibt Riemann in seiner Vorlesung (Sommer 1861, s. Vorwort).

2) Riemann, Ges. W. S. 97.



$c_i$  sind bei den meisten späteren Untersuchungen unwesentlich. Das System der  $p$  Querschnitte  $(a_i, b_i)$  und der  $p$  Schnitte  $c_i$  heisst ein kanonisches Querschnittssystem. Ein solches zeigt Fig. 5 (am Ende von § 3) für eine besondere Form der Fläche  $T$ . Es ist später (§ 38) die Frage zu behandeln, wie man verschiedene kanonische Querschnittssysteme der Fläche in einander überführen kann.

### §. 3. Normalform der Verzweigungsfläche.<sup>1)</sup>

Wir machen jetzt die Voraussetzung, dass von Verzweigungspunkten nur einfache auftreten, in denen also nur je zwei Blätter zusammenhängen, während die mehrfachen Punkte ohne Verzweigung beliebig seien. Alsdann lässt sich die Fläche  $T$  in eine besonders übersichtliche Normalform bringen, die sich eng an die bekannte Verzweigungsfläche der hyperelliptischen Functionen anschliesst und den späteren Untersuchungen zu Grunde gelegt werden soll. Um diese Form zu erhalten, geht man von irgend einer Gestalt aus, welche die Verzweigungsfläche mit einfachen Verzweigungspunkten nach § 2 annehmen kann, und verfolgt die Abänderungen, die sich mit ihr vornehmen lassen.

In § 2 wurde gezeigt, dass die Verbindung der Blätter abhängt von der Reihenfolge, in welcher man eine sich nicht schneidende Curve  $C$  die Verzweigungspunkte treffen lässt. Es ist also die Veränderung zu untersuchen, welche die Fläche bei einer Umordnung der Verzweigungspunkte oder einer Veränderung der Curve  $C$  erfährt. Die Zahl der Verzweigungspunkte sei  $\omega$  und die Punkte selber in der Ordnung, in der sie ursprünglich von  $C$  getroffen werden, seien  $\xi_1, \dots, \xi_{i-1}, \xi_i, \xi_{i+1}, \dots, \xi_\omega$ . Durch jeden Verzweigungspunkt  $\xi_i$  und die zugehörige Schleife  $s_i$  werden zwei bestimmte Zweige oder Blätter einander zugeordnet. Da eine Aenderung in der Ordnung der Verzweigungspunkte  $\xi$  immer auf eine wiederholte Vertauschung von zwei aufeinanderfolgenden Verzweigungspunkten hinauskommt, so vertausche man (Fig. 5)  $\xi_i$  und  $\xi_{i+1}$ , so dass die neue Anordnung der Verzweigungspunkte lautet  $\xi_1, \dots, \xi_{i-1}, \xi_{i+1}, \xi_i, \xi_{i+2}, \dots, \xi_\omega$ . Dabei bleiben

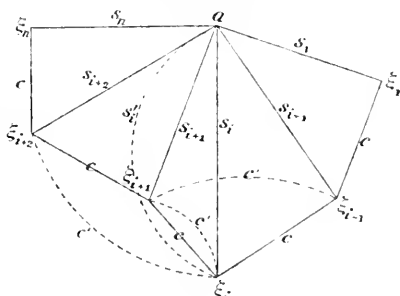


Fig. 5.

1) Lüroth, Math. Ann. IV. S. 181 (1871) für einfache Verzweigungspunkte; Münch. Abh. Bd. 15. S. 329 ff. (1885) für beliebige Verzweigungspunkte. Clebsch, Math. Ann. VI. S. 216 (1872).

die Schleifen nach den Punkten  $\xi_1, \dots, \xi_{i-1}, \xi_{i+1}, \dots, \xi_\infty$  und die Verbindung der Blätter durch dieselben ungeändert. Nur die Schleife  $s_i$  nach dem Punkt  $\xi_i$  geht über in eine neue Schleife  $s'_i$ , die über den Punkt  $\xi_{i+1}$  hindübergeschoben ist, so dass  $s'_i$  mit  $s_i$  den Verzweigungs-

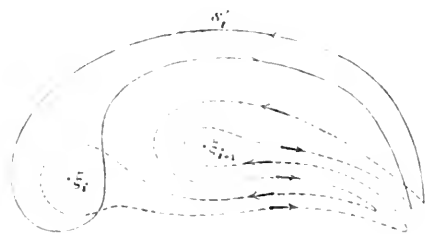


Fig. 6.

punkt  $\xi_{i+1}$ , aber keinen anderen Verzweigungspunkt einschliesst. In Fig. 5 sind die neue Schleife  $s'_i$  und die veränderten Theile  $C'$  der Linie  $C$  durch punktirte Linien bezeichnet. Um die durch die Schleife  $s'_i$  im Punkt  $\xi_i$  verbundenen Zweige zu bestimmen, löse man dieselbe

auf in die drei Schleifen  $s_{i+1}, s_i$  und abermals  $s_{i+1}$ , welche in der in Fig. 6 durch die Pfeile angegebenen Weise zu durchlaufen sind.

Hierbei sind drei Fälle zu unterscheiden:

- 1) Verbindet  $s_i$  die Zweige  $(y_p, y_i)$  und  $s_{i+1}$  die Zweige  $(y_r, y_t)$ , so verbindet der neue Weg  $s'_i$  die Zweige  $(y_p, y_q)$ . Denn beginnt man mit  $y_p$ , so führt der erste der drei Wege  $s_{i+1}$   $y_p$  wieder in  $y_p$ , der zweite  $s_i$   $y_p$  in  $y_q$ , der dritte  $s_{i+1}$   $y_q$  wieder in  $y_q$  über. Beginnt man mit  $y_q$ , so gelangt man entsprechend zu  $y_p$ . Beginnt man dagegen mit  $y_r$  (oder  $y_t$ ), so gelangt man wieder zu  $y_r$  (oder  $y_t$ ). In derselben Weise ergibt sich:
- 2) Verbinden  $s_i$  und  $s_{i+1}$  dieselben Zweige  $(y_r, y_q)$ , so verbindet auch  $s'_i$  die Zweige  $(y_p, y_q)$ .
- 3) Verbindet  $s_i$  die Zweige  $(y_p, y_q)$ ,  $s_{i+1}$  die Zweige  $(y_q, y_r)$ , so verbindet  $s'_i$  die Zweige  $(y_p, y_r)$ .

Haben also die zwei Verzweigungspunkte  $\xi_i$  und  $\xi_{i+1}$  einen Zweig  $y_q$  gemein und zieht man  $\xi_{i+1}$  vor  $\xi_i$ , so verbindet die neue Schleife  $s'_i$  die nicht gemeinsamen Zweige  $y_p$  und  $y_r$  oder es vertauscht sich in dem übersprungenen Punkt  $\xi_i$  der Zweig  $y_q$  mit  $y_r$ . Durch Wiederholung dieses Verfahrens erhält man den Satz:

- (I) Zieht man einen Verzweigungspunkt, der die Blätter  $(q, r)$  verband, vor andere Verzweigungspunkte, so vertauscht sich in allen übersprungenen Punkten, welche eins der Blätter  $q$  oder  $r$  enthalten, das Blatt  $q$  mit dem Blatt  $r$ .

Fasst man nun bei der ursprünglichen Anordnung alle Verzweigungspunkte, welche dieselben zwei Blätter  $i$  und  $k$  verbinden, zu einer Gruppe  $G_{ik}$  zusammen, so gilt für diese Gruppen der Satz:

(II) Die Curve  $C$  lässt sich so verändern, dass sie der Reihe nach die Punkte der Gruppen

$$G_{12}, G_{13}, \dots, G_{1n}, G_{23}, \dots, G_{2n}, \dots, G_{n-1,n} \quad (1)$$

trifft. Von diesen Gruppen können selbstverständlich einzelne fehlen.

Es ist nur zu zeigen, dass man die  $n - 1$  ersten Gruppen in (1) vorziehen kann, so dass hinter ihnen kein Verzweigungspunkt mit dem Index 1 mehr auftritt. In derselben Weise lässt sich offenbar der Rest behandeln. Zunächst kann man die Gruppen  $G_{ik}$  so anordnen, dass die  $n - 1$  ersten Gruppen immer das erste Blatt mit einem beliebigen anderen verbinden, während die übrigen Gruppen den Index 1 nicht mehr enthalten. Wenn nämlich bei der ursprünglichen Anordnung zu Anfang Verzweigungspunkte stehen, die das erste Blatt, am Ende aber solche, die nur andere Blätter enthalten, so ist nur noch die zwischen ihnen befindliche Reihe von Punkten umzuordnen. Zu diesem Zweck ziehe man in der noch umzuordnenden Reihe den letzten noch dem Blatt 1 zugeordneten Verzweigungspunkt vor alle anderen Punkte der Reihe. Dieser Punkt scheidet dann nach (I) aus der Zahl der noch umzuordnenden Punkte aus; die Zahl derselben ist also wenigstens um 1 vermindert. Eine endliche Zahl von Wiederholungen dieses Verfahrens führt zu einer vorläufigen Anordnung, in welcher die  $n - 1$  ersten Gruppen von der Form sind  $G_{1h}, G_{1i}, G_{1k}, \dots$ , wo die Indices  $h, i, k, \dots$  die Zahlen  $2, 3, \dots, n - 1, n$  in noch unbestimmter Reihenfolge bedeuten.

Nummehr sind diese  $n - 1$  ersten Gruppen so umzuordnen, dass man die Reihe erhält  $G_{12}, G_{13}, \dots, G_{1n}$ . Von den Zahlen  $h, i, k, \dots$  sei  $\mu$  die kleinste und die Verbindung  $(1\mu)$  trete  $\alpha$ -mal auf. Man ziehe nun nach (I) diese  $\alpha$  Punkte vor die übrigen. Man hat dann in der neuen Anordnung erstlich eine Anzahl von Punkten, welche die Blätter  $(1, \mu)$  verbinden. In der darauf folgenden Reihe, die aus den übrig gebliebenen Punkten  $(1, h), (1, i), (1, k), \dots$  hervorgeht, kommen dann ausser 1 nur Zahlen vor, die mindestens  $= \mu$  sind. Behandelt man diese Reihe ebenso wie oben die ganze Reihe der Verzweigungspunkte — theilt man sie also wieder in frühere Punkte, welchen das Blatt 1, und in spätere, welchen andere Blätter angehören —, so ist die Reihe der jetzt mit 1 verbundenen Punkte jedenfalls wenigstens um  $\alpha$  kleiner als vorher. Ist nun  $\nu (> \mu)$  die kleinste der hier mit 1 verbundenen Zahlen, so ziehe man wieder alle die Blätter  $(1, \nu)$  verbindenden Verzweigungspunkte vor u. s. f. Man erhält auf

diese Weise eine Anordnung der Verzweigungspunkte in Gruppen folgender Art

$$G_{1\mu}, G_{1\nu}, G_{1\rho} \dots \text{ (wo } \mu < \nu < \rho \dots \text{),}$$

auf welche dann Punkte folgen, die mit dem Blatt 1 nicht mehr verbunden sind. (q. e. d.)

(III) Jede der Gruppen  $G_{ik}$  in (1) enthält eine gerade Zahl von Verzweigungspunkten. Die Anzahl aller Verzweigungspunkte ist daher ebenfalls gerade.

Beweis. Wenn man bei irgend einer Gestalt der Curve  $C$  in der  $x$ -Ebene, von dem regulären Punkt  $a$  mit einem beliebigen Zweigwerth  $y_i$  beginnend, das ganze Schleifensystem  $s_1, \dots, s_w$  durchläuft, so kommt man offenbar stets auf den Anfangswerth  $y_i$  zurück, weil das System der Schleifen  $s$  sich ansehen lässt als eine geschlossene Linie, die keinen Verzweigungspunkt einschliesst. Entspricht die Curve  $C$  der Anordnung (1), so folgt zunächst, dass die erste Gruppe  $G_{12}$  aus einer geraden Zahl von Verzweigungspunkten besteht. Denn, das Gegentheil angenommen, würde man, mit  $y_1$  beginnend und das Schleifensystem durchlaufend, nicht auf  $y_1$  zurückkommen, weil die Gruppe  $G_{12}$  auf  $y_2$  führen würde und von den folgenden Gruppen keine auf  $y_1$  zurückführen könnte. Nimmt man nun weiter an, der Satz sei bewiesen für alle Gruppen (1) bis zur Gruppe  $G_{ik}$  ( $i < k$ ), so muss er auch für diese Gruppe gelten. Denn enthielte  $G_{ik}$  eine ungerade Zahl von Verzweigungspunkten, so würde man, in  $a$  mit  $y_i$  beginnend und das Schleifensystem von den Verzweigungspunkten der Gruppe  $G_{ik}$  an cyclisch durchlaufend, durch  $G_{ik}$  auf die Wurzel  $y_k$  geführt, deren Index  $k$  sich erst wieder bei Gruppen vorfindet, welche grössere Indices als  $i$  enthalten. Der Rest der Schleifen führt also  $y_k$  nicht auf  $y_i$  zurück, sondern zu einer anderen Wurzel  $y_m$  ( $m > i$ ). Geht man nun cyclisch zu den ersten Schleifen über, die nach Voraussetzung jede eine gerade Anzahl von Verzweigungspunkten enthalten, so kommt man immer nur auf dieselbe Wurzel  $y_m$ , aber niemals auf  $y_i$  zurück. Es kann daher  $G_{ik}$  nicht eine ungerade Zahl von Punkten enthalten. (q. e. d.)

(IV) Die Gruppen  $G_{ik}$  lassen sich nach Belieben umordnen, ohne dass ihre Indices sich ändern.

Sind nämlich  $G_{ik}$  und  $G_{il}$  zwei auf einander folgende Gruppen in (1) und zieht man  $G_{il}$  vor  $G_{ik}$ , so wird beim Vorziehen des ersten Punktes von  $G_{il}$  in  $G_{ik}$  der Index  $i$  mit  $l$  vertauscht und die Gruppe  $G_{ik}$  geht über in eine Gruppe  $G_{kl}$ ; beim Vorziehen des zweiten Punktes von  $G_{il}$  wird in dieser Gruppe  $G_{kl}$  der Index  $l$  mit  $i$  vertauscht und

die Gruppe  $G_{kl}$  geht wieder in die frühere Gruppe  $G_{ik}$  über. Da nun jede Gruppe eine gerade Zahl von Punkten enthält, so bleibt beim Vorziehen von  $G_{il}$  die Gruppe  $G_{ik}$  ungeändert. (q. e. d.)

(V) Eine Gruppe  $G_{kl}$  lässt sich, wenn eine Gruppe  $G_{ik}$  vorhanden ist, stets überführen in eine Gruppe  $G_{il}$ , wobei  $i, k, l$  ganz beliebige Indices sind.

Beweis. Die Gruppe  $G_{ik}$  enthalte  $2\alpha$  Punkte. Zwischen die  $2\alpha - 1$  ersten und den letzten dieser Punkte schiebe man die Gruppe  $G_{kl}$ . Dies geschieht ohne Aenderung des Blätterzusammenhangs; denn man kann immer die Gruppe  $G_{kl}$  unmittelbar hinter  $G_{ik}$  stellen (nach IV) und sie dann vor den einen Punkt von  $G_{ik}$  ziehen. Nun ziehe man zweitens diesen einen Punkt wieder vor die ganze Gruppe  $G_{kl}$ . Die Gruppe  $G_{ik}$  ist dann wieder vollständig; in der Gruppe  $G_{kl}$  aber sind die Blätter  $k$  und  $i$  zu vertauschen, d. h. sie geht in die Gruppe  $G_{il}$  über. (q. e. d.)

(VI) Die sämtlichen  $\omega$  Verzweigungspunkte lassen sich in  $n - 1$  fundamentale Gruppen einordnen, von der Art, dass jede dieser Gruppen eine gerade Zahl von Punkten enthält und dass in diesen  $n - 1$  Gruppen sämtliche  $n$  Blätter vertreten sind.

In der That, durch die Gruppen  $G_{ik}$  ist jedenfalls eine Verbindung der sämtlichen Blätter hergestellt, da sonst die Verzweigungsfläche zerfallen müsste. Es besteht also zunächst eine Verbindung eines ersten Blattes  $i_1$  mit irgend einem zweiten Blatte etwa  $i_2$  oder eine Gruppe  $G_{i_1 i_2}$ ; es besteht ferner eine Verbindung des Blattes  $i_1$  oder  $i_2$  mit einem dritten Blatte etwa  $i_3$ , also eine Gruppe  $G_{i_1 i_3}$  oder eine Gruppe  $G_{i_2 i_3}$  u. s. f. Man erhält so ein System von Gruppen, welche die Blätter so verbinden, dass  $i_2$  mit  $i_1$ ,  $i_3$  mit  $i_1$  oder  $i_2$ ;  $i_4$  mit  $i_1$  oder  $i_2$  oder  $i_3$  u. s. f. zusammenhängt; diese Gruppen seien

$$\Gamma_1 = (i_1, i_2), \quad \Gamma_2 = \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} i_3, \quad \dots, \quad \Gamma_n = \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \vdots \\ i_{n-1} \end{pmatrix} i_n. \quad (2)$$

Alle übrigen Gruppen  $G_{\alpha\beta}$ , wo  $\alpha, \beta$  irgend zwei verschiedene der Zahlen  $i_1, \dots, i_n$  sind, lassen sich in eine der Gruppen (2) einordnen. Denn kommen  $\alpha$  und  $\beta$  in einer der Gruppen  $\Gamma$  vereinigt vor, so tritt  $G_{\alpha\beta}$  in diese Gruppe ein. Kommt aber in den Gruppen  $\Gamma$   $\alpha$  nicht mit  $\beta$ , sondern mit  $\gamma$  vereinigt vor, so kann man nach (V) die Curve  $C$  immer so abändern, dass die Gruppe  $G_{\alpha\beta}$  in eine Gruppe  $G_{\alpha\gamma}$  übergeht und dann sich mit einer Gruppe  $\Gamma$  vereinigt.

In den Gruppen (2) können die unter einander stehenden Indices nach (V) für einander substituirt werden; man kann also z. B. sämtliche Verzweigungspunkte einordnen in  $n - 1$  Gruppen der Form

$$(3) \quad \Gamma_1 = (i_1, i_2), \Gamma_2 = (i_1, i_3), \dots, \Gamma_{n-1} = (i_1, i_n),$$

oder auch in  $(n - 1)$  Gruppen der Form

$$(4) \quad \Gamma_1 = (i_1, i_2), \Gamma_2 = (i_2, i_3), \dots, \Gamma_{n-1} = (i_{n-1}, i_n). \text{ (q. e. d.)}$$

(VII) Aus jeder der  $n - 1$  Gruppen  $\Gamma_i$  (3) oder (4) lässt sich eine gerade Zahl von Verzweigungspunkten herausnehmen und in eine beliebige andere Gruppe einstellen; nur muss dabei die verminderte Gruppe noch bestehen bleiben, also mindestens noch zwei Punkte behalten.

Zum Beweise lege man etwa den Typus (4) zu Grunde und theile eine der Gruppen, z. B.  $\Gamma_1$ , in eine Gruppe  $\Gamma'_1$  und ein Paar, das eine Gruppe  $G_{12}$  bildet. Für diese kann man nach (V) zunächst  $G_{13}$  setzen, da Punkte folgen, welche die Blätter 2, 3 verbinden, sodann aber  $G_{23}$ , da Punkte vorhergehen, welche 1, 2 verbinden. Die neue Gruppe vereinigt sich also mit  $\Gamma_2$  und erhöht die Zahl der Punkte dieser Gruppe um 2. Umgekehrt kann man ebenso die Gruppe  $\Gamma_2$  vermindern und  $\Gamma_1$  vermehren. (q. e. d.)

Fasst man die gewonnenen Resultate zusammen, so erhält man den Satzlusssatz:

(VIII) Man kann, ausgehend von einer beliebigen Form der Verzweigungsfläche, durch Abänderung derselben immer eine neue Form der Fläche herleiten, in welcher die  $\omega$  Verzweigungspunkte ganz beliebig in  $n - 1$  Gruppen  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_{n-1}$  vertheilt sind, jedoch so, dass jede dieser Gruppen eine gerade Zahl von Punkten enthält und dass in diesen  $n - 1$  Gruppen  $\Gamma$  sämtliche  $n$  Blätter vertreten sind. Die zu dieser Anordnung gehörige Curve  $C$ , welche die Gruppen  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_{n-1}$  der Reihe nach trifft, bestimmt dann die Aufeinanderfolge der Schleifen und somit die Verbindung der  $n$  Blätter der neuen Fläche.

Dieser Satz führt nun zu einer sehr einfachen Normalform der Fläche. Unter den möglichen Gruppenbildungen wähle man diejenige, bei welcher die erste Gruppe  $\Gamma_1$  aus  $\omega - 2(n - 2)$  Verzweigungspunkten besteht, die das erste und zweite Blatt verbinden, während die  $n - 2$  übrigen Gruppen je zwei Verzweigungspunkte enthalten, die je eins der übrigen  $n - 2$  Blätter mit dem ersten oder zweiten Blatt verbinden, so dass also die letzten  $n - 2$  Blätter unter

sich gar nicht mehr zusammenhängen. Um die Fläche zu construiren, lege man, wie früher angegeben, in der einfachen  $x$ -Ebene durch die  $\omega$  Verzweigungspunkte  $\xi_i$  eine Curve  $C$ , die sich selber nicht schneidet und zuerst alle Punkte der ersten Gruppe  $\Gamma_1$  trifft, dann der Reihe nach die Punkte der übrigen Gruppen  $\Gamma_2, \dots, \Gamma_{n-1}$  und verbinde die  $\omega$  Verzweigungspunkte in der Reihenfolge  $\xi_1, \dots, \xi_\omega$ , in der sie von  $C$  getroffen werden, mit dem regulären Punkt  $a$  der  $x$ -Ebene durch Linien  $s_i$ , die sich selber und  $C$  nicht schneiden. Alsdann lege man in den  $n$  Blättern von allen  $\omega$  Verzweigungspunkten  $\xi_i$  durch die zugehörigen zwei Blätter Schnitte  $S_i$ , die über den entsprechenden Linien  $s_i$  nach den über  $a$  liegenden Punkten dieser Blätter verlaufen und verbinde längs der Schnitte  $S_i$  die Blätter in der durch die angenommene Gruppenbildung vorgeschriebenen Weise. Dann müssen sich nach dem Früheren in den über  $a$  liegenden Punkten der  $n$  Blätter die Verzweigungen wieder aufheben und die Blätter trennen. Verschiebt man alsdann die Verzweigungsschnitte  $S_i$  etwa bis zur Curve  $C$  und löscht von  $C$  die Strecken  $\xi_2\xi_3, \xi_4\xi_5, \dots$ , so sind die noch übrig bleibenden Strecken  $\xi_1\xi_2, \xi_3\xi_4, \dots, \xi_{\omega-1}\xi_\omega$  die Verzweigungsschnitte der Fläche. Die Zahl derselben ist  $= \frac{\omega}{2}$ ; die Zahl der Verzweigungsschnitte zwischen dem ersten und zweiten Blatt  $= \frac{\omega}{2} - (n - 2)$ .

Die betrachtete Normalform der Verzweigungsfläche  $T$  mit einfachen Verzweigungspunkten ist noch in eine einfach zusammenhängende Fläche zu verwandeln durch  $2p$  Querschnitte. Die Zahl  $p$  ist hier bestimmt durch die Gleichung (8) § 2, nämlich:

$$2p = \omega - 2n + 2.$$

Das kanonische System der  $2p$  Querschnitte ist hier besonders einfach, nämlich genau dasselbe, wie bei der Verzweigungsfläche der hyperelliptischen Functionen. Zunächst ist aus der Construction der Fläche klar, dass man nur die Verbindung des ersten und zweiten Blattes zu berücksichtigen und keinen Querschnitt durch die übrigen Blätter zu legen hat. Denn die zwei ersten Blätter enthalten schon  $\omega - 2(n - 2) = 2p + 2$  Verzweigungspunkte mit  $p + 1$  Verzweigungsschnitten. Daher machen  $2p$  Querschnitte, in den beiden ersten Blättern um die Verzweigungspunkte gelegt, die Fläche bereits einfach zusammenhängend und die übrigen  $2(n - 2)$  Verzweigungspunkte oder  $n - 2$  Verzweigungsschnitte, welche das erste oder zweite Blatt mit je einem der  $n - 2$  übrigen Blätter verbinden, kommen ebensowenig in Betracht, wie etwa ein Verzweigungsschnitt in einer

zweiblättrigen Fläche, die nur 2 Verzweigungspunkte hat und an sich schon einfach zusammenhängend ist. Dem Querschnittssystem in den zwei ersten Blättern kann man nun die übersichtliche Anordnung geben, die für den hyperelliptischen Fall bekannt ist. Sind  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{2p+2}$  die Verzweigungspunkte und  $\xi_1 \xi_2, \xi_3 \xi_4, \dots, \xi_{2p+1} \xi_{2p+2}$  die Verzweigungsschnitte, welche die zwei ersten Blätter verbinden, so lege man die  $p$  ersten Querschnitte  $a_1, a_2, \dots, a_p$  sämtlich im ersten Blatt bez. um die Punktepaare  $\xi_1 \xi_2, \xi_3 \xi_4, \dots, \xi_{2p-1} \xi_{2p}$ , alsdann die  $p$  Querschnitte  $b_1, b_2, \dots, b_p$  so, daß  $b_i$  die Punkte  $\xi_{2i}, \xi_{2i+1}, \dots, \xi_{2p+1}$  um-

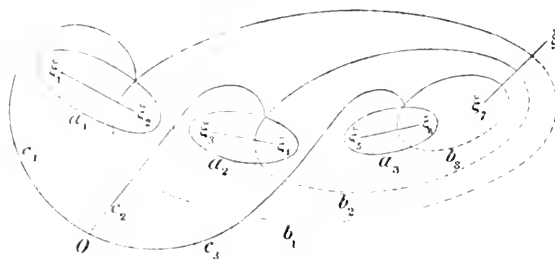


Fig. 7.

schließt, also theils im ersten, theils im zweiten Blatt verläuft, endlich die  $p$  verbindenden Schnitte  $c_i$  von den Kreuzungspunkten der Schnittpaare  $(a_i, b_i)$  nach dem Punkt  $O$ , der beliebig, etwa im ersten

Blatt gewählt werden kann. Fig. 5<sup>1)</sup> zeigt ein solches kanonisches Querschnittssystem für den Fall  $n = 2$ ,  $\omega = 8$ ,  $p = 3$ ; die im ersten Blatt verlaufenden Schnitte und Schnitttheile sind ausgezogen, die im zweiten Blatt liegenden punktiert. Alle Querschnitte  $a_i, b_i, c_i$  sind mit zwei Rändern zu denken, die parallel und in unendlich kleiner Entfernung von einander verlaufen.

#### § 4. Analytische Untersuchung von $F(x, y) = 0$ .<sup>2)</sup>

Die in § 1—3 gegebene Untersuchung der Zweigfunctionen war wesentlich geometrisch. Eine strengere Definition und Unterscheidung der verschiedenen Arten von kritischen Punkten, sowie die Bestimmung der Zahl und Lage dieser Punkte ist aber erst durch eine analytische Untersuchung der Gleichung  $F(x, y) = 0$  möglich. Bevor wir uns zu dieser Untersuchung wenden, sei noch eine zweite geometrische Deutung dieser Gleichung erwähnt<sup>3)</sup>. Man kann nämlich  $F(x, y) = 0$  auch als Gleichung einer Curve mit complexen

1) Prym, Zur Theorie der Functionen in einer zweiblättrigen Fläche. Zürich 1866. S. 4.

2) Riemann, Ges. W. S. 103 ff. Die Voraussetzungen sind bei Riemann von den obigen etwas verschieden; es wird  $F(x, y) = 0$  in  $x$  vom  $m$ -ten, in  $y$  vom  $n$ -ten Grade angenommen.

3) Clebsch, Journ. für Math. Bd. 63. S. 189 ff. 1863.



Coefficienten und complexen Coordinaten  $(x, y)$  betrachten und auf sie alle Bezeichnungen anwenden, die bei reellen Curven gebräuchlich sind. Wir reden daher von einer Ebene, in welcher die Curve  $F(x, y) = 0$  liegt und bezeichnen dieselbe als  $(x, y)$ -Ebene. Diese Ebene hat keine reelle Existenz, wie bei der ersten Auffassung die  $x$ -Ebene, in der die complexe Variable  $x$  ausgebreitet war. Wir nennen ferner ein Werthepaar  $(a, b)$ , das der Gleichung  $F(x, y) = 0$  genügt, einen in der  $(x, y)$ -Ebene auf der Curve gelegenen Punkt und reden von Tangenten, Asymptoten, von singulären Punkten der Curve u. s. f., wie in der reellen Curventheorie. Die Deutung von  $F(x, y) = 0$  als Curve lässt eine besonders einfache Ausdrucksweise zu, wenn es sich um algebraische Fragen handelt, während die geometrische Darstellung von  $y$  durch die Verzweigungsfläche besondere Vorzüge bei transcendenten Fragen bietet.

Für die analytische Untersuchung, sowie überhaupt im Folgenden, machen wir nicht blos die Voraussetzung, dass  $F(x, y)$  irreducibel sei, wir nehmen auch für  $F(x, y)$  eine bestimmte Form an durch folgende, weitere Voraussetzungen.

- (A) Die Gleichung  $F(x, y) = 0$  soll in  $x$  wie in  $y$  rational und ganz vom Grade  $n$  sein und so beschaffen, dass für jedes Glied  $x^i y^k$  die Dimension  $i + k < n$  ist.
- (B) Wenn man die Gleichung  $F(x, y) = 0$  durch die Substitution  $x:z$  und  $y:z$  für  $x$  und  $y$  und durch Multiplication mit  $z^n$  homogen in  $x, y, z$  macht, sollen die Coefficienten von  $x^n$ , von  $y^n$  und von  $z^n$  von Null verschieden sein.
- (C) Der Ausdruck der  $n^{\text{ten}}$  Dimension in  $F(x, y) = 0$  soll  $n$  verschiedene Linearfactoren haben.

Die Voraussetzungen (B) und (C) bieten keine wesentliche Beschränkung der in (A) angenommenen Form von  $F(x, y)$ . Denn setzt man in der homogen gemachten Gleichung  $F(x, y, z) = 0$

$$x = \alpha_1 \xi + \beta_1 \eta + \gamma_1 \zeta, \quad y = \alpha_2 \xi + \beta_2 \eta + \gamma_2 \zeta, \quad z = \alpha_3 \xi + \beta_3 \eta + \gamma_3 \zeta, \quad (1)$$

(wobei die Determinante der Substitution von 0 verschieden sei), so lassen sich die Coefficienten  $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$  stets so bestimmen, dass in der transformirten Gleichung  $\Phi(\xi, \eta, \zeta) = 0$  die Coefficienten von  $\xi^n, \eta^n, \zeta^n$  von 0 verschieden sind und dass gleichzeitig der Ausdruck der  $n^{\text{ten}}$  Dimension in  $\xi$  und  $\eta$   $n$  verschiedene Linearfactoren hat.

Die Voraussetzungen (B) und (C) beziehen sich besonders auf das Verhalten des unendlich fernen Punktes. Nach (B) soll die Curve

$F(x, y) = 0$  nicht durch den Punkt  $(x = 0, y = 0)$  gehen und nicht Asymptoten haben, die der  $x$ - oder  $y$ -Axe parallel sind. Es wird also  $y$  nur  $\infty$  für  $x = \infty$  oder es fallen diejenigen kritischen Punkte, in denen  $y = \infty$  wird, alle in den Punkt  $(x = \infty, y = \infty)$  der Curve  $F(x, y) = 0$  oder in die  $n$  Punkte  $(x = \infty, y = \infty)$  der  $n$ -blättrigen Verzweigungsfläche  $T$ . Nach (C) hat die Curve  $F(x, y) = 0$  im Punkt  $(x = \infty, y = \infty)$  einen  $n$ -fachen Punkt mit getrennten Tangenten (Asymptoten) oder die Verzweigungsfläche  $T$  die Eigenschaft, dass sich die  $n$  Blätter im Unendlichen nur berühren, ohne zusammenzuhängen (vgl. S. 44).

Um die im Endlichen liegenden kritischen Punkte zu untersuchen, sei  $x = a$  ein endlicher Werth und  $b_1, b_2, \dots, b_n$  die zugehörigen endlichen Werthe von  $y$ . Ist  $b$  einer dieser Werthe und setzt man zur Abkürzung

$$(2) \quad F(a, b) = F_{00}; \left( \frac{\partial F}{\partial x} \right)_{ab} = F_{10}; \left( \frac{\partial F}{\partial y} \right)_{ab} = F_{01}; \dots; \left( \frac{\partial^{p+q} F}{\partial x^p \partial y^q} \right)_{ab} = F_{pq},$$

so gibt die Entwicklung von  $F(x, y) = 0$  nach Potenzen von  $x - a, y - b$ , da  $F_{00} = 0$  ist, die Gleichung

$$(3) \quad \begin{cases} (x-a)F_{10} + (y-b)F_{01} \\ + \frac{1}{2}[(x-a)^2 F_{20} + 2(x-a)(y-b)F_{11} + (y-b)^2 F_{02}] + \dots \\ + \frac{1}{n!}[(x-a)^n F_{n0} + n(x-a)^{n-1}(y-b)F_{n-11} + \dots + (y-b)^n F_{0n}] = 0, \end{cases}$$

eine Entwicklung, die mit den Gliedern der  $n^{\text{ten}}$  Dimension abschliesst.

Ein einfacher Punkt  $(x = a, y = b)$  der Fläche  $T$  ist dadurch charakterisirt, dass  $F(a, b) = F_{00} = 0$ , aber  $F_{01} \geq 0$  ist. In der Umgebung von  $(a, b)$  hat die zugehörige Zweigfunction  $y$  eine Entwicklung nach ganzen positiven Potenzen von  $x - a$ , nämlich

$$(4) \quad y - b = \alpha_1 (x - a) + \alpha_2 (x - a)^2 + \alpha_3 (x - a)^3 + \dots$$

Die Coefficienten  $\alpha_1, \alpha_2, \dots$  sind nach dem Taylor'schen Satze bestimmt durch die Werthe

$$\alpha_1 = \frac{dy}{dx}, \quad \alpha_2 = \frac{1}{2!} \frac{d^2 y}{dx^2}, \quad \dots$$

gebildet für  $(x, y) = (a, b)$ , also nach (3) bestimmt durch

$$F_{01}\alpha_1 + F_{10} = 0, \quad 2!\alpha_2 F_{01} + \alpha_1^2 F_{02} + 2\alpha_1 F_{11} + F_{20} = 0, \dots$$

Die Coefficienten  $\alpha_1, \alpha_2, \dots$  sind alle endlich, da  $F_{01} \geq 0$ .

Ein kritischer Punkt  $(x = a, y = b)$  im Endlichen der Fläche  $T$  ist dadurch charakterisirt, dass für  $x = a$  mindestens zwei der  $n$  Wurzeln  $b_1, \dots, b_n$  von  $F_{00} = 0$  zusammenfallen in einen Werth  $b$ , dass also für  $x = a, y = b$  ausser  $F_{00} = 0$  mindestens noch  $F_{01} = 0$  ist. Werthepaare  $(x = a, y = b)$ , welche nur diesen zwei Gleichungen genügen, existiren stets, ohne dass eine besondere Bedingung zwischen den Coefficienten  $F_{rs}$  der Gleichung (3) stattfindet. Wenn aber noch weitere der Coefficienten  $F_{rs}$  in (3) verschwinden, so treten zwischen den Coefficienten  $F(x, y) = 0$  Bedingungsgleichungen auf und die kritischen Punkte sind zugleich singuläre Punkte. Wir beschränken uns auf die Betrachtung der einfachsten und wichtigsten Fälle.

1) Es sei für  $(x = a, y = b)$

$$F_{01} = F_{02} = \dots = F_{0\lambda-1} = 0, \quad (5)$$

dagegen  $F_{10}$  und  $F_{0\lambda} \geq 0$ .

Dann hat man, da hier  $F_{10} \geq 0$ , entsprechend dem Obigen, indem nur  $x$  und  $y$  ihre Rolle vertauschen, zwischen  $x$  und der zu  $b$  gehörigen Zweigfunction  $y$  in der Umgebung von  $(a, b)$  eine Entwicklung von der Form

$$x - a = \beta_1(y - b)^\lambda + \beta_2(y - b)^{\lambda+1} + \dots \quad (\beta_1 \geq 0),$$

wo die Coefficienten  $\beta_1, \beta_2, \dots$  in ähnlicher Weise wie oben zu bestimmen sind. Zieht man die  $\lambda^{\text{te}}$  Wurzel, so erhält man die Entwicklung

$$(x - a)^{\frac{1}{\lambda}} = \gamma_1(y - b) + \gamma_2(y - b)^2 + \dots \quad (\gamma_1 \geq 0),$$

und hieraus nach bekannten Sätzen über die Umkehrung der Potenzreihen

$$y - b = \alpha_1(x - a)^{\frac{1}{\lambda}} + \alpha_2(x - a)^{\frac{2}{\lambda}} + \dots \quad (\alpha_1 \geq 0). \quad (6)$$

Die Vergleichung mit (5) § 2 lehrt, dass der betrachtete Punkt  $(x = a, y = b)$  in der Fläche  $T$  ein  $\lambda - 1$ -facher Verzweigungspunkt und zwar von der ersten Art ist (vgl. § 2 S. 24), da wir voraussetzen, dass  $\alpha_1 \geq 0$  ist, dass also die Entwicklung (6) mit dem

Glied  $(x - a)^{\frac{1}{\lambda}}$  beginnt. Für die Curve  $F(x, y) = 0$  ist  $(a, b)$  ein Punkt, in dem die Tangente parallel der  $y$ -Axe ist und  $\lambda - 1$ -fach berührt, d. h. in  $\lambda$  zusammenfallenden Punkten schneidet. Für  $\lambda = 2$  hört der Punkt auf, singulär zu sein, er wird zu einem einfachen Verzweigungspunkt erster Art.

2) Es sei für  $(x = a, y = b)$

$$(7) \quad F_{rs} = 0 \quad (r, s = 0, 1, \dots, \mu - 1)$$

oder die Entwicklung (3) beginne mit den Gliedern der  $\mu^{\text{ten}}$  Dimension und der Ausdruck der  $\mu^{\text{ten}}$  Dimension zerfalle in  $\mu$  verschiedene Factoren, nämlich

$$y - b - \alpha_i (x - a) \quad (\alpha_i \geq 0) \quad (i = 1, \dots, \mu),$$

wo die Grössen  $\alpha_i$  endlich und von einander und von 0 verschieden seien. Dividirt man (3) durch  $(x - a)^\mu$  und setzt  $\frac{y - b}{x - a} = \eta$ , so nimmt (3) die Form an

$$(8) \quad \Phi_\mu + (x - a) \Phi_{\mu+1} + \dots + (x - a)^{n-\mu} \Phi_n = 0,$$

wo  $\Phi_\mu, \Phi_{\mu+1}, \dots, \Phi_n$  ganze rationale Functionen in  $\eta$  bez. vom Grade  $\mu, \mu + 1, \dots, n$  sind. Die  $\mu$  Wurzeln  $\eta$  von  $\Phi_\mu = 0$  sind nach Voraussetzung  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\mu$ . Ist  $\alpha$  eine dieser Wurzeln, so erhält man für die zugehörige Function  $\eta$  aus (8) die Entwicklung

$$(9) \quad \eta = \alpha + \beta (x - a) + \gamma (x - a)^2 + \dots$$

Die Coefficienten  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$  sind ähnlich wie bei dem regulären Punkt bestimmt durch die Gleichungen

$$\frac{d\Phi_\mu}{d\eta} \beta + \Phi_{\mu+1} = 0, \quad 2! \gamma \frac{d\Phi_\mu}{d\eta} + \beta^2 \frac{d^2\Phi_\mu}{d\eta^2} + 2\beta \frac{d\Phi_{\mu+1}}{d\eta} + 2\Phi_{\mu+2} = 0, \dots$$

die  $\Phi$  und ihre Ableitungen gebildet für  $\eta = \alpha$ . Die Coefficienten  $\beta, \gamma, \dots$  sind daher, da  $\frac{d\Phi_\mu}{d\eta} \geq 0$  für  $\eta = \alpha$ , alle eindeutig und endlich.

Trägt man für  $\eta$  den Werth  $\frac{y - b}{x - a}$  ein und bildet die Gleichung (9) für die  $\mu$  verschiedenen Wurzeln  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\mu$  von  $\Phi_\mu = 0$ , so erhält man für die  $\mu$  zugehörigen Zweigfunctionen Entwicklungen, die nach ganzen positiven Potenzen von  $x - a$  fortschreiten, nämlich:

$$(10) \quad y - b = \alpha_i (x - a) + \beta_i (x - a)^2 + \dots \quad (\alpha_i \geq 0) \quad (i = 1, \dots, \mu).$$

Die Vergleichung mit (4) § 2 zeigt, dass der betrachtete Punkt  $(a, b)$  in der Fläche  $T$  oder auf der Curve  $F = 0$  ein  $\mu$ -facher Punkt mit getrennten Blättern oder getrennten Tangenten ist und zwar von der ersten Art (vgl. § 2 S. 24), da wir voraussetzen, dass die Entwicklungen (10) alle mit dem Glied  $x - a$  beginnen. Für  $\mu = 2$  ist der Punkt  $(a, b)$  ein Doppelpunkt in  $T$  oder auf  $F = 0$ . Für  $\mu = 1$  hört der Punkt  $(a, b)$  auf, singular zu sein, er wird zum einfachen Punkt auf  $F = 0$  oder in  $T$ .

3) Es sei wieder für  $(x = a, y = b)$

$$F_{rs} = 0 \quad (r, s = 0, 1, \dots, \nu - 1),$$

aber der Ausdruck der  $\nu^{\text{ten}}$  Dimension in (3) zerfalle in  $k$  Factoren von der Form

$$[(y - b) - \alpha_{r_i}(x - a)]^{\nu_i} \quad (\alpha_{r_i} \geq 0) \quad (i = 1, \dots, k),$$

wobei  $\nu_1 + \dots + \nu_k = \nu$  ist; zugleich sei vorausgesetzt, dass der Ausdruck der  $\nu + 1^{\text{ten}}$  Dimension in (3) keinen der Werthe  $y - b - \alpha_{r_i}(x - a)$  als Factor enthalte. Die  $\nu$  Zweigfunctionen, die in  $a$  denselben Werth  $b$  haben, zerfallen hier in  $k$  Gruppen, deren jede durch eine besondere Reihenentwicklung charakterisirt ist. Für die  $\nu_i$  Zweigfunctionen der  $i^{\text{ten}}$  Gruppe ergibt sich durch ähnliche Betrachtungen wie in 1. und 2. in der Umgebung von  $(a, b)$  die gemeinsame Entwicklung

$$y - b = \alpha_{r_i}(x - a) + \beta_{r_i}(x - a)^{\frac{\nu_i + 1}{\nu_i}} + \dots \quad (\alpha_{r_i} \geq 0). \quad (11)$$

Nach § 2 trennen sich also die  $\nu$  durch den Punkt  $(a, b)$  gehenden Blätter der Fläche  $T$  in  $k$  Gruppen, so dass die  $\nu_i$  Blätter der  $i^{\text{ten}}$  Gruppe unter sich cyclisch zusammenhängen. Für die Curve  $F(x, y) = 0$  ist  $(a, b)$  ein Punkt, durch den  $\nu$  Zweige gehen, die sich in  $k$  Gruppen sondern, so dass die  $\nu_i$  Zweige der  $i^{\text{ten}}$  Gruppe eine gemeinsame Tangente in erster Ordnung berühren, während die Tangenten der  $k$  Gruppen unter endlichen Winkeln zusammen stoßen. Für  $k = 1, \nu = 2$  ist der Punkt  $(a, b)$  ein Rückkehrpunkt der Curve  $F = 0$  oder der Fläche  $T$ .

Wir betrachten noch das Verhalten der  $n$  Zweigfunctionen  $y$  in dem Punkte  $x = \infty$  der  $x$ -Ebene mit Rücksicht auf die S. 39 gemachten Voraussetzungen (A), (B) und (C). Nach (B) sind für  $x = \infty$  auch die  $n$  Werthe von  $y$  gleich  $\infty$ , nach (C) zerfällt der Ausdruck der  $n^{\text{ten}}$  Dimension von  $F(x, y) = 0$  in  $n$  ungleiche Factoren. Daher hat man in der Umgebung des Punktes  $x = \infty$  für  $y$   $n$  Entwicklungen nach ganzen Potenzen von  $x$

$$y = A_i x + B_i + C_i x^{-1} + D_i x^{-2} + \dots \quad (A_i \geq 0) \quad (i = 1, \dots, n), \quad (12)$$

wo die Coefficienten  $A_i$  endlich und von einander und von 0 verschieden sind. In der That sei der Ausdruck der  $n^{\text{ten}}$  Dimension in  $F(x, y) = 0$

$$a_0 y^n + a_1^0 y^{n-1} x + \dots + a_n^0 x^n.$$

Durch die Substitution  $x = \xi^{-1}, y = \eta^{-1}$  geht  $F(x, y) = 0$ , wenn mit  $\xi^n \eta^n$  multiplicirt wird, über in

$$F_1(\xi, \eta) = f(\xi, \eta) + f_1^{n+1}(\xi, \eta) + \dots + \xi^n \eta^n = 0,$$

wo in

$$f(\xi, \eta) = a_0 \xi^n + a_1^0 \xi^{n-1} \eta + \dots + a_n^0 \eta^n$$

die Glieder der niedersten Dimension in  $\xi, \eta$  zusammengefasst sind. Ist nun  $\xi = A_i \eta$  einer der  $n$  nach Voraussetzung ungleichen Factoren von  $f(\xi, \eta)$ , so erhält man in der Umgebung von  $(\xi = 0, \eta = 0)$  eine Entwicklung von  $\eta$  nach ganzen Potenzen von  $\xi$ , aus der sich in der Umgebung von  $(x = \infty, y = \infty)$  die obige Entwicklung (12) von  $y$  nach Potenzen von  $x$  ergibt. Der Punkt  $(x = \infty, y = \infty)$  ist daher ein  $n$ -facher Punkt erster Art; in ihm sind für die Fläche  $T$  die  $n$  Blätter, für die Curve  $F = 0$  die  $n$  Tangenten (Asymptoten) getrennt.

Wir begnügen uns mit der Erörterung der vorstehenden Fälle, die auch der Anschauung leicht zugänglich sind. Die Untersuchung des allgemeinsten, singulären Punktes, wo für ein Werthepaar  $(a, b)$  beliebige Coefficienten  $F_{rs}$  in (3) verschwinden, erfordert ausgedehnte Betrachtungen besonderer Art. Wir verweisen bez. dieser Frage auf die Litteratur und führen nur historisch Folgendes an.

Eine erste Reihe von Untersuchungen<sup>1)</sup>, die sich mit der Trennung der Zweifunctionen und der Aufstellung von Reihenentwicklungen für dieselben an singulären Stellen beschäftigt, führt rein analytisch zu demselben Satze, der in (IV) § 2 geometrisch abgeleitet wurde, nämlich:

- (I) Die zu einem kritischen Punkte mit der Abscisse  $x = a$  gehörigen  $n$  Punkte der Curve  $F(x, y) = 0$  treten gruppenweise zusammen in Punkte  $(a, b)$ ,  $(a, b_1)$ , ... Die durch einen solchen Punkt z. B.  $(a, b)$  gehenden Tangenten der Curve trennen sich wieder in solche, die nur von je einem Zweig, und solche, die gleichzeitig von mehreren Zweigen der Curven in erster oder höherer Ordnung berührt werden. Die zugehörigen Zweifunctionen  $y$  stellen sich dar durch Entwicklungen von der Form (3), (4) und (5) § 2.

Eine zweite Reihe von Untersuchungen<sup>2)</sup>, die sich mit der Auf-

1) Puiseux Fischer, S. 28 ff. Vgl. die Darstellung von Briot et Bouquet, Théorie des fonct. ellipt. 2. A. 1875. S. 40—49.

2) Cayley, Quart. Journ. of Math. T. 7 (1865) und Journ. für Math. Bd. 64 (1865). Hamburger, Zeitschrift für Math. Bd. 16 (1871). Nöther, Gött. Nachr. 1871. S. 267; Math. Ann. Bd. 9. S. 167 (1875) und Bd. 23 S. 311 (1883). Vgl. auch die Darstellungen von Picard, Traité d'analyse. T. II S. 360 ff. (1893).

lösung von höheren Singularitäten in solche niederer Art durch eindeutige Transformation der Curve (vgl. Abschnitt IV) beschäftigt, führt zu dem Resultat:

(II) Eine algebraische Gleichung  $F(x, y) = 0$  mit beliebigen, singulären Punkten lässt sich durch eindeutige Transformation stets in eine andere Gleichung überführen, die nur einfache Verzweigungspunkte (1. Art) und von singulären Punkten nur noch Doppelpunkte enthält.

Wir legen später, von Abschnitt II an, für  $F(x, y) = 0$  diese einfachste Form zu Grunde.

### § 5. Zahl und Lage der kritischen Punkte.

Wir untersuchen nunmehr die Zahl und Lage der kritischen Punkte, beschränken uns aber wieder auf das Vorkommen der im vorigen § S. 41—43 betrachteten kritischen Punkte, wobei wir annehmen, dass nicht zwei solcher Punkte in einander fallen. Ausserdem halten wir die früheren Voraussetzungen (A), (B), (C) S. 39 fest.

Da der Punkt  $(x = \infty, y = \infty)$  nach diesen Voraussetzungen ein  $\mu$ -facher Punkt erster Art ist, so handelt es sich nur noch um die im Endlichen gelegenen kritischen Punkte. Nach der Definition derselben (S. 41) genügen die Coordinaten  $(x, y)$  eines solchen Punktes den beiden Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} F(x, y) &= a_0 y^n + a_1 y^{n-1} + \dots + a_{n-2} y^2 + a_{n-1} y + a_n = 0, \\ F' y &= n a_0 y^{n-1} + (n-1) a_1 y^{n-2} + \dots + 2 a_{n-2} y + a_{n-1} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Die Combination derselben gibt die weitere Gleichung

$$a_1 y^{n-1} + 2 a_2 y^{n-2} + \dots + (n-1) a_{n-1} y + n a_n = 0, \quad (2)$$

durch welche sich die erste der Gleichungen (1) ersetzen lässt. Durch Elimination von  $y$  aus (2) und der zweiten Gleichung (1) erhält man eine Gleichung in  $x$ :  $D(x) = 0$ , die Discriminante von  $F(x, y) = 0$  nach  $y$ , deren Wurzeln die  $x$ -Ordinaten der gesuchten Punkte sind. Die Discriminante lässt sich leicht als Determinante von  $2(n-1)$  Reihen anschreiben und man sieht dann unmittelbar, dass sie unter der Voraussetzung (A) vom Grade  $n(n-1)$  in  $x$  ist. Für unseren

---

Appel et Goursat, Théorie des fonct. alg. et de leurs int. S. 283 (1895). Ausführliche Litteraturangaben finden sich in Brill und Nöther, Bericht u. s. f. S. 367 ff.

Zweck ist indess eine andere Form von  $D(x)$  geeigneter<sup>1)</sup>. Bezeichnet man wie früher die  $n$  Wurzeln  $y$  der Gleichung  $F(x, y) = 0$  mit  $y_1, y_2, \dots, y_n$ , so ist die Discriminante bis auf einen constanten Factor, den wir unterdrücken, dargestellt durch das Product

$$(3) \quad D(x) = (F'y)_{y_1} (F'y)_{y_2} \dots (F'y)_{y_n}.$$

Dies Product ist nämlich erstens eine rationale Function von  $x$ ; denn es stellt sich als rationale und symmetrische Function der  $n$  Wurzeln  $y_i$  rational in den Coefficienten  $a_0, a_1, \dots, a_n$  von  $F$  dar. Es ist zweitens eine ganze Function von  $x$ ; denn es wird für keinen endlichen Werth von  $x$  unendlich, weil nach Voraussetzung (B) für endliche  $x$  auch die  $n$  Wurzeln  $y_i$  endlich sind. Das Product auf der rechten Seite in (3) ist daher (bis auf einen constanten Factor) identisch mit der Discriminante  $D(x)$ , da es seiner Bildung nach für jedes gemeinsame Wurzelpaar  $(x, y)$  der beiden Gleichungen (1) und nur für diese verschwindet.

Der Grad von  $D$  in  $x$  ist die Ordnung, in welcher der Ausdruck (3) unendlich wird für  $x = \infty$ ; es wird aber für  $x = \infty$  jeder Factor in der zweiten Gleichung (1)  $= \infty^{n-1}$ , folglich  $D = \infty^{n(n-1)}$ . Dies gibt den Satz:

(I) Der Grad der Discriminante  $D(x)$  oder die Zahl der Wurzeln von  $D(x) = 0$  ist gleich  $n(n-1)$ .

Um zu sehen, in welcher Weise die  $n(n-1)$  Wurzeln von  $D(x) = 0$  den früher betrachteten Arten von kritischen Punkten entsprechen, hat man nach (3) das Verhalten von  $F'(y)$  und  $D(x)$  in diesen Punkten zu untersuchen. Hierzu genügt es, für jeden Fall die Glieder der niedersten Dimension von  $F(x, y)$  anzuschreiben, aus denen sich durch Differentiation nach  $y$  die Glieder der niedersten Dimension von  $F'(y)$  ergeben. Der Kürze halber bezeichnen wir die im vorigen § unter Nr. 1, 2, 3 charakterisirten Punkte als singuläre Punkte vom Charakter  $(\lambda)$ ,  $(\mu)$ ,  $(\nu, \kappa)$  oder noch kürzer als Punkte  $(\lambda)$ ,  $(\mu)$ ,  $(\nu, \kappa)$ .

1) Für einen singulären Punkt  $(a, b)$  vom Charakter  $(\lambda)$  sind die in Betracht kommenden Glieder der niedersten Dimension

$$\text{in } F(x, y): (x-a) F'_{10} + \frac{1}{\lambda!} (y-b)^\lambda F'_{0\lambda},$$

$$\text{in } F'y: \frac{1}{(\lambda-1)!} F'_{0\lambda} (y-b)^{\lambda-1}.$$

1) Riemann, Ges. W. S. 104 ff.



Nun ist im Punkt  $(a, b)$  nach (6) § 4 für jeden der  $\lambda$  gleichen Werthe von  $y$  die Grösse  $y - b$  proportional mit  $(x - a)^{\frac{1}{\lambda}}$ , also jeder der  $\lambda$  zugehörigen Werthe von  $F'y$  proportional mit  $(x - a)^{\frac{\lambda-1}{\lambda}}$ , folglich nach (3)  $D(x)$  proportional mit  $(x - a)^{\lambda-1}$ , d. h.

(II) Einem singulären Punkte vom Charakter  $(\lambda)$  entsprechen  $\lambda - 1$  Wurzeln, einem einfachen Verzweigungspunkt 1. Art entspricht eine Wurzel von  $D(x) = 0$ .

Man sagt daher auch, ein Punkt  $(\lambda)$  oder ein  $\lambda - 1$ -facher Verzweigungspunkt 1. Art zählt für  $\lambda - 1$  einfache Verzweigungspunkte 1. Art. Dies wird geometrisch erläutert durch den Satz (V) § 2.

2) Für einen singulären Punkt  $(a, b)$  vom Charakter  $(\mu)$  ist das Glied niederster Dimension in  $F(x, y)$

$$A [(y - b) - \alpha_1 (x - a)] \dots [(y - b) - \alpha_\mu (x - a)].$$

Nun ist im Punkte  $(a, b)$  nach (10) § 4 für jeden der  $\mu$  gleichen Werthe von  $y$  die Grösse  $y - b$  proportional mit  $x - a$ , also jeder der  $\mu$  zugehörigen Werthe von  $F'y$  proportional mit  $(x - a)^{\mu-1}$ , folglich nach (3)  $D(x)$  proportional mit  $(x - a)^{\mu(\mu-1)}$ , d. h.

(III) Einem singulären Punkte vom Charakter  $(\mu)$  entsprechen  $\mu(\mu - 1)$  Wurzeln, einem Doppelpunkt  $(\mu = 2)$  entsprechen zwei Wurzeln von  $D(x) = 0$ .

Man sagt daher auch, ein Punkt  $(\mu)$  oder ein  $\mu$ -facher Punkt 1. Art mit getrennten Tangenten absorbiert  $\mu(\mu - 1)$  einfache Verzweigungspunkte 1. Art. Dies wird geometrisch erläutert durch den Satz (VI) § 2.

3) Für einen singulären Punkt  $(a, b)$  vom Charakter  $(\nu, \kappa)$  ist das Glied der niedersten Dimension in  $F(x, y)$

$$A [(y - b) - \alpha_{\nu_1} (x - a)]^{\nu_1} \dots [(y - b) - \alpha_{\nu_\kappa} (x - a)]^{\nu_\kappa} \quad (\nu_1 + \dots + \nu_\kappa = \nu). \quad (4)$$

Nun ist nach (11) § 4 im Punkte  $(a, b)$  für jeden der  $\nu_i$  dem  $i^{\text{ten}}$  Factor entsprechenden gleichen Werthe von  $y$  die Grösse  $y - b$  proportional mit  $x - a$ , dagegen die Grösse  $[(y - b) - \alpha_{\nu_i} (x - a)]^{\nu_i}$  proportional mit  $(x - a)^{\nu_i + 1}$ , folglich jeder der zugehörigen Werthe von  $F''(y)$  proportional mit  $[(y - b) - \alpha_{\nu_i} (x - a)]^{\nu_i - 1} (x - a)^{\nu - \nu_i}$  oder mit  $(x - a)^{\frac{\nu \nu_i - 1}{\nu_i}}$ . Dem  $i^{\text{ten}}$  Factor in (4) entspricht also nach (3) in  $D(x)$  ein Factor  $(x - a)^{\nu \nu_i - 1}$ , oder ihm entsprechen  $\nu \nu_i - 1$  Wurzeln

von  $D(x) = 0$ . Berücksichtigt man gleichzeitig alle Factoren in (4), so folgt:

(IV) Einem singulären Punkte vom Charakter  $(\nu, \kappa)$  entsprechen  $\sum_i (\nu \nu_i - 1) = \nu^2 - \kappa$  Wurzeln, einem Rückkehrpunkt ( $\kappa=1$ ;  $\nu=2$ ) entsprechen drei Wurzeln von  $D(x)=0$ .

Beschränkt man sich auf das Vorkommen der Punkte  $(\lambda)$  und  $(\mu)$ , so folgt die Gleichung

$$(4a) \quad n(n-1) = \sum (\lambda-1) + \sum \mu(\mu-1),$$

wo die erste Summe sich auf alle Punkte  $(\lambda)$ , die zweite auf alle Punkte  $(\mu)$  im Endlichen von  $T$  bezieht. Nun hatten wir in (7) § 2 unter noch allgemeineren Voraussetzungen die Gleichung

$$p = \frac{1}{2} \sum (\lambda-1) - n + 1.$$

Vergleicht man dies mit (4a), so erhält man für das Geschlecht  $p$  der Curve  $F(x, y) = 0$  den Werth:

$$(5) \quad p = \frac{1}{2} (n-1)(n-2) - \frac{1}{2} \sum \mu(\mu-1),$$

wo sich die Summe auf alle im Endlichen gelegenen, mehrfachen Punkte mit getrennten Tangenten bezieht.

Kommen im Endlichen von  $T$  nur einfache Verzweigungspunkte und von Singularitäten nur Doppelpunkte vor und ist die Anzahl der ersteren  $\omega$ , die der letzteren  $r$ , so hat man die Gleichungen<sup>1)</sup>:

$$(6) \quad \omega = n(n-1) - 2r, \quad p = \frac{1}{2} (n-1)(n-2) - r.$$

Aus der letzten Gleichung folgt, da  $p$  nicht negativ sein kann,  $\frac{1}{2} (n-1)(n-2)$  als Maximalzahl der Doppelpunkte, die eine Curve  $F(x, y) = 0$  vom Grade  $n$  haben kann, eine Zahl, die für reelle Curven durch bekannte Betrachtungen der analytischen Geometrie abgeleitet wird.

Um die Lage oder die Coordinaten<sup>2)</sup>  $(x, y)$  der kritischen Punkte zu bestimmen, fügen wir zu den Annahmen (A), (B), (C)

1) Riemann, Ges. W. S. 105 und 107.

2) Kronecker, Journ. für Math. Bd. 91. S. 301 ff. (1881), in Vorlesungen bereits 1870/71. Nöther, Math. Ann. Bd. 23. S. 327 ff. (1883).

S. 39 noch eine weitere Voraussetzung über die Form von  $F(x, y) = 0$  hinzu, die gleichfalls keine Beschränkung ist, sondern sich durch die S. 39 angegebene Transformation stets gleichzeitig mit (B) und (C) herstellen lässt, nämlich die Voraussetzung:

(D) Zwei Werthsysteme  $(x, y)$ , welche den beiden Gleichungen (1) genügen, sollen weder gleiches  $x$ , noch gleiches  $y$  haben,

oder geometrisch, es sollen nicht zwei kritische Punkte auf derselben Parallelen zur  $x$ - oder  $y$ -Axe liegen.

Die  $x$ -Ordinaten der gesuchten Punkte sind die Wurzeln der Gleichung  $D(x) = 0$ . Diese Gleichung lässt sich in zwei Theile zerpalten, von welchen der erste Theil den Punkten vom Charakter  $(\lambda)$ , der andere den Punkten vom Charakter  $(\mu)$  und  $(\nu, \alpha)$  entspricht. Die Möglichkeit dieser Trennung beruht auf dem Umstande, dass die Coordinaten der letzteren Punkte ausser den Gleichungen  $F(x, y) = 0$  und  $F'(y) = 0$  auch noch der Gleichung  $F'(x) = 0$  genügen, die der ersteren aber nicht (S. 41 ff, Nr. 1, 2, 3). Wir untersuchen zunächst die gemeinsamen Wurzelpaare von  $F(x, y) = 0$  und  $F'(x) = 0$ . Die Elimination von  $y$  aus diesen Gleichungen führt auf eine Gleichung  $D_1(x) = 0$ , die sich in Determinantenform leicht anschreiben lässt. Ebenso wie der Discriminante  $D(x)$  gibt man auch der Resultante  $D_1(x)$  zweckmässig eine andere Form. Sind wieder  $y_1, y_2, \dots, y_n$  die  $n$  Wurzeln  $y$  von  $F(x, y) = 0$  und bezeichnet  $(F'x)_{y_i}$  den Werth von  $F'(x)$ , gebildet für  $y = y_i$ , so ist aus den nämlichen Gründen wie früher

$$D_1(x) = (F'x)_{y_1} (F'x)_{y_2} \dots (F'x)_{y_n}. \quad (7)$$

Der Grad von  $D_1(x)$  ist wie bei  $D(x)$  gleich  $n(n-1)$ . Für das Verhalten von  $D_1(x)$  in den kritischen Punkten dagegen gilt Folgendes:

- 1) In einem singulären Punkt  $(a, b)$  vom Charakter  $(\lambda)$  ist für jeden der  $\lambda$  gleichen Werthe von  $y$  die Grösse  $y - b$  proportional mit  $(x - a)^{\frac{1}{\lambda}}$ ; jeder der  $\lambda$  zugehörigen Werthe von  $(F'x)_y$  aber ist  $= F'_{10}$ , d. h. endlich; folglich ist auch  $D_1(x)$  für  $x = a$  endlich und von 0 verschieden, d. h.  $x = a$  ist keine Wurzel von  $D_1(x) = 0$ .
- 2) In einem singulären Punkt  $(a, b)$  vom Charakter  $(\mu)$  ist für jeden der  $\mu$  gleichen Werthe von  $y$  die Grösse  $y - b$  proportional mit  $x - a$  und jeder der  $\mu$  zugehörigen Werthe von  $(F'x)_y$  proportional mit  $(x - a)^{\mu-1}$ ; folglich ist für  $x = a$   $D_1(x)$  proportional

mit  $(x - a)^{\mu(\mu-1)}$ , d. h.  $x = a$  ist eine  $\mu(\mu - 1)$ -fache Wurzel von  $D_1(x) = 0$ .

- 3) Für einen singulären Punkt  $(a, b)$  vom Charakter  $(\nu, \kappa)$  zeigt man durch dieselben Schlüsse, wie früher für  $D(x) = 0$ , dass  $x = a$  auch für  $D_1(x) = 0$  eine  $\nu^2 - \kappa$ -fache Wurzel ist.

Das Verhalten von  $D_1(x)$  und von  $D(x)$  ist hiernach für die singulären Punkte vom Charakter  $(\lambda)$  ein verschiedenes, für die Punkte vom Charakter  $(\mu)$  oder  $(\nu, \kappa)$  aber das gleiche, wie dies schon aus den analytischen Bedingungen (5 und 7 § 4) für diese Punkte folgt, die für die ersteren Punkte unsymmetrisch, für die letzteren aber symmetrisch in Bezug auf  $x$  und  $y$  sind.

Diese Untersuchung dient nun zur Trennung der kritischen Punkte in folgender Weise:

Die  $x$ -Ordinaten der Punkte vom Charakter  $(\mu)$  oder  $(\nu, \kappa)$  sind die gemeinsamen Wurzeln von  $D(x) = 0$  und  $D_1(x) = 0$ ; sie treten in beiden Gleichungen in gleicher Ordnung auf.

Um sie zu erhalten suche man durch Division den gemeinsamen Factor  $\mathfrak{Q}(x)$  von  $D(x)$  und  $D_1(x)$ , der sich auf die Form bringen lässt  $\mathfrak{Q}(x) = X_1 X_2^2 \dots X_q^q$ , wo in  $X_i^i$  die  $i$ -fachen Factoren von  $\mathfrak{Q}(x)$  zusammengefasst sind, und bilde durch Aufsuchen des grössten gemeinsamen Theilers von  $\mathfrak{Q}(x)$  und  $\frac{d\mathfrak{Q}}{dx}$  den Ausdruck  $\mathfrak{Q}_1(x) = X_1 X_2 \dots X_q$ . Dann entsprechen die Wurzeln der Gleichung  $\mathfrak{Q}_1(x) = 0$ , die nach Voraussetzung (D) S. 49 sämmtlich verschieden sind, eindeutig den verschiedenen Punkten  $(\mu)$  und  $(\nu, \kappa)$ .

Die  $x$ -Ordinaten der Punkte vom Charakter  $(\lambda)$  sind die Wurzeln von  $D(x) = 0$ , welche nicht der Gleichung  $D_1(x) = 0$  genügen.

Sucht man daher den Quotienten  $D(x) : \mathfrak{Q}(x) = L(x)$  und bringt denselben auf die Form  $L(x) = \mathfrak{L}_1 \mathfrak{L}_2^2 \dots \mathfrak{L}_\sigma^\sigma$ , wo wieder in  $\mathfrak{L}_i^i$  die  $i$ -fachen Factoren von  $L(x)$  zusammengefasst sind und bildet aus  $L(x)$  den Ausdruck  $L_1(x) = \mathfrak{L}_1 \mathfrak{L}_2 \dots \mathfrak{L}_\sigma$ , so entsprechen die Wurzeln der Gleichung  $L_1(x) = 0$ , die wieder nach Voraussetzung (D) sämmtlich verschieden sind, eindeutig den verschiedenen Punkten  $(\lambda)$ .

Aus dieser Betrachtung folgt zugleich, dass sich ebenso, wie  $D(x)$  und  $D_1(x)$  auch  $\mathfrak{Q}(x)$ ,  $\mathfrak{Q}_1(x)$ ,  $L(x)$ ,  $L_1(x)$  auf rationalem Wege aus  $F(x, y) = 0$  bilden lassen und dass die Coefficienten dieser Functionen rationale Functionen der Coefficienten von  $F(x, y)$  sind. Damit hat man den Satz:

(V) Die singulären Punkte  $(\lambda)$  entsprechen eindeutig den Wurzeln von  $I_1(x) = 0$ , die singulären Punkte  $(\mu)$  und  $(\nu, \kappa)$  eindeutig den Wurzeln von  $\mathfrak{L}_1(x) = 0$ . Die Functionen  $I_1(x)$  und  $\mathfrak{L}_1(x)$  ergeben sich durch rationale Operationen aus  $F(x, y) = 0$  und ihre Coefficienten sind rationale Functionen der Coefficienten von  $F(x, y) = 0$ .

Es bleiben noch die  $y$ -Ordinaten der betrachteten kritischen Punkte zu bestimmen.

Die Punkte  $(\mu)$  und  $(\nu, \kappa)$  sind Werthepaare  $(x, y)$ , die gleichzeitig den drei Gleichungen  $F(x, y) = 0$ ,  $F''(y) = 0$ ,  $F''(x) = 0$  genügen. Macht man  $F(x, y) = 0$  homogen durch die Substitution  $x:z$  und  $y:z$  für  $x$  und  $y$ , so treten an Stelle dieser Gleichungen die folgenden

$$F'(x) = 0, \quad F'(y) = 0, \quad F'(z) = 0. \quad (8)$$

Die Elimination von  $y$  führt auf die beiden Gleichungen  $D\left(\frac{x}{z}\right) = 0$  und  $D_1\left(\frac{x}{z}\right) = 0$  und weiter auf die Gleichung  $\mathfrak{L}_1\left(\frac{x}{z}\right) = 0$ , deren Wurzeln eindeutig den Punkten  $(\mu)$  und  $(\nu, \kappa)$  entsprechen. Auf demselben Wege wie  $\mathfrak{L}_1 = 0$  erhält man aus (8) durch Elimination von  $x$  eine Gleichung  $\mathfrak{M}_1\left(\frac{y}{z}\right) = 0$  und durch Elimination von  $z$  eine Gleichung  $\mathfrak{N}_1\left(\frac{y}{x}\right) = 0$ . Diese Gleichungen sind von demselben Grade wie  $\mathfrak{L}_1 = 0$  und ihre Wurzeln entsprechen eindeutig den Punkten  $(\mu)$  und  $(\nu, \kappa)$ , also auch eindeutig den Wurzeln von  $\mathfrak{L}_1 = 0$ . Hieraus folgt, wenn man wieder  $z = 1$  setzt, dass die Gleichungen  $\mathfrak{M}_1(y) = 0$  und  $\mathfrak{N}_1\left(\frac{y}{x}\right) = 0$ , falls man in die letztere für  $x$  eine bestimmte Wurzel  $x_i$  von  $\mathfrak{L}_1(x) = 0$  einsetzt, nur eine Wurzel  $y$  gemein haben, nämlich den einen nach Voraussetzung (D) zu  $x_i$  gehörigen Werth  $y_i$ . Der gemeinsame Factor beider Gleichungen ist also ein linearer Ausdruck in  $y$ , der, gleich 0 gesetzt,  $y_i$  rational in  $x_i$  darstellt. Hiermit ist die  $y$ -Ordinate eines der Punkte  $(\mu)$  oder  $(\nu, \kappa)$  rational durch die zugehörige  $x$ -Ordinate ausgedrückt.

Die Punkte  $(\lambda)$  sind Werthepaare  $(x, y)$ , welche  $F(x, y) = 0$  und  $F''(y) = 0$ , aber nicht  $F''(x) = 0$  genügen. Macht man die beiden ersten Gleichungen homogen in  $x, y, z$  und eliminirt  $y$ , dann  $x$ , dann  $z$  und setzt wieder  $z = 1$ , so erhält man drei Gleichungen bez. in  $x, y$  und  $\frac{y}{x}$ . Reducirt man dieselben auf einfache Wurzeln und scheidet durch Division bez. mit  $\mathfrak{L}_1(x)$ ,  $\mathfrak{M}_1(y)$ ,  $\mathfrak{N}_1\left(\frac{y}{x}\right)$  die den

Punkten  $(u)$  und  $(v, z)$  entsprechenden Wurzeln ab, so erhält man drei Gleichungen  $L_1(x) = 0$ ,  $M_1(y) = 0$ ,  $N_1\left(\frac{y}{x}\right) = 0$ , deren Grad der gleiche und deren Wurzeln eindeutig den Punkten  $(\lambda)$  entsprechen. Die erste derselben ist die früher gefundene Gleichung  $L_1(x) = 0$ . Die beiden anderen haben für jede Wurzel  $x = x_i$  von  $L_1(x) = 0$  eine Wurzel  $y$  gemein, nämlich den nach Voraussetzung (D) zu  $x_i$  gehörigen Werth  $y_i$ . Daher drückt sich auch die  $y$ -Ordinate eines Punktes  $(\lambda)$  rational durch die zugehörige  $x$ -Ordinate aus. Dies gibt den Satz:

(VI) Die  $y$ -Ordinate eines jeden Punktes  $(\lambda)$  oder  $(u)$  oder  $(v, z)$  drückt sich rational durch die zugehörige  $x$ -Ordinate aus.

Hieraus folgt unmittelbar:

(VII) Die rationalen und symmetrischen Functionen der Coordinaten der Punkte  $(\lambda)$ ,  $(u)$ ,  $(v, z)$  drücken sich rational aus durch die Coefficienten der Gleichung  $F(x, y) = 0$ .

Denn die genannten Functionen lassen sich nach Satz VI als rationale Functionen der Ordinaten  $x_i$  der betreffenden Punkte allein darstellen und folglich mit Hülfe der Gleichungen  $\mathfrak{L}_1(x) = 0$  und  $L_1(x) = 0$  auch als rationale Functionen der Coefficienten von  $F(x, y)$ .

## § 6. Die in der Verzweigungsfläche eindeutigen und regulären Functionen.<sup>1)</sup>

Wir schliessen dies Kapitel mit der Herleitung eines für die späteren Untersuchungen fundamentalen Satzes. Zum leichteren Verständniss desselben sei an den entsprechenden Satz erinnert, der sich auf eine complexe Variable  $z$  in der im Unendlichen geschlossenen  $z$ -Ebene bezieht.

Nennt man eine eindeutige Function von  $z$  regulär, wenn sie in der  $z$ -Ebene nur in einer endlichen Zahl von Punkten und in jedem derselben nur in endlicher Ordnung  $\infty$  wird, so gelten bekanntlich die Sätze:

Jede in der  $z$ -Ebene eindeutige und reguläre Function des Ortes ist eine rationale Function von  $z$  und, wenn sie in keinem Punkt  $\infty$  wird, eine Constante; und umgekehrt:

<sup>1)</sup> Riemann, Ges. W. S. 101. Prym, Journ. für Math. Bd. 83. S. 251 ff. (1877).

Eine rationale Function der complexen Variabeln  $z$ , also eine Function von der Form  $M(z):N(z)$ , wo  $M$  und  $N$  ganze rationale Functionen in  $z$  sind, ist eine in der  $z$ -Ebene eindeutige und reguläre Function des Ortes.

Entsprechende Sätze gelten nun für Functionen von zwei durch eine Gleichung  $F(x, y) = 0$  verbundene Variabeln. Man nennt eine Function von  $x$  eindeutig in der zu  $y$  gehörigen Verzweigungsfläche  $T$  (nach Riemann auch verzweigt wie  $T$ ), wenn alle in der Fläche von einem Punkt zu einem andern führenden Wege, die nicht durch einen kritischen Punkt hindurchgehen, von demselben Anfangswerth zu demselben Endwerth der Function führen. Man nennt ferner eine in  $T$  eindeutige Function von  $x$  regulär in  $T$ , wenn sie nur in einer endlichen Zahl von Punkten in  $T$  und in jedem derselben nur in endlicher Ordnung  $\infty$  wird. Wir halten ferner die Voraussetzungen (A), (B), (C) des § 4 (S. 39) fest, ebenso die in § 2 S. 24 gegebene Definition der unendlich kleinen Grössen, nach welcher in einem Punkt  $(a, b)$  von  $T$ , der kein Verzweigungspunkt ist, die Grösse  $x - a$ , dagegen in einem  $\lambda - 1$ -fachen Verzweigungspunkt

$(a, b)$  die Grösse  $(x - a)^{\frac{1}{\lambda}}$  und in jedem der  $n$  Punkte  $(x = \infty, y = \infty)$  der Fläche  $T$  die Grösse  $x^{-1}$  als unendlich klein von der ersten Ordnung gilt. Wir rechnen ferner einen Punkt, in dem eine Function  $= \infty^p$  oder  $= 0^p$  wird, bez. für  $p \infty^1$  oder  $p 0^1$  Punkte der Function. Alsdann lautet der erste Satz:

(I) Ist  $F(x, y) = 0$  eine irreducible Gleichung, so ist jede in der zugehörigen Verzweigungsfläche  $T$  von  $y$  eindeutige und reguläre Function  $\eta$  eine rationale Function der beiden Variabeln  $(x, y)$ .<sup>1)</sup>

Es wird vorausgesetzt, dass die Function  $\eta$  verzweigt sei wie  $T$ , dass sie also in jedem Punkt  $(x = a, y = b)$ , der kein Verzweigungspunkt ist, nach ganzen Potenzen von  $x - a$ , in einem  $\lambda - 1$ -fachen Verzweigungspunkt  $(x = a, y = b)$  dagegen nach ganzen Potenzen von  $(x - a)^{\frac{1}{\lambda}}$  entwickelbar sei, ferner, dass diese Entwicklung, wenn

1) Eine in der  $z$ -Ebene eindeutige und reguläre Function von  $z$  ist bekanntlich eine ganze rationale Function von  $z$ , wenn sie nur in dem Punkte  $z = \infty$  unendlich wird. Damit die Function  $\eta$  eine ganze rationale Function von  $(x, y)$  sei oder sich, mit Hilfe von  $F(x, y) = 0$  in eine solche Function verwandeln lasse, ist nothwendig, dass sie nur im Punkt  $(x = \infty, y = \infty)$  unendlich wird; diese Bedingung ist aber nicht hinreichend, wenn  $F(x, y) = 0$  singuläre Punkte hat (s. § 8).

die Function  $\eta$  im Punkte  $x = a$  von der  $p^{\text{ten}}$  Ordnung  $\infty$  ist, im ersten Falle mit  $(x - a)^{-p}$ , im zweiten Falle mit  $(x - a)^{\frac{-p}{2}}$  als niederster Potenz beginne. Weiter ist anzunehmen, dass in einem Punkte  $(a, b)$ , in dem sich zwei oder mehr Blätter berühren, ohne zusammenzuhängen (s. S. 20), der Werth der Function  $\eta$  für jedes dieser Blätter ein anderer sein kann, dass er z. B. auch für einige dieser Blätter endlich, für andere  $\infty$  sein kann. Dasselbe ist auch vorläufig für die Punkte  $(x = \infty, y = \infty)$  der Fläche, in denen sich die  $n$  Blätter berühren, anzunehmen, obwohl der folgende Beweis und der analytische Ausdruck der Function zeigen wird, dass für die Punkte  $(x = \infty, y = \infty)$  die Function in allen Blättern gleichzeitig entweder 0 oder endlich oder  $\infty$  ist.

Es seien hiernach die  $\infty$  Punkte der Function  $\eta$  und die zugehörigen Ordnungszahlen gegeben in folgender Weise.

In einem Punkte  $(x = a_i, y = b_i)$  ohne Verzweigung sei für das zugehörige Blatt

$$(1) \quad \eta = \infty^{r_i} \quad (i = 1, 2, \dots, q).$$

In einem  $(\lambda_k - 1)$ -fachen Verzweigungspunkte  $(x = \alpha_k, y = \beta_k)$  sei für die  $\lambda_k$  zusammenhängenden Blätter

$$(2) \quad \eta = \infty^{r_k} \quad (k = 1, 2, \dots, p).$$

Im Punkt  $(x = \infty, y = \infty)$  sei für das  $l^{\text{te}}$  Blatt

$$(3) \quad \eta = \infty^{r_l} \quad (l = 1, \dots, n).$$

Bezüglich der Zahlen  $r_1, \dots, r_n$  nehmen wir an, dass dieselben ebensowohl 0, wie  $\pm$  ganze Zahlen sein können, so dass die Gesamtordnung  $r$  des  $\infty$  werdens in dem Punkte  $(x = \infty, y = \infty)$ , bestimmt ist durch  $r = r_1 + \dots + r_n$ .

Der Beweis des Satzes I zerfällt in zwei Theile. Zuerst zeigt man, dass die Function  $\eta$ , wenn sie in  $\nu$  Punkten der Fläche  $T$  je  $= \infty^1$  wird, die Wurzel einer Gleichung  $\Phi(\eta, x) = 0$  ist, die in  $\eta$  rational und ganz vom  $n^{\text{ten}}$ , in  $x$  rational und ganz vom  $\nu^{\text{ten}}$  Grade ist.

Sind nämlich

$$(4) \quad \eta_1 = \varphi_1(x), \dots, \eta_n = \varphi_n(x)$$

die  $n$  Functionswerthe, die  $\eta$  für denselben Werth von  $x$  annimmt und ist  $\xi$  eine beliebige, von  $x$  unabhängige Grösse, so ist die Function



$$P = (\xi - \eta_1) (\xi - \eta_2) \dots (\xi - \eta_n) \quad (5)$$

eine rationale, gebrochene Function von  $x$ . Sie ist nämlich erstens eine eindeutige Function von  $x$ . Denn das Umkreisen eines beliebigen Punktes der  $x$ -Ebene führt die Function  $P$  auf ihren früheren Werth zurück, da die Werthe  $\eta_1, \dots, \eta_n$  entweder ungeändert bleiben oder nur eine Vertauschung erfahren, bei der  $P$  ungeändert bleibt. Sie wird zweitens in der  $x$ -Ebene nach den obigen Festsetzungen nur in einer endlichen Zahl von Punkten und in jedem derselben nur in endlicher Ordnung  $\infty$ .

Aus der gebrochenen, rationalen Function  $P$  von  $x$  leitet man eine ganze, rationale Function von  $x$  ab durch Multiplication mit einem passenden Factor, der sich aus dem Verhalten von  $P$  in den obigen Punkten folgendermassen bestimmt.

Zunächst ist nach (1) in dem Punkte  $(x = a_i, y = b_i)$ , wenn  $\eta_i$  der zugehörige, unendlich werdende Zweig ist,  $\xi - \eta_i$  proportional mit  $(x - a_i)^{-p_i}$  oder es bleibt  $(\xi - \eta_i) (x - a_i)^{p_i}$  endlich; folglich wird

$$P(x - a_1)^{p_1} \dots (x - a_\varrho)^{p_\varrho}$$

in keinem der  $\varrho$  Punkte  $(a_1, b_1), \dots, (a_\varrho, b_\varrho)$  unendlich.

Ferner sind nach (2) in dem  $(\lambda_k - 1)$ -fachen Verzweigungspunkt  $(\alpha_k, \beta_k)$ , wenn  $\eta_1, \dots, \eta_{\lambda_k}$  die in ihm zusammenhängenden Zweige der Function  $\eta$  sind, die Werthe  $\xi - \eta_1, \dots, \xi - \eta_{\lambda_k}$  proportional mit  $(x - \alpha_k)^{-\frac{q_k}{\lambda_k}}$ , oder es bleibt  $(\xi - \eta_1) \dots (\xi - \eta_{\lambda_k}) (x - \alpha_k)^{q_k}$  endlich in dem Punkte  $(\alpha_k, \beta_k)$ ; folglich wird

$$P(x - \alpha_1)^{q_1} \dots (x - \alpha_\sigma)^{q_\sigma}$$

in keinem der  $\sigma$  Punkte  $(\alpha_1, \beta_1), \dots, (\alpha_\sigma, \beta_\sigma)$  unendlich.

Endlich ist nach (3) in dem Punkte  $(x = \infty, y = \infty)$  des  $l^{\text{ten}}$  Blattes, wenn  $\eta_i$  der zu demselben gehörige Zweig von  $\eta$  ist, der Werth  $\xi - \eta_i$  proportional mit  $x^{-r_i}$  oder es bleibt  $(\xi - \eta_i) x^{-r_i}$  endlich in dem betrachteten Punkte  $(x = \infty, y = \infty)$ ; folglich ist

$$P x^{-(r_1 + r_2 + \dots + r_n)}$$

endlich für alle Punkte  $(x = \infty, y = \infty)$ .

Fasst man diese Betrachtungen zusammen, so ergibt sich, dass die folgende Function

$$P_1 = (\xi - \eta_1) \dots (\xi - \eta_n) (x - a_1)^{p_1} \dots (x - a_\varrho)^{p_\varrho} (x - \alpha_1)^{q_1} \dots (x - \alpha_\sigma)^{q_\sigma} \quad (6)$$

eine rationale Function von  $x$  ist, die für keinen endlichen Werth von  $x$   $\infty$  wird und die für  $x = \infty$  selber  $\infty$  ist in der Ordnung

$$(7) \quad \sum_{i=1}^p p_i + \sum_{k=1}^a q_k + \sum_{l=1}^n r_l = v.$$

Daher ist  $P_1$  eine ganze, rationale Function der Variablen  $x$  vom Grade  $v$  (7). Zugleich aber ist  $P_1$  eine ganze, rationale Function in  $\xi$  vom Grade  $n$ , die für die Werthe  $\xi = \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$  und für keinen andern Werth verschwindet. Bezeichnet man diese Function  $P_1$  mit

$\Phi(\xi, x)$ , so ist offenbar die Function  $\eta$  die Wurzel der Gleichung

$$(8) \quad \Phi(\eta, x) = b_0 \eta^n + b_1 \eta^{n-1} + \dots + b_{n-1} \eta + b_n = 0,$$

wo die Coefficienten  $b_0, b_1, \dots, b_n$  ganze, rationale Functionen in  $x$  sind, von denen wenigstens einer den Grad  $v$  erreicht. Der Coefficient

$$b_0 = (x - a_1)^{p_1} \dots (x - a_p)^{p_p} (x - \alpha_1)^{q_1} \dots (x - \alpha_n)^{q_n}$$

ist bei unseren Voraussetzungen (1, 2, 3) nur vom Grade  $v - \sum_{l=1}^n r_l$ .

Die algebraische Gleichung (8) ist entweder selber unzerfällbar, oder eine Potenz einer unzerfällbaren Gleichung. Denn, wäre  $\Phi(\eta, x)$  das Product von zwei oder mehreren verschiedenen, unzerfällbaren Factoren, also etwa  $= \Phi_1(\eta, x) \cdot \Phi_2(\eta, x)$ , so wäre  $\Phi_1(\eta, x)$  gleich 0 für einen Theil der Wurzeln (4), nämlich für  $\eta_1 = \varphi_1(x), \dots, \eta_n = \varphi_n(x)$ , also  $\Phi_1(\eta, x)$  eine Function von  $x$ , die in einem Theil der Fläche  $T$  verschwindet. Da aber  $T$  zusammenhängend ist und  $\Phi_1(\eta, x)$  als Function von  $x$  sich durch Reihenentwicklung über den ganzen übrigen Theil von  $T$  fortsetzen lässt, so folgt, dass  $\Phi_1(\eta, x)$  in der ganzen Fläche  $T$  gleich 0 sein muss. Dasselbe würde von  $\Phi_2(\eta, x)$  gelten. Die zwei unzerfällbaren Functionen  $\Phi_1(\eta, x)$  und  $\Phi_2(\eta, x)$  würden also für eine unendliche Zahl von Werthepaaren  $(\eta, x)$  gleichzeitig verschwinden. Dies ist nur möglich, wenn die eine durch Multiplication mit einer Constanten aus der anderen erhalten wird. (q. e. d.) Wir setzen im Folgenden die Function  $\eta$  von der Beschaffenheit voraus, dass die Gleichung  $\Phi(\eta, x) = 0$  unzerfällbar ist.

Die vorstehenden Betrachtungen führen nun zweitens zu dem Nachweis, dass die Function  $\eta$  eine rationale Function der beiden durch die Gleichung  $F(x, y) = 0$  verbundenen Grössen  $(x, y)$  ist<sup>1)</sup>.

1) Vgl. Briot, Théorie des fonct. Abel. S. 173 ff. 1879.



d. h. die Grössen  $A_1, \dots, A_{n-1}$  sind rationale Functionen in  $x$  und  $y_1$ . Trägt man diese Werthe in die Gleichung (11) ein, so stellt sich auch  $\eta_1$  als rationale Function von  $x$  und  $y_1$  dar. Da nun  $y_1$  einen beliebigen Werth von  $y$  und  $\eta_1$  den entsprechenden Werth von  $\eta$  bezeichnet, so folgt, dass die Function  $\eta$  eine rationale Function von  $(x, y)$  ist, die nach (11) und (12) die Form erhält:

$$(13) \eta = \frac{a_0 R_{n-1} + (a_0 y + a_1) R_{n-2} + \dots + (a_0 y^{n-1} + a_1 y^{n-2} + \dots + a_{n-1}) R_0}{n a_0 y^{n-1} + (n-1) a_1 y^{n-2} + \dots + a_{n-1}},$$

wo also der Nenner grade die Function  $F'(y)$  ist. Man kann dem Ausdruck (13) leicht noch eine andere Form geben, in der an Stelle des Nenners  $F'y$  die Discriminante  $D(x)$  von  $F(x, y)$  nach  $y$  tritt, während der Zähler von derselben Form in Bezug auf  $x$  und  $y$  ist wie in (13).

An den Satz I schliessen sich noch zwei wichtige Zusätze an nämlich:

- (Ia) Eine in  $T$  eindeutige und reguläre Function oder auch eine rationale Function der Variabeln  $(x, y)$ , die in keinem Punkte in  $T \infty$  wird, ist eine Constante.

Denn wird die in (I) betrachtete Function  $\eta$  in keinem Punkte von  $T \infty$ , so ist in (8)  $\nu = 0$  und folglich ist  $\eta$  eine Constante. (q.e.d.)

- (Ib) Zwei in  $T$  eindeutige und reguläre Functionen oder auch zwei rationale Functionen der Variabeln  $(x, y)$ , welche in den nämlichen Punkten und in jedem derselben von der nämlichen Ordnung 0 und  $\infty$  werden, können sich nur um einen constanten Factor unterscheiden.

Denn der Quotient von zwei solchen Functionen ist eine rationale Function von  $(x, y)$ , die in keinem Punkte von  $T \infty$  wird, d. h. nach (Ia), er ist eine Constante.

Ein zweiter Satz, die Umkehrung von (I), gibt eine erste Eigenschaft der rationalen Functionen von  $(x, y)$  an, nämlich:

- (II) Eine rationale Function der beiden durch die irreducible Gleichung  $F(x, y) = 0$  verbundenen Variabeln  $(x, y)$ , also eine Function von der Form

$$(14) \quad \eta = \frac{M(x, y)}{N(x, y)},$$

wo  $M$  und  $N$  ganze, rationale Functionen von  $(x, y)$  sind, ist eine in der Verzweigungsfläche  $T$  eindeutige und reguläre Function des Ortes.

Wir geben hier nur einen kurzen Beweis dieses Satzes und verweisen zur Ergänzung auf die ausführliche Untersuchung der rationalen Functionen von  $(x, y)$ , ihrer 0- und  $\infty$ -Punkte und ihrer Bildung aus denselben im zweiten Abschnitt.

Es ist nachzuweisen, dass die Function  $\eta$  (14) eindeutig in  $T$  ist und dass sie in  $T$  nur in einer endlichen Anzahl von Punkten und in jedem derselben nur in endlicher Ordnung  $\infty$  wird.

Sind zunächst  $y_i, y_k$  zwei demselben  $x$  zugehörige Werthe von  $y$  und  $\eta_i, \eta_k$  die entsprechenden Werthe von  $\eta$ , und führt man  $(x, y)$  auf irgend einem Wege vom Punkt  $(x, y_i)$  zum Punkt  $(x, y_k)$ , so muss auf demselben Wege  $\eta_i$  in  $\eta_k$  übergehen, weil nach (14) jedem Werthe paar  $(x, y)$  nur ein Werth von  $\eta$  entspricht. Lässt man den Punkt  $(x, y)$  verschiedenartige Punkte der Fläche  $T$  umkreisen, so finden für die  $\eta$ -Werthe dieselben Gruppierungen statt, wie für die  $y$ -Werthe. Betrachtet man  $\eta$  (durch Vermittelung von  $F(x, y) = 0$ ) als Function von  $x$  und construirt die Verzweigungsfläche  $T$  dieser Function  $\eta$ , so hat  $T$  dieselben Verzweigungspunkte und Verzweigungsschnitte mit demselben Zusammenhang der Blätter, wie die Verzweigungsfläche  $T$  von  $y$ . Daher nennt Riemann die Gesamtheit der rationalen Functionen von  $(x, y)$  ein System gleichverzweigter Functionen.

Ist ferner  $(x = a, y = b)$  kein Verzweigungspunkt in  $T$ , so hat in der Umgebung desselben für das dem Punkt zugehörige Blatt von  $T$  die Function  $y$  und jede ganzzahlige Potenz von  $y$  eine Entwicklung nach ganzen, positiven Potenzen von  $x - a$ , also eine Entwicklung von demselben Charakter wie  $y$ . Dasselbe gilt von dem Zähler  $M$  und dem Nenner  $N$ , also auch von der Function  $\eta$  (14), wenn  $N$  in dem Punkt  $(a, b)$  von 0 verschieden ist. Verschwindet aber  $N$  in  $(a, b)$ , so geschieht dies stets in endlicher Ordnung und folglich wird auch die Function  $\eta$  in  $(a, b)$  nur in endlicher Ordnung  $\infty$ . Ist  $(a, b)$  ein  $\lambda - 1$ -facher Verzweigungspunkt, so treten an Stelle der vorigen Entwicklungen von  $y, M, N$  und  $\eta$  wieder solche von gleichem Charakter, nämlich solche, die nach Potenzen von  $(x - a)^{\frac{1}{\lambda}}$  fortschreiten. Auch hier ist  $\eta$  entweder endlich oder nur in endlicher Ordnung  $\infty$ . Für die Punkte  $(x = \infty, y = \infty)$  in  $T$  haben  $M, N$  und  $\eta$  ebenfalls Entwicklungen von demselben Charakter wie  $y$ , d. h. nach ganzen Potenzen von  $x$ ; auch in ihnen wird die Function  $\eta$ , wenn sie nicht 0 oder endlich ist, nur in endlicher Ordnung  $\infty$ .

## Zweiter Abschnitt.

### Die rationalen Functionen von $(x, y)$ .

In § 6 wurde durch Betrachtungen, die der Functionentheorie angehören, gezeigt, dass unter Voraussetzung der irreduciblen Gleichung  $F(x, y) = 0$  eine in der Verzweigungsfläche  $T$  von  $y$  eindeutige und reguläre Function identisch ist mit einer rationalen Function der beiden Variablen  $(x, y)$

$$(1) \quad M(x, y) : N(x, y),$$

wo  $M$  und  $N$  ganze, rationale Functionen sind.

Es sollen jetzt unter Voraussetzung der Gleichung  $F(x, y) = 0$  direct die Eigenschaften einer rationalen Function der Form (1) und ihre Bildung aus gewissen Elementen untersucht werden. Dieser Stoff ist in folgender Weise gegliedert:

§ 7—9 enthält die Untersuchung der Nullpunkte einer ganzen, rationalen Function von  $(x, y)$  und der Kriterien für eine ganze, rationale Function;

§ 10 und 11 die Untersuchung der Null- und Unendlichkeitspunkte einer gebrochenen, rationalen Function von  $(x, y)$  und der Abhängigkeit dieser Punkte von einander;

§ 12 und 13 gibt die Bildungsweise der rationalen Functionen von  $(x, y)$  aus gewissen Elementen und die Abhängigkeit dieser Elemente von einander.

Wir schicken noch folgende Bemerkungen voraus. Die Untersuchung ist an sich rein algebraisch. Um aber den algebraischen Processen und Resultaten eine kurze Fassung zu geben, benutzen wir die in § 4 erwähnte geometrische Ausdrucksweise, nach welcher  $F(x, y) = 0$  eine algebraische Curve vom Grade  $n$  und vom Geschlecht  $p$  ist und den  $0^1$  und  $\infty^1$  Punkten einer Function (1) die Schnittpunkte von  $F(x, y) = 0$  mit den Curven  $M(x, y) = 0$  und  $N(x, y) = 0$  entsprechen, zu denen noch der Punkt  $(x = \infty, y = \infty)$  treten kann.

Da ferner die Untersuchung der rationalen Functionen von  $(x, y)$  unter allgemeinen Voraussetzungen eine grössere, die Uebersicht erschwerende Ausdehnung erfordern würde, so lassen wir hier und im Folgenden Beschränkungen eintreten, nämlich im Bezug auf  $F(x, y) = 0$  die, dass nur einfache Verzweigungspunkte und von singulären Punkten im Endlichen nur die einfachsten, nämlich Doppelpunkte auftreten und in Bezug auf die Functionen  $M$  und  $N$  die, dass ihr Verhalten in diesen Punkten von besonders einfacher, noch näher zu bestimmender Art sei. Doch soll die Untersuchung unter diesen beschränkenden Voraussetzungen so geführt werden, dass eine Verallgemeinerung der Voraussetzungen den Gedankengang ungeändert lässt und nur ein tieferes Eingehen auf die singulären Punkte von  $F(x, y) = 0$  und das Verhalten von  $M$  und  $N$  in denselben erfordert.

### § 7. Die Nullpunkte der ganzen, rationalen Function.

Wir halten bez.  $F(x, y) = 0$  die früheren Voraussetzungen (A), (B), (C) S. 39 fest und beginnen mit der Untersuchung der Nullpunkte einer ganzen, rationalen Function  $N(x, y)$ . Dieselbe sei vom Grade  $\nu$ , d. h. so beschaffen, dass für jedes Glied  $x^i y^k$  die Dimension  $i + k \leq \nu$  sei.

Zur Vereinfachung der Beweise sei die weitere Voraussetzung hinzugefügt,

(E) dass zwei endliche und verschiedene, gemeinsame Werthepaare von  $F(x, y) = 0$  und  $N(x, y) = 0$  weder gleiches  $x$  noch gleiches  $y$  besitzen,

oder geometrisch, dass von den Schnittpunkten der beiden Curven  $F = 0$  und  $N = 0$  nicht zwei auf einer zur  $x$ - oder  $y$ -Axe parallelen Linie liegen.

Diese Voraussetzung (E) ist keine wesentliche Beschränkung, sondern lässt sich gleichzeitig mit (A, B, C) durch eine lineare Transformation der in § 4 angegebenen Art erfüllen.

Es gilt nun der folgende Satz:

(I) Die Zahl der  $0^1$  Punkte einer rationalen Function  $N(x, y)$  vom Grade  $\nu$  in der durch  $F(x, y) = 0$  bestimmten Verzweigungsfläche  $T$  ist  $= n\nu$ ,

oder die Zahl der gemeinsamen Punkte der Curve  $F = 0$  vom Grade  $n$  und der Curve  $N = 0$  vom Grade  $\nu$  ist  $= n\nu^1$ ;  
die Coordinaten dieser Punkte sind alle endlich.

1) Bézout, Mém. Acad. Paris. 1764. S. 288 ff.

Dabei wird, wie immer, ein  $O^p$ -Punkt für  $p$   $O^1$ -Punkte gerechnet.

Um die Zahl der gemeinsamen Punkte der beiden Curven

$$(1) \quad \begin{cases} F(x, y) = a_0 y^n + a_1 y^{n-1} + \dots + a_{n-1} y + a_n = 0, \\ N(x, y) = c_0 y^r + c_1 y^{r-1} + \dots + c_{r-1} y + c_r = 0 \end{cases}$$

zu bestimmen, hat man die Resultante  $X$  von  $F=0$  und  $N=0$  nach  $y$  zu bilden, was in ähnlicher Weise geschieht, wie im § 4 die Bildung der Discriminante von  $F=0$  nach  $y$ . Sind wieder  $y_1, y_2, \dots, y_n$  die  $n$  Wurzeln von  $F(x, y)=0$  in Bezug auf  $y$ , so hat man, abgesehen von einem constanten Factor,

$$(2) \quad X = N(x, y_1) N(x, y_2) \dots N(x, y_n).$$

Demn dies Product ist erstens eine rationale Function von  $x$  allein, weil es sich als rationale und symmetrische Function der  $n$  Wurzeln  $y_i$  rational in den Coefficienten  $a_0, a_1, \dots, a_n$  der ersten Gleichung (1) darstellt; und es ist zweitens eine ganze Function von  $x$ , da es für keinen endlichen Werth von  $x$  unendlich wird, weil nach Voraussetzung (B) S. 39 für endliche Werthe von  $x$  auch die  $n$  Werthe  $y_i$  endlich sind. Da ausserdem das Product (2) für jeden gemeinsamen Punkt von  $F=0$  und  $N=0$  und nur für solche Punkte verschwindet, so ist es identisch mit der Resultante dieser beiden Gleichungen nach  $y$ . Die Zahl der gemeinsamen Punkte von  $F=0$  und  $N=0$  ist der Grad von  $X$  in  $x$  oder die Ordnung, in der  $X \infty$  wird für  $x = \infty$ . Es wird aber für  $x = \infty$  jeder Factor in (2)  $= \infty^r$ , also  $X = \infty^{nr}$ , womit der obige Satz bewiesen ist.

Die Zahl der  $O^1$  Punkte einer ganzen, rationalen Function ist hiernach ebenso gross, wie die der  $\infty^1$  Punkte, da  $N$  in jedem der  $n$  Punkte ( $x = \infty, y = \infty$ ) gleich  $\infty^1$  wird.

Aus (I) folgt weiter der Satz<sup>1)</sup>:

- (II) Eine gebrochene, rationale Function  $M(x, y) : N(x, y)$  wird in ebenso viel Punkten in der Fläche  $T$  oder auf der Curve  $F(x, y) = 0$  null wie unendlich in der ersten Ordnung; die Zahl dieser Punkte heisst die Ordnung der rationalen Function  $M:N$ .

Es sei, wie  $F(x, y)$  vom  $n^{\text{ten}}$ , in gleicher Weise  $M(x, y)$  vom  $\mu^{\text{ten}}$ ,  $N(x, y)$  vom  $\nu^{\text{ten}}$  Grade, so dass nach (I) die Anzahl der  $O^1$  Punkte von  $M$  auf  $F=0$  gleich  $n\mu$ , die von  $N$  auf  $F=0$  gleich  $n\nu$  ist. Ist nun  $\mu = \nu$ , so ist die Zahl der  $\infty^1$  und der  $O^1$  Punkte der Func-

1) Ein zweiter Beweis dieses Satzes findet sich § 14, Satz V.



tion  $M:N$  gleich  $n\mu$  und diese Punkte liegen im Endlichen auf  $F=0$ . Ist  $\mu > \nu$ , so wird  $M:N=0^1$  in den  $n\mu$  Nullpunkten von  $M$  und  $=\infty^1$  in den  $n\nu$  Nullpunkten von  $N$ , ausserdem aber  $=\infty^{\mu-\nu}$  in jedem der  $n$  Punkte  $(x=\infty, y=\infty)$  auf  $F=0$ , d. h. im Ganzen  $=\infty^1$  ebenfalls in  $n\mu$  Punkten. Ist  $\mu < \nu$ , so wird  $M:N=\infty^1$  in den  $n\nu$  Nullpunkten von  $N$  und  $=0^1$  in den  $n\mu$  Nullpunkten von  $M$ , ausserdem aber  $=0^{\nu-\mu}$  in jedem der  $n$  Punkte  $(x=\infty, y=\infty)$  auf  $F=0$ , d. h. im Ganzen  $=0^1$  ebenfalls in  $n\nu$  Punkten. Es ist also in allen Fällen die Zahl der  $\infty^1$  und der  $0^1$  Punkte von  $M:N$  endlich und gleich gross. Fallen einige der  $0^1$  Punkte von  $M$  mit  $0^1$  Punkten von  $N$  zusammen, so ist die Ordnung von  $M:N$  nicht mehr die eben bestimmte, sondern um die Zahl dieser zusammenfallenden  $0^1$  Punkte von  $M$  und  $N$  geringer. Auch die Zahl der Punkte auf  $F=0$ , in welchen  $M:N$  einen bestimmten Werth  $A$  annimmt, ist gleich der Zahl der  $0^1$  oder  $\infty^1$  Punkte, wie sich leicht durch Betrachtung der Function  $(M-AN):N$  ergibt.

Wir kehren zurück zur ganzen, rationalen Function  $N$  und zur Resultante  $X$  und untersuchen, in welcher Weise die Wurzeln von  $X=0$  den gemeinsamen Punkten von  $F=0$  und  $N=0$  entsprechen. Ist ein gemeinsamer Punkt  $(x_1, y_1)$  ein einfacher Punkt von  $F=0$  und ebenso von  $N=0$ , so ist in ihm  $F$  und  $N$  und folglich auch  $X$  proportional mit  $(x-x_1)$ , d. h. dem Punkte  $(x_1, y_1)$  entspricht eine einfache Wurzel  $x_1$  von  $X=0$ . Hieran ändert sich nichts, wenn der Schnittpunkt  $(x_1, y_1)$  zugleich Verzweigungspunkt ist, weil dann für jeden

der beiden gleichen Werthe von  $y$   $N(x, y)$  proportional mit  $(x-x_1)^{\frac{1}{2}}$ , also nach (2)  $X$  wieder proportional mit  $x-x_1$  wird. Ist dagegen ein Punkt  $(x_1, y_1)$  einfacher Punkt von  $N=0$  und Doppelpunkt von  $F=0$ , so wird für jeden der beiden gleichen Werthe von  $y$   $N$  proportional mit  $x-x_1$ , also  $X$  proportional mit  $(x-x_1)^2$ , d. h. dem Punkt  $(x_1, y_1)$  entspricht eine Doppelwurzel  $x_1$  von  $X=0$ . Dasselbe gilt, wenn  $(x_1, y_1)$  einfacher Punkt von  $F$  und Doppelpunkt von  $N$  ist, weil dann in ihm  $N$  und ebenso  $X$  proportional mit  $(x-x_1)^2$  ist. Berühren sich endlich die Curven  $F$  und  $N$  in einem Punkte  $(x_1, y_1)$ , so ist in ihm  $N$  und ebenso  $X$  proportional mit  $(x-x_1)^2$ , d. h. dem Punkt entspricht ebenfalls eine Doppelwurzel von  $X=0$ . Beschränkt man sich auf diese einfachsten Fälle, so hat man den Satz:

(III) Jedem gemeinsamen Werthepaar der Gleichungen  $F=0$  und  $N=0$  entspricht eine einfache oder mehrfache Wurzel

der Resultante  $X=0$ . Ist der gemeinsame Punkt einfacher Punkt für beide Curven, so ist die entsprechende Wurzel von  $X=0$  einfach. Ist dagegen der gemeinsame Punkt entweder einfacher Berührungspunkt von  $F$  und  $N$  oder ein Schnittpunkt von  $F$  und  $N$ , der für die eine Curve einfacher, für die andere Curve Doppelpunkt ist, so ist die entsprechende Wurzel von  $X=0$  eine Doppelwurzel.

Für die weiteren Betrachtungen ist  $X$  als Function von  $x$  wirklich darzustellen. Durch Elimination von  $y$  aus den Gleichungen (1) erhält man  $X$  in Gestalt einer Determinante, deren Reihen  $n+v$  Elemente enthalten:

$$(3) \quad X = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & . & . & a_n & 0 & 0 & . & . & . & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & . & . & a_{n-1} & a_n & 0 & . & . & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & a_0 & . & . & . & . & . & a_n & 0 \\ 0 & 0 & . & . & . & a_0 & . & . & . & . & a_{n-1} & a_n \\ c_0 & c_1 & . & . & . & . & c_r & 0 & . & . & 0 & 0 \\ 0 & c_0 & . & . & . & . & c_{r-1} & c_r & . & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & . & . & c_0 & . & . & . & c_r & 0 \\ 0 & 0 & . & . & . & . & . & . & c_0 & . & c_{r-1} & c_r \end{vmatrix}.$$

Hieraus ergibt sich für  $X$  eine weitere wichtige Form. Multipliziert man die Verticalreihen der Determinante (3) bezüglich mit

$$y^{n+r-1}, \quad y^{n+r-2}, \quad . \quad . \quad y, \quad 1$$

und addirt alle zur letzten Verticalreihe, so werden die Elemente derselben

$$Fy^{r-1}, \quad Fy^{r-2}, \quad . \quad . \quad Fy, \quad F, \quad Ny^{n-1}, \quad Ny^{n-2}, \quad . \quad . \quad Ny, \quad N$$

und man erhält für  $X$  die Form

$$(4) \quad X = AF + CN,$$

wo  $A$  und  $C$  ganze, rationale Functionen in  $(x, y)$  sind.

Wir fragen nunmehr nach der Lage oder den Coordinaten  $(x, y)$  der gemeinsamen Punkte von  $F=0$  und  $N=0$ .<sup>1)</sup> Dieselben ergeben sich ähnlich wie in § 5 die Coordinaten der kritischen

1) Nöther, Math. Ann. Bd. 23. S. 311 ff. (1883) für allgemeine Voraussetzungen.

Punkte von  $F = 0$ . Nach Satz (III) zerfällt der Ausdruck (3) für  $X$  in zwei Factoren, derart, dass

$$X = X_1 X_2^2,$$

wo in  $X_1$  die einfachen, in  $X_2$  die Doppelwurzeln von  $X = 0$  zusammengefasst sind. Die Ausdrücke für  $X_1$  und  $X_2$  erhält man aus (3) auf rationale Weise.  $X_2$  nämlich ist der grösste gemeinsame Theiler von  $X = 0$  und  $\frac{\partial X}{\partial x} = 0$  und  $X_1$  der Quotient von  $X$  durch  $X_2^2$ .

Sind die Gleichungen  $X_1 = 0$  und  $X_2 = 0$  gelöst, so hat man die  $x$ -Ordinaten der gemeinsamen Punkte von  $F = 0$  und  $N = 0$ . Die zugehörigen  $y$ -Ordinaten erhält man in bekannter Weise rational in  $x$ . Multiplicirt man nämlich die erste der Gleichungen (1) mit  $y^{r-2}, y^{r-3}, \dots, y, 1$ , die zweite mit  $y^{n-2}, y^{n-3}, \dots, y, 1$  und schreibt je die erste dieser Gleichungen

$$(a_0 y + a_1) y^{n+r-3} + a_2 y^{n+r-4} + \dots + a_n y^{r-2} = 0,$$

$$(c_0 y + c_1) y^{n+r-3} + c_2 y^{n+r-4} + \dots + c_r y^{n-2} = 0,$$

so kann man  $y^{n+r-3}, y^{n+r-4}, \dots, y, 1$  eliminiren und erhält eine Gleichung, linear in  $y$ , aus der sich  $y$  rational in  $x$  ergibt. Ist also  $x_i$  eine Wurzel der Gleichung  $X = 0$ , so stellt sich der zugehörige Werth  $y_i$  dar in der Form  $y_i = R(x_i)$ . Die Function  $R$  ist rational und ihre Coefficienten sind rationale Functionen der constanten Coefficienten von  $F$  und  $N$ . Zugleich folgt, dass man eine rationale und symmetrische Function der Coordinaten  $(x_i, y_i)$  der gemeinsamen Punkte von  $F = 0$  und  $N = 0$  als rationale Function der constanten Coefficienten dieser beiden Gleichungen darstellen kann, ohne vorher die Gleichungen  $X_1 = 0$  und  $X_2 = 0$  zu lösen. Denn eine solche Function lässt sich zuerst mit Hülfe der Gleichungen  $y_i = R(x_i)$  als rationale, symmetrische Function der Grössen  $x_i$  allein ausdrücken, deren Coefficienten rationale Functionen der Coefficienten von  $F$  und  $N$  sind und diese Function geht mit Hülfe von  $X_1 X_2 = 0$  in eine rationale Function der Coefficienten von  $F$  und  $N$  allein über. Dies giebt den Satz:

(IV) Die Bestimmung der Coordinaten  $(x_i, y_i)$  der gemeinsamen Punkte von  $F = 0$  und  $N = 0$  erfordert ausser der Lösung der Gleichungen  $X_1 = 0$  und  $X_2 = 0$  nur rationale Operationen. Die Darstellung einer rationalen und symmetrischen Function der Coordinaten  $(x_i, y_i)$  durch die Coefficienten von  $F$  und  $N$  vollzieht sich in rationaler Weise ohne Lösung der Gleichungen  $X_1 = 0, X_2 = 0$ .

Die Form (4) der Resultante  $X$  dient noch zum Beweis der Umkehrung von (III) oder zum Beweis des Satzes:

(V) Jeder einfachen Wurzel der Gleichung  $X = 0$  entspricht ein einfacher Schnittpunkt der Curven  $F = 0$  und  $N = 0$ , jeder Doppelwurzel entweder ein einfacher Berührungspunkt von  $F$  und  $N$  oder ein Schnittpunkt von  $F$  und  $N$ , der für die eine Curve einfacher, für die andere Doppelpunkt ist.

Ist nämlich  $x = x_1$  eine einfache Wurzel von  $X = 0$ , zu der nach Voraussetzung (E) auch nur ein Werth  $y = y_1$  gehört, so folgt aus der Identität (4), dass der gemeinsame Punkt  $(x = x_1, y = y_1)$  von  $F = 0$  und  $N = 0$  nur einfacher Schnittpunkt dieser beiden Curven ist. Ist dagegen  $x = x_1$  eine Doppelwurzel von  $X = 0$ , so gehört zu derselben nach Voraussetzung (E) nur ein Werth  $y = y_1$  ( $y_1$  ist Doppelwurzel der Gleichung  $Y = 0$  d. h. der Resultante von (1) nach  $x$ ). Nun folgt durch Differentiation der identischen Gleichung (4):

$$dX = AdF + FdA + CdN + NdC.$$

Bezeichnet man das Resultat der Substitution  $(x = x_1, y = y_1)$  in  $X, F, N, A, C$  durch Anhängen des Zeigers 1, so folgt hieraus für  $(x = x_1, y = y_1)$ , da  $dX_1 = 0, F_1 = 0, N_1 = 0$  ist,

$$A_1 dF_1 + C_1 dN_1 = 0.$$

Diese Gleichung ist für alle Werthe von  $dy : dx$  erfüllt; es folgt daher

$$A_1 F'(x_1) + C_1 N'(x_1) = 0, \quad A_1 F'(y_1) + C_1 N'(y_1) = 0$$

und hieraus, wenn  $A_1$  und  $C_1$  nicht gleichzeitig verschwinden, entweder

$$F'(x_1) : F'(y_1) = N'(x_1) : N'(y_1)$$

d. h. die Curven  $F$  und  $N$  berühren sich in  $(x_1, y_1)$ , oder

$$F'(x_1) = F'(y_1) = 0, \quad C_1 = 0$$

d. h.  $F$  hat einen Doppelpunkt in  $(x_1, y_1)$ , oder

$$N'(x_1) = N'(y_1) = 0, \quad A_1 = 0$$

d. h.  $N$  hat einen Doppelpunkt in  $(x_1, y_1)$ .

Ist aber  $A_1 = C_1 = 0$ , so muss einer der drei vorstehenden Fälle ebenfalls eintreten; denn andernfalls hätten  $F$  und  $N$  bloss einfache Schnittpunkte, also könnte nach (III)  $\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)_{x_1}$  nicht  $= 0$  sein, was gegen die Voraussetzung ist. (q. e. d.)

## § 8. Kriterien für eine ganze, rationale Function.

Von besonderer Wichtigkeit für die weiteren Untersuchungen ist die Frage nach den Kriterien dafür, dass eine gebrochene, rationale Function  $M(x, y):N(x, y)$  sich mit Hilfe von  $F=0$  in eine ganze, rationale Function  $G(x, y)$  überführen lasse. Wie die vorstehenden Betrachtungen zeigen, verhalten sich die einfachen Verzweigungspunkte hierbei durchaus wie gewöhnliche einfache Punkte von  $F(x, y)=0$ . Beschränkt man die Singularitäten von  $F=0$ , wie schon bemerkt, auf Doppelpunkte, und setzt voraus, dass  $N$  die Curve  $F$  nicht berühre und durch Doppelpunkte von  $F$  nur einfach hindurchgehe, so gilt der Satz<sup>1)</sup>:

(I) Sind  $M$  und  $N$  ganze, rationale Functionen vom  $\mu^{\text{ten}}$  und  $\nu^{\text{ten}}$  Grade in  $(x, y)$  und ist  $\mu > \nu$ , so sind die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass die rationale Function  $M:N$  sich mit Hilfe von  $F(x, y)$  in eine ganze, rationale Function  $G(x, y)$  verwandeln lasse:

- 1) dass sie nur  $\infty$  wird in den Punkten  $(x = \infty, y = \infty)$ ;
- 2) dass sie in jedem Doppelpunkt von  $F$  für die beiden Zweige den nämlichen Werth annimmt.

Diese Bedingungen sind nothwendig, wie sich daraus ergibt, dass sie für eine ganze Function  $G(x, y)$ , also auch für eine gebrochene Function, die sich durch  $F=0$  in eine ganze Function überführen lässt, stets erfüllt sind. Weniger einfach ist der Beweis dafür, dass diese Bedingungen auch hinreichend sind; um ihn zu führen, geben wir dem Satze (I) die folgende Form:

(Ia) Damit eine gebrochene Function  $M:N$  ( $\mu > \nu$ ) sich mit Hilfe von  $F=0$  in eine ganze Function  $G(x, y)$  verwandeln lasse oder, was dasselbe sagt, damit sich  $M$  auf die Form bringen lasse

$$M = GN + HF, \quad (1)$$

wo  $G$  und  $H$  ganze Functionen sind, ist nothwendig und hinreichend:

- 1) dass  $M=0$  durch alle einfachen Schnittpunkte von  $F=0$  und  $N=0$  mindestens einfach hindurchgeht;
- 2) dass  $M=0$  in einem Doppelpunkt von  $F=0$ , durch den  $N=0$  einfach hindurchgeht, entweder auch einen Doppelpunkt hat oder  $N=0$  berührt.

1) Nöther, Math. Ann. VI, p. 351 ff. (1872) mit allgemeinen Voraussetzungen

Es ist leicht zu sehen, dass der Satz (Ia) sich mit (I) deckt. Denn soll  $M:N$  nicht für ein endliches Coordinatenpaar  $(x, y)$  von  $F \infty$  werden, so muss  $M$  durch jeden einfachen Schnittpunkt von  $F$  und  $N$  hindurchgehen. Ebenso muss  $M$  in jedem Doppelpunkt von  $F$ , durch den  $N$  einfach hindurchgeht, verschwinden. Das genügt indess nicht. Denn in einem solchen Doppelpunkt, in dem  $M$  und  $N$  einfach verschwinden, hat  $M:N$  den Werth

$$\frac{M'(x)dx + M'(y)dy}{N'(x)dx + N'(y)dy}.$$

Soll nun dieser Werth für die beiden in dem Doppelpunkt von  $F$  verschiedenen Quotienten  $dy:dx$  der gleiche sein, so muss, da  $N'(x)$  und  $N'(y)$  von 0 verschieden sind,

entweder  $M'(x) = M'(y) = 0$  sein d. h. es muss  $M$  in dem Punkte ebenfalls einen Doppelpunkt haben,

oder  $M'(x):N'(x) = M'(y):N'(y)$  sein d. h. es muss  $M$  in dem Punkte  $N$  berühren.

Umgekehrt, geht  $M$  durch alle einfachen Schnittpunkte von  $F$  und  $N$  hindurch, so wird  $M:N$  in diesen Punkten nicht  $\infty$ . Geht aber  $N$  durch einen Doppelpunkt von  $F$  einfach hindurch und hat  $M$  in demselben entweder ebenfalls einen Doppelpunkt oder eine Berührung mit  $N$ , so ist für diesen Punkt ausser  $M=0$  und  $N=0$  im ersten Falle  $M'(x) = M'(y) = 0$ , im zweiten Falle  $M'(x):N'(x) = M'(y):N'(y)$  d. h. in beiden Fällen hat  $M:N$  in dem Doppelpunkt für die beiden Zweige den gleichen Werth.

Nach diesen Bemerkungen bleibt nur zu zeigen, dass die im Satz (Ia) aufgestellten Bedingungen auch hinreichend sind dafür, dass sich  $M$  auf die Form (1) bringen lasse. Wir gehen aus von der in (4) § 7 gefundenen Form der Resultante  $X$  von  $F$  und  $N$  in Bezug auf  $y$ :

$$(2) \quad X = AF + CN,$$

in der  $A$  und  $C$  bekannte, ganze Functionen von  $(x, y)$  sind. Bildet man das Product  $AM$  und zieht durch Division aus dem Quotienten  $AM:N$  die etwa in ihm enthaltene, ganze Function von  $y$  heraus, so erhält man

$$(3) \quad AM = UN + W,$$

wo  $U$  und  $W$  ganze, rationale Functionen von  $(x, y)$  und  $W$  vom  $(\nu-1)^{\text{ten}}$  oder niederen Grade in  $y$  ist. Setzt man zur Abkürzung die ganze Function von  $(x, y)$   $UP' + CM = V$ , so folgt aus (2) und (3)

$$(4) \quad XM = VN + WF.$$

Damit  $M:N$  eine ganze Function sei, oder  $M$  in die gewünschte Form (1) übergehe, ist erforderlich, dass die Quotienten  $V:X$  und  $W:X$  ganze Functionen  $G$  und  $H$  von  $(x, y)$  seien. Die eine dieser Bedingungen zieht aber nach (4) die andere nach sich, da  $F$  irreduzibel ist. Aus der Forderung, dass  $W:X$  eine ganze Function  $H$  sei, ergeben sich neue Forderungen für das Verhalten von  $M$  in den gemeinsamen Punkten von  $F'$  und  $N$ . Dabei sind zwei Fälle zu betrachten:

1. Die Resultante  $X=0$  besitze nur einfache Wurzeln.

Nach Satz (V) § 7 haben dann die Curven  $F=0$  und  $N=0$  nur einfache Schnittpunkte. Sei  $(x=x_1, y=y_1)$  ein solcher einfacher Schnittpunkt und seien  $(x=x_1, y=y_1^i)$  ( $i=1, \dots, \nu-1$ ) die  $\nu-1$  Schnittpunkte, welche die Gerade  $x=x_1$  ausser dem Punkte  $(x_1, y_1)$  mit  $N=0$  hat. Dann muss in der Identität (2) für die Punkte  $(x=x_1, y=y_1^i)$  ausser  $X$  und  $N$  nothwendig  $A$  verschwinden, weil in diesen Punkten  $F$  nicht 0 wird nach Voraussetzung (E) § 7. Daher ist nach (3) in diesen Punkten  $W=0$  oder es hat die Gleichung

$$(W)_{x=x_1} = 0 \quad (5)$$

die  $\nu-1$  verschiedenen Wurzeln  $y=y_1^i$  ( $i=1, \dots, \nu-1$ ).

Hat nun  $M$ , wie wir annehmen, die Eigenschaft, dass es durch den Schnittpunkt  $(x_1, y_1)$  von  $F$  und  $N$  ebenfalls hindurchgeht, so kommt zu den  $(\nu-1)$  Wurzeln von (5) noch als  $\nu^{\text{te}}$  Wurzel  $y=y_1$  hinzu, weil in (3) für  $(x_1, y_1)$  zugleich  $M$  und  $N$  verschwinden. Wenn aber die Gleichung (5), die vom  $\nu-1^{\text{ten}}$  Gerade in  $y$  ist,  $\nu$  verschiedene Wurzeln haben soll, so müssen ihre Coefficienten einzeln verschwinden. Es sind also die Coefficienten der Potenzen von  $y$  in  $W$  einzeln durch  $x-x_1$  theilbar. Ebenso ergibt sich, dass  $W$  durch die übrigen Linearfactoren von  $X$  theilbar ist. Hieraus folgt, dass  $W:X$  eine ganze Function in  $(x, y)$  oder dass  $M$  in der Form (1) darstellbar ist. In dem vorliegenden, ersten Falle genügt also zur Herstellung der Gleichung (1) die Bedingung, dass  $M$  durch alle im Endlichen gelegenen Schnittpunkte von  $F$  und  $N$  mindestens einfach hindurchgeht, oder dass  $M:N$  nur in den Punkten  $(x=\infty, y=\infty) \infty$  werde.

2. Fall. Die Gleichung  $X=0$  besitze neben einfachen, noch Doppelwurzeln.

Die Doppelwurzeln von  $X=0$  entstehen nach (III) § 7 dadurch, dass entweder die zwei Curven  $F$  und  $N$  sich einfach berühren oder dass in einem Schnittpunkt die eine Curve einen Doppelpunkt, die andere einen einfachen Punkt besitzt. Eine Berührung von  $F$  und  $N$  wurde ausgeschlossen. Sei also  $x=x_2$  eine Doppelwurzel von  $X=0$ , die

einem Punkte  $(x = x_2, y = y_2)$  entspreche, in dem  $F$  einen Doppelpunkt,  $N$  einen einfachen Punkt hat, so dass für  $(x = x_2, y = y_2)$  die Gleichungen bestehen

$$F_2 = 0, \quad N_2 = 0, \quad F'(x_2) = 0, \quad F'(y_2) = 0.$$

Dann folgt zunächst, wie im ersten Fall, dass  $W$  den Factor  $x - x_2$  besitzt. Man kann aber zeigen, dass  $x - x_2$  ein Doppelfactor von  $W$  ist. Denn bezeichnet man mit  $(x = x_2, y = y_2^i)$ , wo  $i = 1, \dots, \nu - 1$ , die  $(\nu - 1)$  übrigen Schnittpunkte, welche die Gerade  $x = x_2$  ausser  $(x_2, y_2)$  mit  $N = 0$  besitzt und durch Einschliessen in Klammern  $[\ ]$  den Werth der eingeschlossenen Function für einen Punkt  $(x = x_2, y = y_2^i)$ , so folgt aus der Identität (2), dass  $[A] = 0$  und aus dem Differential von (2), nämlich

$$dX = AdF + FdA + C dN + NdC$$

durch Eintragen von  $(x = x_2, y = y_2^i)$ , wobei  $dX$ ,  $N$  und  $A$  verschwinden, dass

$$[FdA + C dN] = 0.$$

Setzt man in dieser Gleichung, die für alle Werthe von  $dy:dx$  erfüllt sein muss,

$$(6) \quad [dN] = 0 \quad \text{oder} \quad dy:dx = -[N'(x):N'(y)],$$

so wird  $[dA] = 0$ . Durch Differentiation von (3) aber folgt

$$(7) \quad AdM + MdA = UdN + NdU + dW$$

und hieraus für  $(x = x_2, y = y_2^i)$  und für den in (6) definirten Werth  $dy:dx$  mit Rücksicht auf  $A = 0$ ,  $dA = 0$ ,  $N = 0$ ,  $dN = 0$ , dass  $[dW] = 0$  ist. Da nun  $W$  den Factor  $(x - x_2)$  enthält, also gleichzeitig  $[W] = 0$  und  $\left[\frac{\partial W}{\partial y}\right] = 0$  ist, so muss auch  $\left[\frac{\partial W}{\partial x}\right] = 0$  sein oder es muss

$$(8) \quad \left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)_{x=x_2} = 0$$

die Wurzeln  $y = y_2', \dots, y_2^{\nu-1}$  haben. Kann man nun noch eine  $\nu^{\text{te}}$ , von diesen verschiedene Wurzel  $y$  von (8) angeben, so ist (8) als Gleichung in  $y$  identisch erfüllt und  $(x - x_2)$  eine Doppelwurzel von  $W$ . Eine solche Wurzel von (8) ist aber  $y = y_2$ , sobald die aus (7) für  $(x = x_2, y = y_2)$  mit Rücksicht auf  $M_2 = 0$ ,  $N_2 = 0$  sich ergebende Beziehung

$$A_2 dM_2 = U_2 dN_2 + dW_2$$

durch Einführung des in (6) definirten Werthes  $dy:dx$  sich auf  $dW_2 = 0$  reducirt. Dies ist der Fall



entweder wenn  $M$  und  $N$  sich in  $(x_2, y_2)$  berühren,

oder wenn  $M$  in  $(x_2, y_2)$  ebenso wie  $F$  einen Doppelpunkt besitzt.

In beiden Fällen hat  $W$  mit  $X$  die Doppelwurzel  $x = x_2$  gemein. Ist also eine dieser zwei Bedingungen für jede Doppelwurzel von  $X$  erfüllt, so ist die Division  $W : X$  ausführbar und  $M$  in der Form (1) darstellbar. Hiermit ist der Satz (Ia) oder der Satz (I) in allen Theilen bewiesen.

Wir führen nur noch historisch eine Verallgemeinerung des Satzes (Ia) an und sprechen dieselbe so, wie sie später (§ 23) benutzt wird, für homogene Coordinaten  $(x_1, x_2, x_3)$  aus:

(II) Geht eine Curve  $P(x_1, x_2, x_3) = 0$  durch alle Schnittpunkte zweier anderen Curven  $Q(x_1, x_2, x_3) = 0$  und  $F(x_1, x_2, x_3) = 0$ , und zwar durch jeden solchen Punkt, der  $i$ -facher Punkt von  $F = 0$  und  $k$ -facher Punkt von  $Q = 0$  ist,  $i + k - 1$ -fach hindurch, so kann man immer  $P$  auf die Form bringen

$$P = AQ + CF,$$

wo  $A$  und  $C$  ganze, homogene Functionen von  $(x_1, x_2, x_3)$  sind<sup>1)</sup>.

### § 9. Die adjungirten Functionen.<sup>2)</sup>

Der Quotient zweier ganzen, rationalen Functionen  $M(x, y)$  und  $N(x, y)$  ist eine gebrochene, rationale Function  $M(x, y) : N(x, y)$ . Diese kann die besondere Eigenschaft der ganzen Functionen haben, dass sie in einem Doppelpunkt von  $F(x, y) = 0$  für die beiden Zweige den nämlichen Werth annimmt, sie kann dagegen auch für beide Zweige verschiedene Werthe haben. Wir betrachten den letzteren Fall als den allgemeinen. Derselbe kann nur eintreten, wenn Zähler und Nenner  $M$  und  $N$  in dem Doppelpunkt verschwinden.

(A) Eine ganze rationale Function, die in jedem der  $r$  Doppelpunkte von  $F = 0$  in erster Ordnung verschwindet, heisst eine adjungirte Function von  $F = 0$ .<sup>3)</sup> Unter den adjungirten Functionen sind die des  $n - 3^{\text{ten}}$  Grades von ausgezeichnetem Charakter; sie werden nach Riemann mit

1) Für den Beweis s. Nöther, l. c.

2) Riemann, Ges. W. S. 107 ff. Brill u. Nöther, Math. Ann. Bd. 7, S. 269 ff. (1873), wo die Voraussetzungen über  $F = 0$  allgemein sind.

3) Hat die Curve  $F(x, y) = 0$  mehrfache Punkte mit getrennten Tangenten, so sind die adjungirten Curven solche, die durch jeden  $\mu$ -fachen Punkt von  $F = 0$  ( $\mu - 1$ )-fach hindurchgehen, ohne dass sich dabei einzelne Zweige beider Curven berühren.

dem besonderen Buchstaben  $\Phi$  oder  $\varphi$  bezeichnet und  $\Phi$ -Functionen genannt.

Wir untersuchen in diesem § die ganzen adjungirten Functionen, in den folgenden §§ die Quotienten solcher Functionen.

Die Zahl der Schnittpunkte zweier Curven  $F=0$  vom Grade  $n$  und  $M=0$  vom Grade  $\mu$  ist nach (I) § 7 gleich  $n\mu$ . Ist  $M=0$  eine adjungirte Curve, so fallen  $2r$  dieser Punkte in die  $r$  festen Doppelpunkte von  $F=0$ . Bezeichnet man die Schnittpunkte, die  $M=0$  ausser den  $r$  Doppelpunkten mit  $F=0$  besitzt, so lange  $M=0$  noch nicht völlig bestimmt ist, als beweglich, und die Zahl dieser beweglichen Schnittpunkte mit  $i$ , so ist

$$(1) \quad \text{für ein beliebiges } \mu: \quad i = n\mu - 2r.$$

Wegen der Relation  $p = \frac{1}{2}(n-1)(n-2) - r$  (6) § 5 erhält man hieraus

$$(2) \quad \text{für den besonderen Werth } \mu = n - 3: \quad i = 2p - 2.$$

Von diesen  $i$  Schnittpunkten ist indess nur eine gewisse Zahl willkürlich; die übrigen sind von der ersteren abhängig und durch sie bestimmt. Um diese Abhängigkeit zu untersuchen, stellen wir zuvor die Frage nach der Zahl der linear unabhängigen, adjungirten Functionen  $M$  vom Grade  $\mu$ , wobei sich zugleich die Bildungsweise dieser Functionen ergibt.

Man denke sich die Function  $M(x, y)$  vom Grade  $\mu$  mit unbestimmten Coefficienten angeschrieben. Die Coefficienten seien so zu bestimmen, dass  $M$  für eine Anzahl gegebener Punkte verschwindet. Da jedes Werthepaar  $(x, y)$ , das zur Bestimmung von  $M=0$  dient, nicht frei, sondern durch die Gleichung  $F(x, y)=0$  verbunden ist, so hat man mit Rücksicht auf diese Gleichung zwei Fälle zu unterscheiden.

1. Fall  $\mu \geq n$ . Ist  $M'$  eine allgemeine Function vom Grade  $\mu$ , so kann man, da für die zu lösenden Fragen alle Curven vom Grade  $\mu$ , die  $F=0$  in denselben Punkten schneiden, als gleichwerthig zu betrachten sind, die zu bestimmende Function  $M$  in die Form bringen

$$M = M' + PF,$$

wo  $P$  eine ganze Function vom Grade  $\mu - n$ , und man kann im Allgemeinen die  $\frac{1}{2}(\mu - n + 1)(\mu - n + 2)$  homogenen Coefficienten der Function  $P$  so wählen, dass ebenso viele Coefficienten in  $M$  beliebige, numerische Werthe annehmen. Da die Zahl der nicht homogenen Coefficienten in  $M'$  gleich

$$\frac{1}{2}(\mu + 1)(\mu + 2) - 1 = \frac{1}{2}\mu(\mu + 3)$$

ist, so besitzt die reducirte Function  $M$  noch

$$\frac{1}{2}\mu(\mu + 3) - \frac{1}{2}(\mu - n + 1)(\mu - n + 2) = n\mu - \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$$

nicht homogene Coefficienten. Damit  $M$  eine adjungirte Function werde, sind diese Coefficienten noch den  $r$  Bedingungen zu unterwerfen, dass  $M=0$  sei für die  $r$  Doppelpunkte von  $F=0$ . Wenn nun diese  $r$  Bedingungsgleichungen für die Coefficienten von  $M$  linear unabhängig sind, so ist die Zahl  $k$  der in  $M$  noch freien, nicht homogenen Coefficienten

$$k = n\mu - \frac{1}{2}(n-1)(n-2) - r = n\mu - 2r - p = i - p. \quad (3)$$

2. Fall  $\mu < n$ . Dann findet eine Reduction von  $M$  durch  $F$  nicht statt. Man hat vielmehr unmittelbar für die Zahl  $k$  der in der adjungirten Function  $M$  noch freien, nicht homogenen Coefficienten

$$k = \frac{1}{2}\mu(\mu + 3) - r. \quad (4)$$

Insbesondere folgt hieraus

$$\begin{aligned} \text{für } \mu = n-1 & \quad k = \frac{1}{2}(n-1)(n+2) - r \\ \text{,, } \mu = n-2 & \quad k = \frac{1}{2}(n-2)(n+1) - r \\ \text{,, } \mu = n-3 & \quad k = p - 1. \end{aligned} \quad (5)$$

Die für  $\mu = n-1$  und  $\mu = n-2$  gefundenen Werthe (5) von  $k$  ergeben sich auch, wenn man in (3)  $\mu = n-1$  und  $\mu = n-2$  setzt. Die Werthe von  $k$  für  $\mu = n-1$  und  $\mu = n-2$  ordnen sich also dem ersten Falle unter. Hiernach hat man, indem man die Möglichkeit offen lässt, dass die oben erwähnten  $r$  Gleichungen für die Coefficienten von  $M$  linear abhängig seien, den Satz:

(I) Die Zahl der linear unabhängigen, adjungirten Functionen  $M$  vom Grade  $\mu$  ist  $= k + 1$ , wo

$$\begin{aligned} \text{für } \mu > n-3 & \quad k \text{ mindestens } = n\mu - 2r - p \\ \text{,, } \mu = n-3 & \quad k \quad \quad \quad = p - 1. \end{aligned}$$

Es zeigt sich später (§ 10), dass diese Zahlen für  $k$  nicht bloss Minimalzahlen, sondern genau gültige Zahlen sind und damit ist indirect gezeigt, dass die oben erwähnten  $r$  Gleichungen für die Coefficienten von  $M$  wirklich linear unabhängig sind<sup>1)</sup>. Indem man dies

1) Eine directe Untersuchung dieser  $r$  Gleichungen auf ihre lineare Abhängigkeit stösst auf grosse Schwierigkeiten und ist noch nicht durchgeführt.

einstweilen als bewiesen voraussetzt, ergibt sich für die Bildung der adjungirten Function  $M$  noch Folgendes. Schreibt man die  $r$  Gleichungen an, die ausdrücken, dass  $M$  für die  $r$  Doppelpunkte von  $F$  verschwindet, bestimmt alsdann aus diesen Gleichungen  $r$  der Coefficienten von  $M$  durch die übrigen, trägt die Werthe dieser  $r$  Coefficienten in  $M$  ein und ordnet nach den noch übrigen unbestimmten Coefficienten, so erhält man für  $M$  die Form

$$(6) \quad M = M_0 + \lambda_1 M_1 + \dots + \lambda_k M_k.$$

Hier sind  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  die noch unbestimmten Coefficienten,  $M_0, M_1, \dots, M_k$  aber specielle, linear unabhängige, adjungirte Functionen vom Grade  $\mu$ . Diese Functionen  $M_i$  sind vollkommen bestimmt; aus ihrer Bildung geht hervor, dass die Coefficienten der Potenzen von  $x$  und  $y$  in den  $M_i$  rationale und symmetrische Functionen der Coordinaten der  $r$  Doppelpunkte von  $F$  d. h. nach § 7 Satz IV, dass sie rationale Functionen der Coefficienten von  $F$  allein sind, die sich auf rationalem Wege bilden lassen. Wir machen indess von dieser Betrachtung keinen Gebrauch, bevor nicht gezeigt ist, dass die in Satz (I) für  $k$  angegebenen Zahlen wirklich stets und genau gültig sind.

Wir kommen nun zur weiteren Frage, wie viele von den  $i$  in (1) und (2) angegebenen  $0^1$  Punkten von  $M$  willkürlich und wie viele derselben abhängig sind. Wären die Zahlen für  $k$  in Satz (I) genau gültig, so hätte man zur vollständigen Bestimmung von  $M$  noch  $k$   $0^1$  Punkte von  $M$  beliebig zu wählen und hätte dann aus (6)  $k$  lineare Gleichungen zur Bestimmung der  $k$  Coefficienten  $\lambda$ . Damit wären auch die  $i - k$  noch übrigen  $0^1$  Punkte von  $M$  bestimmt und man hätte, indem man diese  $i - k$  abhängigen  $0^1$  Punkte in die bereits bestimmte Function  $M$  einträgt,  $i - k$  Bedingungsgleichungen zwischen den  $i$   $0^1$  Punkten von  $M$ . Es ist nun aber der Fall denkbar, dass die  $k$  gewählten  $0^1$  Punkte eine solche specielle Lage zu einander haben, dass die  $k$  Gleichungen zur Bestimmung von  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  nicht ausreichen, dass vielmehr eine Anzahl dieser Gleichungen durch die übrigen bereits identisch erfüllt sind, dass also von den  $i - k$  Bedingungsgleichungen zwischen den  $i$   $0^1$  Punkten einige überzählig d. h. durch die andern von selber erfüllt sind.

Berücksichtigt man die Möglichkeit des letzteren Falles, der in der That eintreten kann<sup>2)</sup>, und ausserdem die noch nicht als unzutreffend erwiesene Möglichkeit, dass die Zahlen für  $k$  in (I) nur Minimalzahlen seien, so erhält man den Satz:

1) Vgl. § 11 und § 13.

(II) Von den  $i = n\mu - 2r$  Punkten, die eine adjungirte Curve  $M = 0$  vom Grade  $\mu$  ausser den Doppelpunkten mit  $F' = 0$  gemein hat, sind

für  $\mu > n - 3$  mindestens  $i - p$  willkürlich und höchstens  $p$  abhängig,

für  $\mu = n - 3$  mindestens  $p - 1$  willkürlich und höchstens  $p - 1$  abhängig.

Hieraus folgt unmittelbar der weitere Satz:

(III) Legt man eine adjungirte Curve  $M = 0$  vom Grade  $\mu$  durch  $m$  Punkte von  $F$  und sind von den  $i - m$  weiteren Schnittpunkten ausser den Doppelpunkten noch  $q$  Punkte willkürlich, so ist stets

$$\text{für } \mu > n - 3: \quad q \geq m - p$$

$$,, \quad \mu = n - 3: \quad q \geq m - (p - 1).$$

Bei diesen Betrachtungen ist keineswegs vorausgesetzt, dass die adjungirte Curve  $M$  nicht zerfalle. Darum ist es auch nicht nöthig, Curven von niederem als dem  $(n - 3)^{\text{ten}}$  Grade besonders zu betrachten, da man eine solche durch Hinzufügung einer festen Curve immer zu einer adjungirten Curve vom  $n - 3^{\text{ten}}$  oder höheren Grade machen kann. Geht man nur bis zu Curven des  $n - 3^{\text{ten}}$  Grades herab, so lässt sich zugleich der Voraussetzung genügen, dass dieselben ohne eine solche Hinzufügung fester Curven auch noch für die Maximalzahl der Doppelpunkte von  $F' = 0$  adjungirt sein können. Denn die Zahl der nicht homogenen, linearen Coefficienten einer noch nicht adjungirten Curve  $M = 0$  vom Grade  $\mu = n - 3$  ist  $= \frac{1}{2} \mu (\mu + 3) = \frac{1}{2} n (n - 3)$ , also für  $p > 0$  gleich der Maximalzahl  $\frac{1}{2} (n - 1)(n - 2) - 1$  der Doppelpunkte von  $F' = 0$ . Ausserdem aber wird sich zeigen, dass die Voraussetzung  $\mu \geq n - 3$  genügt zur Darstellung rationaler Functionen jeder Ordnung.

## § 10. Die allgemeinen, rationalen Functionen.

Wir gehen zur Betrachtung der allgemeinen, rationalen Functionen über, die wir als Quotienten adjungirter Functionen ansehen. Es seien  $M_1$  und  $N_1$  zwei adjungirte Functionen vom Grade  $\mu_1$  und  $\nu_1$  und es mögen die Schnittpunkte von  $M_1$  mit  $F$  in zwei Gruppen  $G_{m_1}$  und  $G_{m_2}$  von  $m_1$  Punkten  $a'$  und  $m_2$  Punkten  $a''$ , die Schnittpunkte von  $N_1$  mit  $F$  in zwei Gruppen  $G_{n_1}$  und  $G_{n_2}$  von  $n_1$  Punkten  $b'$  und denselben  $m_2$  Punkten  $a''$  zerfallen. Dann wird der Ausdruck

$M_1 : N_1 = 0^1$  in den  $m_1$  Punkten  $a'$  und  $= \infty^1$  in den  $n_1$  Punkten  $b'$ , während er in den  $m_2$  Punkten  $a''$  endlich bleibt. Diese letzteren Punkte nennen wir Hilfspunkte. Für  $(x = \infty, y = \infty)$  wird  $M_1 : N_1$  entweder endlich oder  $= \infty^{n(\mu_1 - \nu_1)}$  oder  $= 0^{n(\nu_1 - \mu_1)}$  je nachdem  $\mu_1 = \nu_1$  oder  $\mu_1 > \nu_1$  oder  $\mu_1 < \nu_1$  ist. Da die Zahl der  $\infty^1$  und der  $0^1$  Punkte von  $M_1 : N_1$  die gleiche ist (§ 7), so hat man  $m_1 - n_1 = n(\mu_1 - \nu_1)$ .

Für die unendlich vielen Formen, in denen sich  $M_1 : N_1$  darstellen lässt, gilt nun der Satz<sup>1)</sup>:

- (1) Der Quotient  $M_1 : N_1$  zweier adjungirten Functionen, der abgesehen von den Punkten  $(x = \infty, y = \infty)$  in  $m_1$  Punkten  $a'$  gleich  $0^1$  und in  $n_1$  Punkten  $b'$  gleich  $\infty^1$  wird, während er in den  $m_2$  Hilfspunkten  $a''$  endlich bleibt, lässt sich mit Hilfe von  $F = 0$  auf unendlich viele Arten in einen andern solchen Quotienten  $M_2 : N_2$  verwandeln, wobei die  $0^1$  Punkte  $a'$  und die  $\infty^1$  Punkte  $b'$  der Function ungeändert bleiben, während an Stelle der  $m_2$  Hilfspunkte  $a''$   $n_2$  andere Hilfspunkte  $b''$  treten.

Die zu beweisende Behauptung lässt sich auch so aussprechen:

- (a) Wenn auf der Curve  $F = 0$  ausser den Doppelpunkten durch eine adjungirte Curve  $M_1$  vom Grade  $\mu_1$  die Punktgruppen  $G_{m_1}$  und  $G_{m_2}$ ,  
 durch eine adjungirte Curve  $N_1$  vom Grade  $\nu_1$  die Punktgruppen  $G_{n_1}$  und  $G_{n_2}$ ,  
 durch eine adjungirte Curve  $M_2$  vom Grade  $\mu_2$  die Punktgruppen  $G_{m_1}$  und  $G_{n_2}$   
 ausgeschnitten werden, so existirt noch  
 eine adjungirte Curve  $N_2$  vom Grade  $\nu_2$ , welche die Punktgruppen  $G_{n_1}$  und  $G_{n_2}$   
 ausschneidet. Hierbei ist

$$m_1 - n_1 = n(\mu_1 - \nu_1) = n(\mu_2 - \nu_2).$$

Beweis. Sind drei adjungirte Curven  $M_1, N_1, M_2$  gegeben, welche die in (a) angegebenen Punktgruppen ausschneiden, so lassen sich nach (1a) § 8 immer zwei Curven  $N_2$  und  $A$  finden von der Beschaffenheit, dass man identisch hat

$$(1) \quad M_2 N_1 - M_1 N_2 \equiv A F.$$

Denn die Gleichung  $M_2 N_1 = 0$  stellt eine (zerfallende) Curve dar, welche durch alle nicht in die Doppelpunkte von  $F$  fallenden Schnittpunkte  $G_{m_1}$  und  $G_{m_2}$  von  $M_1 = 0$  mit  $F = 0$  hindurchgeht. Ausserdem aber verschwindet das Product  $M_2 N_1$  in jedem Doppelpunkt von  $F$ , in dem

<sup>1)</sup> Brill u. Nöther, Math. Ann. Bd. 7, S. 269 ff. (1873).

$M_1$  einen einfachen Punkt besitzt, zweifach. Das Product  $M_2 N_1$  erfüllt daher nach (1a) § 8 alle Bedingungen, um in die Form  $M_1 N_2 + A F$  gebracht zu werden, womit die Identität (1) bewiesen ist. Die hierbei auftretende Curve  $N_2 = 0$  geht nun nach (1) durch die übrigen Schnittpunkte von  $M_2 N_1 = 0$  mit  $F = 0$ , durch die  $M_1$  nicht geht d. h. durch die Punkte  $G_{n_1}$  und  $G_{n_2}$ . Ausserdem ist  $N_2$  adjungirt; denn in einem Doppelpunkt von  $F$  verschwindet  $M_2 N_1$  für jeden Zweig von  $F$  doppelt,  $M_1$  nur einfach; es muss also auch  $N_2$  einfach verschwinden. (q. e. d.)

Der Satz (a) ist in der Geometrie der algebraischen Curven bekannt unter dem Namen des Restsatzes<sup>1)</sup>. Nennt man von zwei Gruppen  $G_{m_1}$  und  $G_{m_2}$ , die durch eine adjungirte Curve  $M_1$  auf  $F$  ausgeschnitten werden, die eine Gruppe den Rest der andern Gruppe und zwei Gruppen  $G_{m_1}$  und  $G_{n_1}$  corresidual (oder äquivalent) in Bezug auf eine dritte Gruppe  $G_{m_2}$ , wenn für jede derselben  $G_{m_2}$  ein Rest ist, oder wenn sie von zwei adjungirten Curven ausgeschnitten werden können, deren übrige Schnittpunkte mit  $F$  ausser den Doppelpunkten sämmtlich in die Punkte  $G_{m_2}$  fallen, so lässt sich der Restsatz auch so aussprechen:

(b) Sind auf einer Curve  $F$  die Punktgruppen  $G_{m_1}$  und  $G_{n_1}$  corresidual in Bezug auf eine dritte Gruppe  $G_{m_2}$ , so sind sie auch corresidual in Bezug auf jede andere Gruppe  $G_{n_2}$ , welche ein Rest ist in Bezug auf eine der Gruppen  $G_{m_1}$  und  $G_{n_1}$ , also etwa auf  $G_{m_1}$ .

Oder: die Eigenschaft zweier Punktgruppen  $G_{m_1}$  und  $G_{n_1}$ , corresidual zu sein, ist von einem speciellen Rest  $G_{m_2}$  ganz unabhängig.

Der Restsatz lässt sich verallgemeinern, indem man durch dieselben Punkte  $G_{m_2}$  an Stelle der einzelnen Curve  $M_1$  eine Schaar von linear unabhängigen, adjungirten Curven  $M_1$  von demselben Grade  $\mu_1$  gehen lässt. Für solche Schaaren gilt der Satz:

Wenn durch eine Gruppe  $G_{m_2}$  eine Schaar von  $q_2 + 1$  linear unabhängigen, adjungirten Curven  $M_1$  von demselben Grade  $\mu_1$  geht, so geht durch jede corresiduale Gruppe  $G_{n_2}$  ebenfalls eine Schaar von  $q_2 + 1$  linear unabhängigen, adjungirten Curven  $M_2$  von demselben Grade  $\mu_2$ .

Beweis. Unter Voraussetzung der Identität (1) sei  $M_1$  eine Schaar von  $q_2 + 1$  linear unabhängigen, adjungirten Curven, die alle

1) Der Restsatz wurde zuerst von Sylvester für Curven 3. Ordnung ausgesprochen (Salmon-Fiedler, Höhere Curven 2. A. S. 164). Historisch ist der Satz aus dem Abel'schen Theorem hervorgegangen.

durch dieselben Punkte  $G_{m_2}$  gehen und auf  $F = 0$  ein System von beweglichen Punkten  $G_{m_1}$  ausschneiden. Ferner sei

$N_1$  eine feste Curve durch die Punktgruppe  $G_{m_2}$  und eine zweite Gruppe  $G_{n_1}$  und

$N_2$  eine feste Curve durch die Punktgruppe  $G_{n_1}$  und eine dritte Gruppe  $G_{n_2}$ .

Dann muss  $M_2$  eine Schaar von linear unabhängigen, adjungirten Curven darstellen, die alle durch die festen Punkte  $G_{n_2}$  gehen und auf  $F = 0$  das nämliche System von beweglichen Punkten  $G_{m_1}$  ausschneiden, das früher durch die Schaar  $M_1$  bestimmt wurde. Daher muss die Schaar  $M_2$  ebensoviel lineare, willkürliche Parameter enthalten wie  $M_1$  d. h. sie muss  $q_2 + 1$  linear unabhängige Curven enthalten. (q. e. d.)

Eine Schaar von Gruppen zu je  $m_1$  Punkten, die durch eine Schaar von  $q_2 + 1$  linear unabhängige, adjungirte Curven  $M_1$  ausgeschnitten wird, soll eine  $q_2$ -fach unendliche Schaar von Gruppen zu je  $m_1$  Punkten heissen und durch  $g_{m_1}^{q_2}$  bezeichnet werden; eine einzelne Gruppe der Schaar durch  $G_{m_1}^{q_2}$ .

Da jede Gruppe  $G_{m_1}^{q_2}$  durch  $q_2$  willkürlich wählbare Punkte eindeutig festgelegt ist, so hat man nach (III) § 9 den Satz:

(c) Zwischen den Zahlen  $m_1$  und  $q_2$  einer durch Curven  $M_1$  vom Grade  $\mu_1$  ausgeschnittenen Schaar  $g_{m_1}^{q_2}$  besteht die Relation

$$\begin{aligned} \text{wenn } \mu_1 > n - 3: \quad q_2 &\geq m_1 - p \\ \text{,, } \mu_1 = n - 3: \quad q_2 &\geq m_1 - p + 1. \end{aligned}$$

Es ist nun von Wichtigkeit, dass der Satz (c) für den ausgezeichneten Fall  $\mu_1 = n - 3$  sich umkehren lässt in folgender Weise<sup>1)</sup>:

(d) Eine  $q_2$ -fach unendliche Schaar  $g_{m_1}^{q_2}$  von Gruppen zu je  $m_1$  Punkten kann immer dann durch eine Schaar adjungirter Curven  $C_{n-3}$  von dem besonderen Grade  $n - 3$  ausgeschnitten werden, wenn

$$(2) \quad q_2 \geq m_1 - p + 1.$$

Dabei können unter den  $m_1$  Punkten jeder Gruppe  $G_{m_1}^{q_2}$  sich auch solche befinden, die für alle Gruppen dieselben sind.

1) Die folgende Betrachtung hat für Curven  $F = 0$  vom Geschlecht  $p = 0$  und  $p = 1$  keine Bedeutung, weil für die ersteren überhaupt keine und für die letzteren keine Schaaren von adjungirten Curven  $n - 3^{\text{ten}}$  Grades existiren.



Beweis. Man denke sich eine Schaar  $g_{m_1}^{q_2}$ , die durch Curven von höherem als dem  $n - 3^{\text{ten}}$  Grade ausgeschnitten werden; es ist zu zeigen, dass dieselbe Schaar  $g_{m_1}^{q_2}$  durch eine Schaar von adjungirten Curven des  $n - 3^{\text{ten}}$  Grades ausgeschnitten wird, wenn zwischen  $m_1$  und  $q_2$  die Bedingung (2) besteht.

Zunächst ist klar, dass der Satz richtig ist für  $q_2 = 0$ , also  $m_1 \leq p - 1$ . Denn durch eine vollständig bestimmte, einzelne Gruppe von  $p - 1$  oder weniger Punkten kann immer eine adjungirte Curve  $n - 3^{\text{ten}}$  Grades gelegt werden (nach I § 9). Es ist daher nur zu zeigen, dass der Satz (d) gilt für jede Schaar  $g_{m_1}^{q_2}$ , sobald er für die Schaaren  $g_{m_1-1}^{q_2-1}$  gilt, immer die Relation (2) vorausgesetzt. Hierzu bemerke man vorerst, dass, wenn die Schaar  $g_{m_1-1}^{q_2-1}$  durch ein System von Curven  $n - 3^{\text{ten}}$  Grades ausgeschnitten wird, die Schaar  $g_{m_1}^{q_2}$  durch ein System von Curven  $n - 2^{\text{ten}}$  Grades  $C_{n-2}$  ausgeschnitten werden kann. Denn man nehme irgend eine Gruppe  $\Gamma_{m_1}^{q_2}$  der letzten Schaar, lege durch einen beweglichen Punkt  $\alpha$  derselben eine Gerade  $A$  und durch die übrigen  $m_1 - 1$  Punkte, die eine Gruppe  $\Gamma_{m_1-1}^{q_2-1}$  bilden, eine adjungirte Curve  $n - 3^{\text{ten}}$  Grades  $C'_{n-3}$ . Der Rest  $R$  der Gruppe  $\Gamma_{m_1}$ , welcher aus den weiteren  $2p - 2 - (m_1 - 1)$  Schnittpunkten von  $C'_{n-3}$  und den übrigen  $n - 1$  Schnittpunkten der Geraden  $A$  besteht, ist zugleich Rest für jede Gruppe der Schaar  $g_{m_1}^{q_2}$ , weil er dies für eine derselben ist (Satz (b)). Die Schaar  $g_{m_1}^{q_2}$  wird somit in der That durch eine Schaar von adjungirten Curven  $n - 2^{\text{ten}}$  Grades  $C_{n-2}$  ausgeschnitten, die durch den Rest  $R$  gehen und die zudem alle in die Gerade  $A$  und eine Curve  $n - 3^{\text{ten}}$  Grades  $C'_{n-3}$  zerfallen (weil  $n - 1$  Punkte einer Curve  $n - 2^{\text{ten}}$  Grades nicht auf einer Geraden liegen können, ohne dass Zerfallen eintritt). Demnach besteht die Schaar  $g_{m_1}^{q_2}$  aus dem festen Punkt  $\alpha$  und den durch diese  $C'_{n-3}$  ausgeschnittenen, beweglichen Punkten. Nun sollte  $\alpha$  ein beweglicher Punkt sein. Dieser Widerspruch erklärt sich nur so, dass in Wirklichkeit  $\alpha$  ausser auf der Geraden  $A$  auch auf der obigen Curve  $C'_{n-3}$  gelegen ist (als unwillkürliche Folge der Forderung, dass  $C'_{n-3}$  durch jene  $(m_1 - 1)$  Punkte geht), dass also  $\alpha$  sich doppelt unter den Punkten der Schaar  $g_{m_1}^{q_2}$  befindet und diese eigentlich als  $g_{m_1+1}^{q_2}$  zu rechnen wäre. Die  $g_{m_1}^{q_2}$  übrigen Punkte müssen alle auf der beweglichen  $C'_{n-3}$  liegen. (q. e. d.)

An diesen Beweis des Satzes (d) schliesst sich eine Bemerkung. Da es keine adjungirte Curve  $n - 3^{\text{ten}}$  Grades gibt, die in mehr als  $2p - 2$  Punkten die irreducible Curve  $F = 0$  schneidet, so ist die

Zahl  $m_1$  in Satz (d) an die Ungleichung  $m_1 \leq 2p - 2$  gebunden. Der Beweis von (d) macht aber an keiner Stelle Gebrauch von dieser Ungleichung; er gilt daher auch, wenn dieselbe nicht erfüllt ist. Hieraus schliesst man rückwärts, dass Punktgruppen  $G_{m_1}^{q_2}$  von mehr als  $2p - 2$  Punkten, für welche die Ungleichung (2) gilt, nicht existiren.

Die letzte Bemerkung ist von Wichtigkeit. Aus ihr kann man nämlich die Folgerung ziehen, dass die in (I) § 9 angegebenen Minimalwerthe für die Zahl  $k$  zugleich Maximalwerthe sind. Wir sprechen diesen fundamentalen Satz<sup>1)</sup> besonders aus:

(II) Ist  $F(x, y) = 0$  eine irreducible Gleichung vom Grade  $n$  und vom Geschlecht  $p$ , so ist die Zahl der linear unabhängigen, adjungirten Functionen  $M$  vom Grade  $\mu$  stets

$$\text{für } \mu > n - 3 \quad \text{gleich} \quad n\mu - 2r - p + 1,$$

$$\text{„ } \mu = n - 3 \quad \text{„ } \quad p.$$

Beweis. 1. Fall  $\mu > n - 3$ . Es ist zu zeigen (vgl. § 9), dass eine etwaige Abhängigkeit in der Lage der  $r$  Doppelpunkte von  $F = 0$  nicht so beschaffen sein kann, dass die  $r$  Bedingungsgleichungen für die Coefficienten einer adjungirten Curve linear von einander abhängig sind. Angenommen, es seien von diesen Bedingungsgleichungen  $s$  ( $\geq 1$ ) eine Folge der  $r - s$  übrigen. Dann hätte  $M$  nach (3) § 9 noch

$$k + s = n\mu - 2r - (p - s)$$

willkürliche, lineare, nicht homogene Coefficienten, d. h. in diesem Falle wären  $p - s$  Schnittpunkte von  $M$  mit  $F$  abhängig von den übrigen. Dann aber wäre die Schaar der  $m_1 = n\mu - 2r = k + p$  Schnittpunkte von  $M$  mit  $F$  eine  $q_2 = k + s$ -fach unendliche Schaar. Daher wäre

$$q_2 = m_1 - p + s,$$

d. h. es könnte nach (d) die Punktgruppe  $G_{m_1}^{q_2}$  durch eine Schaar von adjungirten Curven  $n - 3^{\text{ten}}$  Grades ausgeschnitten werden. Dies ist aber unmöglich, weil  $m_1 = n\mu - 2r > 2p - 2$  ist, wenn  $\mu > n - 3$ . Daher muss  $s = 0$  sein und es sind von den Schnittpunkten der Curve  $M = 0$  genau  $p$  durch die übrigen bestimmt, oder es gibt, wenn  $\mu > n - 3$ , genau  $n\mu - 2r - p + 1$  linear unabhängige, adjungirte Curven  $M = 0$ . (q. e. d.)

1) Dieser Satz und speciell der Satz, dass die Zahl der linear unabhängigen, adjungirten Curven  $n - 3^{\text{ter}}$  Ordnung, oder der linear unabhängigen Integrale 1. Gattung gleich  $p$  ist (Abschn. III. § 3), wird von Riemann (Ges. W. p. 98) mit Hilfe des Dirichlet'schen Principis bewiesen.

2. Fall.  $\mu = n - 3$ . Am Schluss des Beweises von Satz (d) wurde bemerkt, dass Gruppen  $G_{m_1}^{\alpha}$  von mehr als  $2p - 2$  Punkten, für welche die Ungleichung  $q_2 \geq m_1 - p + 1$  gilt, nicht existiren. Hieraus folgt die zu beweisende Behauptung. Gruppen  $G_{m_1}$ , welche durch adjungirte Curven  $n - 3^{\text{ten}}$  Grades ausgeschnitten werden, bilden nach III § 9 mindestens eine  $m_1 - p + 1$ -fach unendliche Schaar, also Gruppen  $G_{2p-2}$  mindestens eine  $p - 1$ -fach unendliche Schaar (eine  $\infty^{p-1}$  Schaar). Es ist zu zeigen, dass sie zugleich höchstens eine  $\infty^{p-1}$  Schaar bilden. Angenommen, sie bildeten eine  $\infty^p$  Schaar, so könnte man durch Hinzunahme eines willkürlichen, festen Punktes  $\beta$  von  $F$  eine Schaar  $g_{2p-1}^p$  (in deren sämtlichen Gruppen der Punkt  $\beta$  vorkäme) herstellen. Dies ist aber nach der obigen Bemerkung nicht möglich. Somit gibt es auch keine Schaar  $g_{2p-2}^p$ , wie angenommen war, noch weniger eine Schaar  $g_{2p-2}^{p+1}$  u. s. w. Es gibt also nur eine  $\infty^{p-1}$  Schaar, d. h. nur  $p$  linear unabhängige, adjungirte Curven  $n - 3^{\text{ten}}$  Grades. (q. e. d.)

Diese Betrachtung lehrt zugleich, dass eine etwaige Abhängigkeit der Lage der Doppelpunkte von  $F$  eine lineare Abhängigkeit der  $r$  Bedingungsgleichungen auch für die Coefficienten der adjungirten Curven  $n - 3^{\text{ten}}$  Grades nicht hervorrufen kann.

### § 11. Der Riemann-Roch'sche Satz.

Nach (II) § 10 sind von den Schnittpunkten, die eine beliebige, adjungirte Curve vom Grade  $\mu > n - 3$  ausser den Doppelpunkten mit  $F = 0$  gemein hat, stets die  $p$  letzten durch die übrigen eindeutig bestimmt. Daher folgt unmittelbar, wenn man eine adjungirte Curve vom Grade  $n - 3$  eine  $\Phi$ -Curve nennt (vgl. § 9 A.):

(I) Sind  $m_1 (> p)$  Punkte  $b_l$  ( $l = 1, \dots, m_1$ ) auf  $F = 0$  derart gewählt, dass sie nicht sämtlich auf einer  $\Phi$ -Curve liegen, und legt man durch sie eine adjungirte Curve  $M_0 = 0$  vom Grade  $\mu (> n - 3)$ , so hat der Rest von  $n\mu - 2r - m_1$  Schnittpunkten  $\beta_i$ , die  $M_0 = 0$  mit  $F = 0$  ausser den Doppelpunkten noch besitzt, die Eigenschaft, dass durch ihn noch  $m_1 - p + 1$  linear unabhängige, adjungirte Curven  $M = 0$  von demselben Grade  $\mu$  hindurchgehen.

Dieser Satz bezieht sich auf allgemeine, rationale Functionen. Es besteht nun ein ganz ähnlicher Satz für den besonderen Fall, wo die rationale Function der Quotient zweier  $\Phi$ -Functionen vom Grade

$u = n - 3$  ist. Um denselben herzuleiten, betrachten wir<sup>1)</sup> im Anschluss an Satz (c) § 10 Schaaren von Punktgruppen  $g_{m_1}^{q_2-1}$  ( $q_2 > 1$ ), für die  $q_2 > m_1 - p + 1$  oder

$$(1) \quad q_2 \geq m_1 - p + 2,$$

die also stets durch adjungirte Curven  $n - 3^{\text{ten}}$  Grades oder durch  $\Phi$ -Curven ausgeschnitten werden. Solche Punktgruppen heissen Specialgruppen; ihr specieller Charakter besteht darin, dass die einzelnen Punkte einer jeden Gruppe der Schaar nicht beliebig sind, sondern dass durch einige derselben die übrigen bestimmt sind. Die Schaaren dieser Gruppen lassen sich zu je zweien einander zuordnen, derart, dass jede aus der anderen eindeutig abgeleitet werden kann. Es gilt nämlich folgender Satz:

(a) Ist  $g_{m_1}^{q_2-1}$  ( $q_2 > 1$ ) eine Schaar auf  $F$ , für welche

$$q_2 = m_1 - p + 1 + q_1 \quad (\text{wo } q_1 \geq 1 \text{ und } < p \text{ und } m_1 > p - q_1)$$

und legt man durch eine Gruppe  $G_{m_1}^{q_2-1}$  dieser Schaar eine  $\Phi$ -Curve, so ist der Rest von  $2p - 2 - m_1 = m_2$  Punkten wieder eine Gruppe  $G_{m_2}^{q_1-1}$  einer Schaar  $g_{m_2}^{q_1-1}$ , für die  $q_1$  den aus obiger Gleichung sich ergebenden Werth  $q_1 = m_2 - p + 1 + q_2$  hat.

Zum Beweise bilde man aus der Schaar  $g_{m_1}^{q_2-1}$ , indem man zu jeder Gruppe derselben noch  $q_1 - 1$  festliegende, aber beliebig gewählte (und zwar zu jeder Gruppe dieselben) Punkte von  $F = 0$  hinzufügt, eine neue Schaar  $g_{m_1+q_1-1}^{q_2-1}$ , für welche die Anzahl der willkürlichen Parameter sich nicht vermehrt hat, wohl aber die Anzahl der Punkte in den einzelnen Gruppen. Durch eine Gruppe  $G_{m_1+q_1-1}^{q_2-1}$  dieser Schaar lässt sich noch eine  $\Phi$ -Curve hindurchlegen, weil durch die Voraussetzung  $q_2 = m_1 - p + 1 + q_1$  die Bedingung (2) § 10 erfüllt ist. Da nun aber die Lage jener  $q_1 - 1$  festen Punkte beliebig ist, so muss sich durch die Gruppe  $G_{m_1}^{q_2-1}$  noch mindestens eine  $\infty^{q_1-1}$  Schaar von  $\Phi$ -Curven legen lassen und die durch dieselben ausgeschnittenen Gruppen  $G_{m_2}^0$  bilden mindestens eine  $\infty^{q_1-1}$  Schaar, d. h. es ist mindestens  $\varrho = q_1 - 1$ .

Andrerseits kann  $\varrho$  nicht  $> q_1 - 1$  sein. Denn geht man umgekehrt von einer Gruppe  $G_{m_2}^0$  aus, so gelangt man durch die entsprechende Betrachtung zu Gruppen  $G_{m_1}^\sigma$ , wo  $\sigma$  mindestens  $= m_1 - p$

1) Vgl. Brill-Nöther, Math. Ann. Bd. VII S. 280 ff. (1873). Die dortigen Zahlen  $Q, R, q, r$  sind in unserer Darstellung ersetzt durch  $m_1, m_2, q_2 - 1, q_1 - 1$ .

+ 1 +  $\varrho$  sein muss. Dieselben müssen aber nach dem Restsatze der Schaar  $g_{m_1}^{q_2-1}$  angehören. Man hat daher  $\sigma = q_2 - 1$  und folglich auch  $\varrho = q_1 - 1$ . (q. e. d.)

Die Gleichungen des Satzes (a) lassen sich in die folgende übersichtliche Gestalt bringen:

$$m_1 + m_2 = 2p - 2, \quad m_1 + 2q_1 = m_2 + 2q_2. \quad (2)$$

Zu jedem Werthepaar  $m_1, q_2$  einer Schaar  $g_{m_1}^{q_2-1}$ , welches der Bedingung (1) genügt, lässt sich demnach nur ein Werthepaar  $m_2, q_1$  der Schaar  $g_{m_2}^{q_1-1}$  bestimmen.

Wir geben dem Satze (a) noch eine andere Form, die für spätere Anwendungen besonders geeignet ist.

Da eine Schaar  $g_{m_1}^{q_2-1}$  auf  $F = 0$  ausgeschnitten wird durch die  $q_2$  linear unabhängigen  $\Phi$ -Curven, welche durch den Rest von  $2p - 2 - m_1 = m_2$  Punkten gehen, und eine Schaar  $g_{m_2}^{q_1-1}$  durch die  $q_1$  linear unabhängigen  $\Phi$ -Curven, die durch den Rest von  $m_1$  Punkten gehen, so folgt aus (a):

(II) Haben  $m_1 (> p - q_1)$  Punkte  $b_l$  ( $l = 1, \dots, m_1$ ) der Curve  $F = 0$  eine solche specielle Lage, dass durch sie gleichzeitig  $q_1 (> 1$  und  $< p$ ) linear unabhängige  $\Phi$ -Curven hindurchgehen und legt man durch dieselben eine Curve  $\Phi_0$ , so hat der Rest von  $m_2 = 2p - 2 - m_1$  Punkten  $\beta_z$  die Eigenschaft, dass durch sie noch  $q_2 = m_1 - p + q_1 + 1$  linear unabhängige  $\Phi$ -Curven hindurchgehen. (Riemann-Roch'scher Satz.)

Die Sätze I und II sind durchaus ähnlich; sie bilden die Grundlage zur Lösung der Aufgabe, eine rationale Function aus  $\infty$  Punkten und 0 Punkten herzustellen. Der Satz I wurde von Riemann<sup>1)</sup> mit Hilfe des Dirichlet'schen Princip's abgeleitet. Der Satz II wurde für einzelne, specielle Fälle ( $m_1 = p, p - 1, p - 2$ ) von Riemann, allgemein aber auf dem von Riemann eingeschlagenen Wege von Roch<sup>2)</sup> bewiesen. Wir geben diesen Roch'schen Beweis in § 13. In der Brill-Nöther'schen Form (a) des Satzes II tritt jedoch erst die Reciprocität der Schnittpunktsysteme deutlich hervor. Den Satz (II) erhält man auch mittels der Methoden, durch die Riemann das Verschwinden der Thetafunctionen untersucht hat. (S. § 28 Satz XIV.)

1) Riemann, Ges. W. S. 101, 111, 200 und 203.

2) Roch, Journ. für Math. Bd. 64. S. 372 ff.

Es bleiben noch einige, den Riemann-Roch'schen Satz (II) betreffende Fragen zu erledigen<sup>1)</sup>. In demselben ist angenommen, dass es  $m_1$  Punkte  $b_i$  gebe, für die  $q_1$  linear unabhängige  $\Phi$ -Functionen verschwinden, ohne über  $m_1$  und  $q_1$  eine weitere Voraussetzung zu machen, als  $m_1 + q_1 > p$ . Es fragt sich, wie viele der  $m_1$  Punkte  $b_i$  hierbei willkürlich sind und wie sich die übrigen aus ihnen bestimmen.

Wenn man sich die Aufgabe stellt,  $m_1$  Punkte zu finden, für die  $q_1$  linear unabhängige  $\Phi$ -Functionen verschwinden, so wird man, da die allgemeine  $\Phi$ -Function noch  $p$  lineare, homogene Coefficienten enthält, vorläufig  $p - q_1$  Punkte  $b_i$  beliebig wählen. Die für dieselben verschwindende  $\Phi$ -Function ist alsdann von der Form

$$\lambda_1 \Phi_1 + \dots + \lambda_{q_1} \Phi_{q_1},$$

wo die  $\lambda_i$  beliebige Constanten sind und jede der  $q_1$  Functionen  $\Phi_i$  für die  $p - q_1$  gewählten Punkte  $b_i$  verschwindet. Sollen alle diese Functionen noch für die  $m_1 - p + q_1$  übrigen Punkte  $b_i$  verschwinden, so hat man die Gleichungen  $\Phi_1 = 0, \dots, \Phi_{q_1} = 0$  für diese  $m_1 - p + q_1$  Punkte zu bilden, was  $q_1 (m_1 - p + q_1)$  Gleichungen gibt und aus diesen Gleichungen die  $m_1 - p + q_1$  Punkte  $b_i$  zu eliminiren (mit Hilfe der Gleichungen  $F(b_i) = 0$ ), was auf

$$(q_1 - 1)(m_1 - p + q_1)$$

Bedingungen für die  $p - q_1$  ersten Punkte  $b_i$  führt. Sollen also  $m_1$  Punkte  $b_i$  die Eigenschaft haben, dass durch sie  $q_1$  linear unabhängige  $\Phi$ -Curven gehen, so sind von diesen Punkten noch

$$(3) \quad p - q_1 - (q_1 - 1)(m_1 - p + q_1) = m_1 - q_1(m_1 - p + q_1)$$

willkürlich. Diese Zahl kann aber nicht  $= 0$  gesetzt werden, weil es alsdann nur eine endliche Zahl von  $m_1$  Punkten gäbe, für die  $q_1$  linear unabhängige  $\Phi$ -Functionen verschwinden. Nach Satz (II) existiren aber solche Punkte auf  $F = 0$   $\infty^{q_2-1}$ -fach; es muss also die Zahl (3)  $\geq q_2 - 1$  oder  $\geq m_1 - p + q_1$  sein, wenn die obige Aufgabe keinen Widerspruch enthalten soll. Man hat daher die Bedingung

$$m_1 - q_1(m_1 - p + q_1) - (m_1 - p + q_1) = m_1 - (q_1 + 1)(q_2 - 1) = p - q_1 q_2 \geq 0.$$

Die Lösbarkeit der gestellten Aufgabe ist daher an die Bedingungen geknüpft

$$(4) \quad q_2 > 1, \quad p - q_1 q_2 \geq 0,$$

wobei zwischen  $m_1, m_2, q_1, q_2$  die Relationen (2) bestehen.

Die Bedingungen (4) und (2) dienen zu zwei Grenzbestimmungen.

1) Brill u. Nöther, l. c.

Wir fragen erstens nach den absoluten Grenzwerten der Zahlen  $m_1, m_2, q_1, q_2$ .

Die Zahlen  $q_1$  und  $q_2$  sind beliebig wählbar; nur ist  $q_1 \geq 1, q_2 > 1$ . Ferner ist  $q_1 < p$  und der zu einem gegebenen  $q_1$  gehörige Maximalwerth von  $q_2$  ist nach (4) bestimmt durch  $q_2 \leq \frac{p}{q_1}$ . Sind  $q_1$  und  $q_2$  gewählt, so ist  $m_1 = p - q_1 + q_2 - 1$ ; man erhält also den Maximal- oder Minimalwerth von  $m_1$ , indem man  $q_1$  möglichst klein,  $q_2$  möglichst gross wählt oder umgekehrt. Dies gibt die folgenden absoluten Grenzwerte:

$$\left. \begin{array}{ll} \min q_1 = 1 & \text{also} \quad \max q_2 = p \quad \text{und} \quad \max m_1 = 2p - 2, \\ \min q_2 = 2 & \quad \quad \max q_1 = \frac{p}{2} \quad \quad \min m_1 = \frac{p}{2} + 1. \end{array} \right\} \quad (5)$$

Wir fragen zweitens nach dem Minimalwerth von  $m_1$  bei gegebenem  $q_2$ .

Um diese Frage für die spätere Anwendung gleich so zu lösen, dass  $m_1$  eine ganze Zahl wird, setze man mit Rücksicht auf (4)

$$p = q_1 q_2 + \tau, \quad \text{wo} \quad \tau < q_2 \quad (6)$$

und lasse  $q_1$  von 1 an wachsen und  $\tau$  von 0 bis  $q_2 - 1$ . Dann ist  $q_1$  von selber der zu  $p$  und einem gegebenen  $q_2$  gehörige Maximalwerth; die Gleichung  $m_1 = p - q_1 + q_2 - 1$  gibt den zugehörigen Minimalwerth von  $m_1$  und (6) den zugehörigen Werth von  $\tau$ .

Wir geben hierzu folgende, insbesondere für  $q_2 = 2$  und  $q_2 = 3$  später zu benutzende Tabelle.

$q_2$	$p$	$\tau$	$\min m_1$
2	$2q_1$	0	$p - q_1 + 1$
	$2q_1 + 1$	1	
3	$3q_1$	0	$p - q_1 + 2$
	$3q_1 + 1$	1	
	$3q_1 + 2$	2	
$q_2$	$q_1 q_2 + \tau$	$\tau < q_2$	$p - q_1 + q_2 - 1$

(7)

## § 12. Bildung der rationalen Function aus gegebenen Elementen.

Die Sätze des § 11 führen zur Lösung einer fundamentalen Aufgabe, nämlich zur Bildung einer rationalen Function von  $(x, y)$  aus gegebenen Elementen. Wir erinnern an die entsprechenden Unter-

suchungen für Functionen einer Variablen  $z$ . Benutzt man die Erklärung der Residuen von Cauchy, nämlich:

Ist eine rationale Function  $R(z)$  von der Ordnung  $m$  in den  $m$  Punkten  $\gamma_1, \dots, \gamma_m \infty^1$  wie  $C_1(z - \gamma_1)^{-1}, \dots, C_m(z - \gamma_m)^{-1}$ , so heissen die Coefficienten  $C_1, \dots, C_m$  die Residuen der Function  $R(z)$  in den  $m$  Punkten  $\gamma_1, \dots, \gamma_m$ ,

so gelten für die Bildung der Function  $R(z)$  die beiden, eng zusammenhängenden Sätze:

Eine rationale Function  $R(z)$  von der Ordnung  $m$  ist durch ihre  $m \infty^1$  und  $m 0^1$  Punkte bis auf einen constanten Factor bestimmt; diese  $2m$  Elemente sind unabhängig von einander.

Eine rationale Function  $R(z)$  von der Ordnung  $m$  ist durch ihre  $m \infty^1$  Punkte und die  $m$  zugehörigen Residuen bis auf eine additive Constante bestimmt; auch diese  $2m$  Elemente sind unabhängig von einander.

Eine entsprechende Untersuchung für zwei Variablen  $(x, y)$ , die durch die Gleichung  $F(x, y) = 0$  verbunden sind, führt nun zur Lösung der beiden Aufgaben, eine rationale Function von  $(x, y)$  zu bilden, wenn entweder ihre  $\infty^1$  und  $0^1$  Punkte oder ihre  $\infty^1$  Punkte und deren Residuen gegeben sind. Es zeigt sich aber dabei, dass jedesmal nur ein Theil dieser Elemente willkürlich wählbar ist und es handelt sich daher weiter um eine Untersuchung der Abhängigkeit dieser Elemente von einander.

Wir bezeichnen hier und häufig im Folgenden einen bestimmten Punkt der Curve  $F(x, y) = 0$  nicht durch seine Coordinaten, sondern durch einen einzigen Buchstaben  $a$  oder  $b$ .

Die erste der beiden Aufgaben lautet:

- (A) Eine rationale Function  $R(x, y)$  von der Ordnung  $m$  aus den Coordinaten von  $m \infty^1$  Punkten  $b_l$  und von  $m 0^1$  Punkten  $a_l$  ( $l = 1, \dots, m$ ) zu bilden und die Bedingungsgleichungen zwischen diesen  $2m$  Punkten aufzustellen.

Wir nehmen der Einfachheit halber an,  $R$  sei in den Punkten  $a_l$  und  $b_l$  bez.  $0$  und  $\infty$  von der ersten Ordnung und die Punkte  $a_l$  und  $b_l$  seien einfache Punkte mit endlichen Coordinaten. Für andere Annahmen ist die Betrachtung ganz ähnlich. Setzt man weiter voraus, die Function  $R$  habe für die beiden Zweige eines jeden Doppelpunktes von  $F = 0$  verschiedene Werthe, so ist  $R$  der Quotient zweier adjungirter Functionen von demselben Grade  $\mu$ . Nach § 11 sind zwei Fälle zu unterscheiden.



1. Fall. Der Satz I § 11 lässt sich so aussprechen:

(I) Wenn die  $m \infty^1$  Punkte  $b_i$  einer rationalen Function  $R$  von der Ordnung  $m$  derart unabhängig sind, dass sie nicht auf einer  $\Phi$ -Curve liegen, so muss  $m > p$  sein und es ist  $R$  der Quotient zweier adjungirter Functionen vom Grade  $\mu > n - 3$ . Dabei sind die  $m \infty^1$  Punkte  $b_i$  und  $m - p$  der  $0^1$  Punkte  $a_i$  willkürlich, die  $p$  letzten Punkte  $a_i$  aber durch die übrigen Punkte  $a_i$  und die Punkte  $b_i$  eindeutig bestimmt.

Hieraus folgt:

(Ia) Die rationale Function  $R(x, y)$  von der Ordnung  $m$  enthält im Ganzen  $2m + 1$  Elemente, nämlich die  $m \infty^1$  Punkte  $b_i$ , die  $m \ 0^1$  Punkte  $a_i$  und einen constanten Factor; zwischen den  $2m$  ersten Elementen bestehen  $p$  Bedingungen-  
gleichungen.

(Ib) Von den rationalen Functionen der Ordnung  $m$  mit denselben  $m$  willkürlichen  $\infty^1$  Punkten  $b_i$  sind nur  $m - p + 1$  linear unabhängig oder zwischen  $m - p + 2$  solchen Functionen besteht mindestens eine lineare, homogene Gleichung.

(Ic) Die Zahl  $p + 1$  gibt die niederste Ordnung an, die eine rationale Function  $R(x, y)$  haben kann, wenn ihre  $\infty^1$  Punkte  $b_i$  auf  $F(x, y) = 0$  sämtlich beliebig sind.

Man kann diesen letzten Satz auch unmittelbar zur Definition des Geschlechtes  $p$  verwenden<sup>1)</sup>.

Die Bildung der Function  $R$  im 1. Falle und der  $p$  Gleichungen zwischen den Punkten  $a_i$  und  $b_i$  ist hiernach folgende:

Der Nenner  $M_0$  von  $R$  ist so zu bestimmen, dass er verschwindet

in den  $r$  Doppelpunkten  $\delta_1, \dots, \delta_r$  von  $F = 0$  und

in den  $m$  willkürlichen Punkten  $b_1, \dots, b_m$ .

Nach dieser Bestimmung hat  $M_0$  noch  $n\mu - 2r - m = i - m \ 0^1$  Punkte  $\beta_\lambda$  ( $\lambda = 1, \dots, i - m$ ), von welchen nach (I § 11) die  $i - m - p$  ersten beliebig sind, während die  $p$  letzten durch sie und die Punkte  $b_i$  eindeutig bestimmt sind. Hieraus folgt, dass  $i - m \geq p$  oder

$$n\mu - 2r \geq m + \frac{1}{2}(n - 1)(n - 2) - r \quad (1)$$

1) Weierstrass, in Vorlesungen von 1860 an.

sein muss, eine Ungleichung, die bei gegebenem  $m$  eine untere Grenze für  $\mu$  liefert.

Für den niedersten Werth  $m = p + 1$  z. B., den  $m$  bei willkürlich gegebenen  $\infty^1$  Punkten  $b_i$  annehmen kann, folgt aus (1)  $\mu \geq n - 2$ .

Der Zähler  $M$  von  $R$  ist nunmehr so zu bestimmen, dass er verschwindet

in den  $r$  Doppelpunkten  $\delta_1, \dots, \delta_r$  von  $F = 0$  und

in den  $i - m$  Hilfspunkten  $\beta_i$ , in denen  $M_0 = 0$  war.

Nach dieser Bestimmung hat nach Satz (I)  $M$  noch  $m - p + 1$  homogene, lineare Coefficienten, ist also von der Form

$$(2) \quad M = \sum_{h=0}^{m-p} \lambda_h M_h,$$

wo  $M_0, M_1, \dots, M_{m-p}$  bestimmte, adjungirte Functionen vom Grade  $\mu$  sind, welche sämmtlich in den Hilfspunkten  $\beta_i$  verschwinden, in welchen daher die Coefficienten der Potenzen von  $x$  und  $y$  von den Punkten  $\beta_i$ , also auch von den Punkten  $b_i$  abhängen. Die Coefficienten  $\lambda_h$  in (2) sind nun bis auf einen derselben (etwa  $\lambda_0$ ) schon eindeutig durch die  $m - p$  ersten, willkürlich wählbaren 0 Punkte  $a_i$  bestimmt. Nach dieser Bestimmung sind die Coefficienten der Potenzen von  $x$  und  $y$  in  $M$  abhängig von den  $m$  Punkten  $b_i$  und den  $m - p$  ersten Punkten  $a_i$ . Drückt man aus, dass die  $p$  letzten Punkte  $a_i$  ebenfalls 0<sup>1</sup> Punkte von  $R$  sein sollen, so erhält man die  $p$  Gleichungen

$$(3) \quad M = 0, \text{ gebildet für die Punkte } a_{m-p+1}, \dots, a_m,$$

welche die in (I) oder (Ia) erwähnten  $p$  Bedingungsgleichungen zwischen den  $2m$  0<sup>1</sup> und  $\infty^1$  Punkten  $a_i$  und  $b_i$  von  $R$  darstellen. In diese  $p$  Gleichungen (3) gehen allerdings noch die (zum Theil willkürlichen) Hilfspunkte  $\beta_i$  ein. Nach (I) § 10 sind aber die  $p$  letzten Punkte  $a_i$  ganz unabhängig von diesen Hilfspunkten oder stets dieselben, wie auch die Hilfspunkte beschaffen seien. Dieser Unabhängigkeit entsprechend lassen sich auch die  $p$  Bedingungsgleichungen (3) zwischen den Punkten  $a_i$  und  $b_i$  auf eine (allerdings transcendente) Form bringen, welche nur diese Punkte und keine der Aufgabe (A) fremden Elemente enthält. (Vgl. Satz I und IV § 20.)

2. Fall. Der Satz II § 11 lässt sich so aussprechen:

- (II) Wenn durch die  $m$   $\infty^1$  Punkte  $b_1, \dots, b_m$  einer rationalen Function  $R$  der  $m^{\text{ten}}$  Ordnung  $q$  ( $\geq 1$ ) linear unabhängige  $\Phi$ -Curven gehen, so muss  $m > p - q$  sein und es lässt sich  $R$  als Quotient zweier  $\Phi$ -Functionen vom Grade  $\mu = n - 3$

darstellen. Dabei sind die  $m \infty^1$  Punkte  $b_i$  und  $m - p + q$  der Punkte  $a_i$  willkürlich, die  $p - q$  letzten Punkte  $a_i$  aber durch die übrigen Punkte  $a_i$  und die Punkte  $b_i$  eindeutig bestimmt. Es bestehen daher zwischen den  $m \infty$  Punkten  $b_i$  und den  $m \cdot 0$  Punkten  $a_i$   $p - q$  Gleichungen.

Die Bildung der Function  $R$  und dieser  $p - q$  Gleichungen ist folgende.

Der Nenner  $\Phi_0$  von  $R$  ist vom  $n - 3^{\text{ten}}$  Grade und so zu bestimmen, dass er verschwindet in den  $r$  Doppelpunkten  $\delta_1, \dots, \delta_r$  von  $F = 0$  und in den  $m$  willkürlichen Punkten  $b_1, \dots, b_m$ . Nach dieser Bestimmung setzt sich  $\Phi_0$  aus  $q$  linear unabhängigen, adjungirten Functionen  $n - 3^{\text{ten}}$  Grades  $\varphi_1, \dots, \varphi_q$ , die für die sämtlichen  $m \infty^1$  Punkte  $b_i$  verschwinden, linear zusammen in der Form

$$\Phi_0 = \alpha_1 \varphi_1 + \dots + \alpha_q \varphi_q. \quad (4)$$

Man wähle die Coefficienten  $\alpha_1, \dots, \alpha_q$  irgendwie; damit sind die  $2p - 2 - m$  übrigen  $0^1$  Punkte  $\beta_i$ , die  $\Phi_0$  ausser den Doppelpunkten und den Punkten  $b_i$  besitzt, als Functionen der  $m$  Punkte  $b_i$  bestimmt.

Der Zähler  $\Phi$  von  $R$  ist ebenfalls von  $n - 3^{\text{ten}}$  Grade und so zu bestimmen, dass er verschwindet in den  $r$  Doppelpunkten  $\delta_i$  von  $F$  und in den  $2p - 2 - m$  Hilfspunkten  $\beta_i$ , in denen  $\Phi_0 = 0$  war. Nach dieser Bestimmung hat  $\Phi$  nach (II), da von den  $m \cdot 0^1$  Punkten  $a_i$  von  $R$  noch  $m - p + q$  willkürlich wählbar sind, die Form

$$\Phi = \lambda_0 \Phi_0 + \lambda_1 \Phi_1 + \dots + \lambda_x \Phi_x \quad (x = m - p + q), \quad (5)$$

wo  $\Phi_0, \Phi_1, \dots, \Phi_x$  bestimmte  $\Phi$ -Functionen sind, welche sämtlich in den Hilfspunkten  $\beta_i$  verschwinden, in welchen daher die Coefficienten der Potenzen von  $x$  und  $y$  von den Punkten  $\beta_i$ , also auch von den Punkten  $b_i$  abhängen. Die Coefficienten  $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_x$  in (5) bestimmen sich nun bis auf einen derselben (etwa  $\lambda_0$ ) eindeutig durch die  $m - p + q$  ersten  $0^1$  Punkte  $a_i$  von  $R$ . Die Coefficienten der Potenzen von  $x$  und  $y$  in  $\Phi$  sind nach dieser Bestimmung abhängig von den  $m$  Punkten  $b_i$  und den  $m - p + q$  ersten Punkten  $a_i$ . Drückt man aus, dass die  $p - q$  letzten Punkte  $a_i$  ebenfalls  $0^1$  Punkte von  $R$  sein sollen, so erhält man die  $p - q$  Gleichungen

$$\Phi = 0, \text{ gebildet für die Punkte } a_{m-p+q+1}, \dots, a_m, \quad (6)$$

welche die in (II) erwähnten  $p - q$  Bedingungsgleichungen zwischen den  $2m$  Punkten  $a_i$  und  $b_i$  darstellen. In diese  $p - q$  Gleichungen (6) gehen allerdings noch die (zum Theil willkürlichen) Hilfspunkte  $\beta_i$  ein. Nach (I) § 10 sind aber die  $p - q$  letzten Punkte

$a_i$  stets dieselben, wie auch die Hilfspunkte beschaffen seien. Dem entsprechend lassen sich auch die  $p - q$  Bedingungsgleichungen (6) zwischen den  $2m$  Punkten  $a_i$  und  $b_i$  auf eine (allerdings transcendente) Form bringen, welche nur diese Punkte und keine der Aufgabe (A) fremden Elemente enthält. (Vgl. Satz I und IV § 20.)

Für die durch Quotienten von  $\Phi$ -Functionen darstellbaren, rationalen Functionen hat die Ordnungszahl  $m$  nach (5) § 11 die obere Grenze  $2p - 2$  und die untere Grenze  $\frac{p}{2} + 1$ . Die letztere Zahl gibt überhaupt die niederste Ordnung an, die eine rationale Function  $R(x, y)$  bei allgemeiner Beschaffenheit von  $F(x, y) = 0$  haben kann<sup>1)</sup>. Wenn  $m$  noch unter diese Zahl herabsinkt, so muss  $F(x, y) = 0$  einen speciellen Charakter haben. Kann z. B.  $m$  auf 2 herabsinken, so ist die Gleichung  $F(x, y) = 0$  vom Geschlecht  $p$  von sehr specieller Art; sie führt auf die hyperelliptischen Functionen und Integrale.

Für spätere Untersuchungen (§ 23) ist es wichtig, Quotienten von  $\Phi$ -Functionen zu bilden, die von möglichst niederer Ordnung sind, aber im Zähler noch eine Anzahl von willkürlichen, linearen, homogenen Coefficienten enthalten. Für diesen Fall hat man nach den Betrachtungen am Schlusse von § 11 den Satz:

(III) Soll ein Quotient von zwei  $\Phi$ -Functionen bestimmt werden, der in einer möglichst geringen Zahl  $m_1$  von Punkten  $b_i \infty$  wird und im Zähler noch eine gegebene (zwischen gewissen in § 11 angegebenen Grenzen liegende) Zahl  $q_2$  von linearen, homogenen Coefficienten enthält, so setze man  $p$  in die Form  $p = q_1 q_2 + \tau$  (wo  $\tau < q_2$ ), wodurch eine gewisse Zahl  $q_1$  bestimmt wird. Dann ist  $m_1 = p - q_1 + q_2 - 1$  der Minimalwerth für die Ordnung der Function.

So ist z. B. nach der Tabelle (7) § 11 für  $q_2 = 2$  der gesuchte Quotient von der Form  $(\lambda_0 \Phi_0 + \lambda_1 \Phi_1) : \Phi_0$  und  $\min m_1 = p - q_1 + 1$ , wo  $q_1$  sich bestimmt aus  $p = 2q_1$  oder  $p = 2q_1 + 1$ ; für  $q_2 = 3$  ist der Quotient  $(\lambda_0 \Phi_0 + \lambda_1 \Phi_1 + \lambda_2 \Phi_2) : \Phi_0$  und  $\min m_1 = p - q_1 + 2$ , wo  $q_1$  sich bestimmt aus  $p = 3q_1$  oder  $p = 3q_1 + 1$  oder  $p = 3q_1 + 2$ .

Die zweite der oben gestellten Aufgaben lautet:

(B) Eine rationale Function  $R(x, y)$  von der Ordnung  $m$  aus den  $m \infty^1$  Punkten  $b_i$  und den  $m$  zugehörigen Residuen

<sup>1)</sup> Vgl. auch § 13.

$B_l (l = 1, \dots, m)$  zu bilden und die Bedingungsgleichungen zwischen diesen  $2m$  Elementen aufzustellen.

Wir nehmen wieder der Einfachheit halber an,  $R$  sei in den Punkten  $b_l \infty$  von der ersten Ordnung und die Punkte  $b_l$  seien einfache Punkte von  $F = 0$  mit endlichen Coordinaten.

Dabei ist die Erklärung der Residuen nach Cauchy die folgende:

Ist eine rationale Function  $R(x, y)$  von der Ordnung  $m$  in den  $m$  Punkten

$(b_1, y_{b_1}), \dots, (b_m, y_{b_m}) \in^1$  wie  $B_1(x - b_1)^{-1}, \dots, B_m(x - b_m)^{-1}$ , so heissen die Coefficienten  $B_1, \dots, B_m$  die Residuen der Function  $R(x, y)$  in den  $m$  Punkten  $b_1, \dots, b_m$ .

Die Lösung der Aufgabe (B) führt, wie sich zeigen wird, auf den dem Satz (Ia) analogen Satz<sup>1)</sup>:

(IV) Eine rationale Function von der Ordnung  $m$  enthält im Ganzen  $2m + 1$  Elemente, nämlich die  $m \in^1$  Punkte  $b_l$ , die  $m$  zugehörigen Residuen  $B_l$  und eine additive Constante; zwischen den  $2m$  ersten Elementen bestehen  $p$  Bedingungsgleichungen.

Nach der Lösung der Aufgabe A (1. Fall) kann man stets eine rationale Function herstellen, die in  $p + 1$  willkürlich gewählten Punkten  $\in^1$  wird. Man bilde nun zur Lösung von Aufgabe (B)  $m$  solcher Functionen  $M_1 : N_1, \dots, M_m : N_m$  derart, dass alle diese Functionen in denselben  $p$  willkürlich gewählten Hilfspunkten  $\xi_i (i = 1, \dots, p) \in^1$  werden, und dass ausserdem  $M_i : N_i$  in dem Punkte  $b_l \in^1$  wird. Aus ihnen setze man linear und mit unbestimmten Coefficienten die rationale Function

$$R = C_1 \frac{M_1}{N_1} + \dots + C_m \frac{M_m}{N_m} + C_0 \quad (7)$$

zusammen, die  $\in^1$  wird in den  $m$  Punkten  $b_l$  und den  $p$  Punkten  $\xi_i$ . Damit diese Function  $R$  den Bedingungen der Aufgabe (B) genügt, sind die Constanten  $C_i$  so zu bestimmen,

dass die Function (7) in  $x = b_l \infty$  wird, wie  $B_l(x - b_l)^{-1}$  und dass sie in den  $p$  Hilfspunkten  $\xi_i$  endlich bleibt.

Setzt man zur Abkürzung

$$\frac{M_l}{N_l} \frac{F'' y}{F' x} - \frac{M'_l(y)}{N'_l(y)} \frac{F' x}{F'' y} = S_l$$

und bezeichnet das Resultat der Substitution der Coordinaten des

1) In anderer Herleitung Riemann, Ges. W. S. 101.

Punktes  $b_k$  in diesen Ausdruck mit  $(S_i)_{b_k}$ , so verhält sich die Function (7)

$$\text{in } x = b_i \text{ wie } C_i(S_i)_{b_i} (x - b_i)^{-1}.$$

Daher bestimmen sich die Constanten  $C_i$  in (7) durch die Residuen  $B_i$  und die  $\infty$  Punkte  $b_i$  mittels der Gleichungen

$$(8) \quad C_i = B_i : (S_i)_{b_i}.$$

Ferner verhält sich die Function (7)

$$\text{in } x = \xi_i \text{ wie } (x - \xi_i)^{-1} \cdot \sum_i C_i(S_i)_{\xi_i}.$$

Trägt man den Werth von  $C_i$  ein und drückt aus, dass in der Entwicklung von (7) in der Umgebung des Punktes  $\xi_i$  der Coefficient von  $(x - \xi_i)^{-1}$  verschwindet, so erhält man die Gleichungen

$$(9) \quad \sum_{i=1}^m B_i(S_i)_{\xi_i} : (S_i)_{b_i} = 0 \quad (i = 1, \dots, p).$$

Dies sind in der That  $p$  Bedingungsgleichungen zwischen den  $m \infty^1$  Punkten  $b_i$  und den  $m$  zugehörigen Residuen  $B_i$  der Function  $R$ . Aus ihnen bestimmen sich im Allgemeinen<sup>1)</sup>, wenn  $m > p$  und wenn die  $m - p$  ersten Werthe  $B_i$  und die  $\infty^1$  Punkte  $b_i$  gegeben sind, die  $p$  letzten Residuen  $B_i$  eindeutig, d. h. unabhängig von den  $p$  Hilfspunkten  $\xi_i$ , wie man aus den Sätzen des § 10 leicht beweist. Dementsprechend lassen sich auch hier die  $p$  Bedingungsgleichungen zwischen den  $2m$  Elementen  $b_i$  und  $B_i$  auf eine (rein algebraische und sehr einfache) Form bringen, welche nur diese Elemente enthält.

Wir geben diese Gleichungen und ihre Discussion im nächsten §.

### § 13. Bedingungsgleichungen zwischen den Elementen einer rationalen Function.

Es bleibt noch übrig die  $p$  Bedingungsgleichungen zwischen den  $m \infty$  Punkten  $b_i$  und den zugehörigen Residuen  $B_i$  einer rationalen Function  $R(x, y)$  von der Ordnung  $m$  aufzustellen und zwar in einer von fremden Elementen freien Form<sup>2)</sup>. Um dies durchzuführen, bedarf es einer Voruntersuchung über gewisse rationale Functionen von  $(x, y)$ , die lediglich von  $F(x, y) = 0$  abhängen (Satz I), und eines Satzes (II), der sich auf diese Functionen bezieht.

1) Vgl. § 13.

2) In anderer Form Riemann, Ges. W. S. 100 und 101.

Ist  $\Phi$  eine allgemeine, adjungirte Function des  $n - 3^{\text{ten}}$  Grades von  $F = 0$ , so zeigt die Function

$$\Phi : F'y \quad (1)$$

auf der Curve  $F = 0$  oder in der Verzweigungsfläche  $T$  folgendes Verhalten:

( $\alpha$ ) Sie wird  $= 0^2$  in jedem der  $n$  Punkte ( $x = \infty, y = \infty$ ). Denn in einem solchen Punkt ist  $F'y = \infty^{n-1}$  und  $\Phi = \infty^{n-3}$ .

( $\beta$ ) Sie wird  $= \infty^1$  in jedem der  $\omega = 2n + 2p - 2$  einfachen Verzweigungspunkte.

Denn in einem solchen Punkte ist  $F'y = 0^1$ , während  $\Phi$  endlich und von 0 verschieden ist.

( $\gamma$ ) Sie wird in keinem weiteren Punkte  $\infty$ .

Denn in einem Doppelpunkt ist zwar für jeden der beiden Zweige  $F'(y) = 0^1$ , ebenso aber auch  $\Phi = 0^1$ , der Quotient (1) bleibt endlich.

Eine rationale Function von  $(x, y)$ , welche die drei Eigenschaften ( $\alpha, \beta, \gamma$ ) besitzt, heisst ein Integrand 1. Gattung<sup>1</sup>); es ist leicht zu sehen, dass die Function (1) der allgemeinste Integrand 1. Gattung ist.

Ist nämlich  $S$  eine rationale Function mit den Eigenschaften ( $\alpha, \beta, \gamma$ ), so zeigt die Function  $S \cdot F'y$  in  $T$  folgendes Verhalten: sie ist  $= \infty^{n-3}$  in jedem der  $n$  Punkte ( $x = \infty, y = \infty$ ); sie ist  $= 0^1$  in einem Doppelpunkt für jeden der beiden Zweige desselben; sie ist ferner  $= 0^1$  in den unbestimmt gelassenen, im Endlichen auf  $F = 0$  oder in  $T$  gelegenen Nullpunkten von  $S$  und sie ist endlich und von 0 verschieden in allen übrigen Punkten insbesondere in den Verzweigungspunkten. Die Ordnung der Function ist gleich der Zahl ihrer  $\infty^1$  Punkte, also gleich  $n(n - 3)$ . Da die Function  $S \cdot F'y$  nur  $\infty$  wird in den Punkten ( $x = \infty, y = \infty$ ) und da sie in jedem Doppelpunkte für jeden der beiden Zweige denselben Werth ( $0^1$ ) annimmt, so ist sie nach Satz (I) § 8 eine rationale, ganze Function in  $(x, y)$  vom Grade  $n - 3$ ; und da sie gleichzeitig  $F = 0$  adjungirt ist, so ist sie eine  $\Phi$ -Function. Die allgemeinste rationale Function  $S$ , die den Bedingungen ( $\alpha, \beta, \gamma$ ) genügt, ist also in der That von der Form (1).

Da  $p$  linear unabhängige  $\Phi$ -Functionen  $\Phi_1, \dots, \Phi_p$  existiren (Satz II § 10), so gibt es auch  $p$  linear unabhängige Integranden 1. Gattung, nämlich

$$\frac{\Phi_1}{F'y}, \dots, \frac{\Phi_p}{F'y}. \quad (2)$$

Daher der Satz:

- (I) Der allgemeinste Integrand 1. Gattung ist von der Form (1), d. h. Quotient einer allgemeinen  $\Phi$ -Function durch  $F'y$ . Die Zahl der linear unabhängigen Integranden 1. Gattung ist  $= p$ , d. h. gleich dem Geschlecht der Gleichung  $F(x, y) = 0$ .

Sei nun ferner

$$(3) \quad P(x, y)$$

eine beliebige, ganze oder gebrochene, rationale Function der Ordnung  $\mu$ . Setzt man  $P(x, y) = \varrho$  und betrachtet  $x$  als die unabhängige Variable, so ist mit Rücksicht auf  $F(x, y) = 0$

$$(4) \quad \frac{d\varrho}{dx} = \frac{P'(x) dx + P'y dy}{dx} = \frac{F'y P'x - F'x P'y}{F'y}.$$

Daher ist auch  $\frac{d\varrho}{dx}$  und ebenso  $\frac{dx}{d\varrho}$  eine rationale Function von  $(x, y)$  oder eine irrationale Function von  $x$ . Bildet man mit Hilfe des allgemeinen Integranden 1. Gattung (1) die Function

$$(5) \quad \frac{\Phi}{F'y} \frac{dx}{d\varrho},$$

so ist auch diese eine rationale Function von  $(x, y)$  oder eine irrationale Function von  $x$ . Man denke sich nun durch die Gleichungen  $P(x, y) = \varrho$  und  $F(x, y) = 0$  statt  $x$  die Grösse  $\varrho$  als unabhängige Variable eingeführt, betrachte also (5) als irrationale Function von  $\varrho$ . Zu einem bestimmten Werthe  $\varrho$  von  $P(x, y)$  gehören nach Voraussetzung  $\mu$  Punkte in  $T$ , die bezeichnet seien mit  $(x_l, y_l)$  ( $l=1, \dots, \mu$ ). Dieselben ändern bei stetiger Werthänderung von  $\varrho$  ebenfalls stetig ihre Lage in  $T$ , oder die Coordinaten  $(x_l, y_l)$  der  $\mu$  Punkte sind stetige Functionen des Werthes  $\varrho$ . Bildet man nun die rationale Function (5) von  $(x, y)$  für die  $\mu$  Punkte  $(x_l, y_l)$  und bezeichnet die Summe dieser  $\mu$  Werthe durch

$$(6) \quad \sum_{l=1}^{\mu} \left[ \frac{\Phi}{F'y} \frac{dx}{d\varrho} \right]_{x_l y_l},$$

so ist dieser Ausdruck ebenfalls eine Function von  $\varrho$ . Um den Charakter dieser Function festzustellen, denke man sich eine besondere Ebene als Ort der complexen Variablen  $\varrho$ . Beschreibt  $\varrho$  in derselben eine geschlossene Curve  $C$  — die nicht durch einen solchen Punkt  $\varrho$  führt, dass von den  $\mu$  entsprechenden Punkten  $(x_l, y_l)$  eine in einen Verzweigungspunkt oder Doppelpunkt von  $T$  fällt — so be-



schreiben die  $\mu$  zugehörigen Punkte  $(x_i, y_i)$  in  $T$   $\mu$  getrennte Wege  $C_1, \dots, C_\mu$ , die wieder nach den  $\mu$  Punkten  $(x_i, y_i)$  zurücklaufen, jedoch im Allgemeinen so, dass die Endpunkte eine Permutation der Anfangspunkte sind. Daher ist der Endwerth von (6) gleich dem Anfangswerth, da (6) eine symmetrische Function der  $\mu$  Punkte  $(x_i, y_i)$  ist. Hieraus folgt, dass (6) eine einwerthige Function von  $\varrho$  ist. Wenn sich nun zeigt, dass (6) nur für eine endliche Zahl von Werthen  $\varrho \infty$  wird und für jeden dieser Werthe nur in endlicher Ordnung  $\infty$  wird, so muss (6) eine rationale Function von  $\varrho$  sein, und wenn sich weiter zeigt, dass (6) für keinen Werth von  $\varrho \infty$  wird, so muss (6) eine Constante sein, d. h. ganz unabhängig von dem Werthe von  $\varrho$ , dem das Punktsystem  $(x_i, y_i)$  in (6) entspricht. Diese Constante ist bestimmt, sobald man den Werth von (6) für einen Werth von  $\varrho$  kennt. Untersuchen wir also den Ausdruck (6) für alle Werthe von  $\varrho$ , für die er möglicherweise  $\infty$  werden kann.

- 1) Nimmt  $\varrho$  einen solchen Werth an, dass einer der  $\mu$  Punkte  $(x_i, y_i)$  in einen Doppelpunkt von  $T$  fällt, so bleibt das entsprechende Glied in (6) endlich.

Denn in einem Doppelpunkt ist für jeden der beiden Zweige  $F'x = 0$ ,  $F'y = 0$ ; es ist aber  $\Phi : F'y$  und ebenso nach (4)  $\frac{dx}{d\varrho}$  endlich und von 0 verschieden.

- 2) Nimmt  $\varrho$  einen solchen Werth an, dass einer der  $\mu$  Punkte  $(x_i, y_i)$  in einen Verzweigungspunkt von  $T$  fällt, so bleibt wieder das entsprechende Glied in (6) endlich.

Denn in einem Verzweigungspunkt ist  $F'y = 0^1$ , also  $\Phi : F'y = \infty^1$ ; zugleich aber ist nach (4)  $\frac{dx}{d\varrho} = 0^1$ ; das Product ist endlich und von 0 verschieden.

- 3) Nimmt  $\varrho$  einen solchen Werth an, dass einer der  $\mu$  Punkte  $(x_i, y_i)$  in einen der  $n$  Punkte  $(x = \infty, y = \infty)$  fällt, so ist das entsprechende Glied in (6), also auch (6) selber, endlich (oder 0).

Denn ist  $\varrho$  in dem betreffenden Punkte  $(x = \infty, y = \infty)$  endlich, so gelten die Entwicklungen

$$\varrho = A + A_1 x^{-1} + \dots; \quad \frac{d\varrho}{dx} = -A_1 x^{-2} + \dots,$$

also ist  $\frac{dx}{d\varrho} = \infty^2$ , während  $\Phi : F'y = 0^2$  wird, so dass in dem betreffenden Punkte das entsprechende Glied von (6) endlich bleibt.

Ist aber  $\varrho$  in dem betreffenden Punkte  $(x = \infty, y = \infty)$  selber  $\infty$ , etwa in  $q^{\text{ter}}$  Ordnung, so gelten die Entwicklungen

$$\varrho = A_0 x^q + A_1 x^{q-1} + \dots; \quad \frac{d\varrho}{dx} = q A_0 x^{q-1} + \dots,$$

daher ist  $\frac{dx}{d\varrho} = O^{q-1}$ , während  $\Phi: F''y = O^2$  wird, so dass in dem betreffenden Punkte das entsprechende Glied von (6)  $= O^{q+1}$  wird.

- 4) Wird schliesslich  $\varrho = \infty$  in einem Punkte  $(x, y) = (b, y_b)$  mit endlichen Coordinaten, so wird jedes Glied in (6)  $= O^2$  also (6) selber  $= O^2$ .

Denn in einem solchen Punkt ist

$$\varrho \text{ proportional mit } (x - b)^{-1}, \quad \frac{d\varrho}{dx} \text{ mit } (x - b)^{-2},$$

also wird  $\frac{dx}{d\varrho} = O^2$ , während  $\Phi: F''y$  endlich bleibt.

Hiernach wird die Summe (6) nirgends  $\infty$ ; sie ist folglich eine Constante und diese Constante ist 0, weil für den Werth  $\varrho = \infty$  der Ausdruck (6)  $= 0$  ist, wie in 4) gezeigt wurde.

Führt man in (6) die Werthe  $(x_i, y_i)$  in das Innere der Klammer ein und lässt den allen Gliedern im Nenner gemeinsamen Factor  $d\varrho$  weg, so hat man die Gleichung

$$(7) \quad \sum_{i=1}^n \frac{\Phi(x_i, y_i)}{F''(y_i)} dx_i = 0.$$

Ein Ausdruck der Form  $\Phi(x, y) dx: F''y$  heisst ein Abel'sches Differential 1. Gattung; dasselbe hängt nur von  $F(x, y) = 0$  ab. Die Gleichung (7) enthält das sogenannte Abel'sche Theorem für Differentiale 1. Gattung<sup>1)</sup>, nämlich:

- (II) Für jedes Differential 1. Gattung ist die Summe der Differentiale, gebildet mit den Punkten  $(x_i, y_i)$  ( $i=1, \dots, \mu$ ), in welchen eine ganze oder gebrochene, rationale Function  $P(x, y)$  von der Ordnung  $\mu$  denselben Werth annimmt, gleich 0.

Dieser Satz ist ein specieller Fall des Abel'schen Theorems für das allgemeine Abel'sche Differential, das sich in derselben Weise wie oben die Gleichung (7) ableiten lässt. (Vgl. § 19 Satz VI.) Da es  $p$  linear unabhängige  $\Phi$ -Functionen gibt, die durch  $\Phi_1, \dots, \Phi_p$  bezeichnet sein mögen, so zerfällt auch die Gleichung (7) in  $p$  Gleichungen, nämlich

$$(8) \quad \sum_i \frac{\Phi_1(x_i, y_i)}{F''(y_i)} dx_i = 0, \dots, \sum_i \frac{\Phi_p(x_i, y_i)}{F''(y_i)} dx_i = 0.$$

1) Riemann, Ges. W. S. 116.

Dies giebt den Satz:

(III) Wenn eine rationale Function  $P(x, y)$  von der Ordnung  $\mu$  denselben Werth  $\varrho$  annimmt in den  $\mu$  Punkten  $(x_i, y_i)$ , so bestehen zwischen diesen  $\mu$  Punkten und den  $\mu$  Differentialen  $dx_i$  (die eine gewisse Fortschrittsrichtung der Punkte  $(x_i, y_i)$  in der Fläche  $T$  angeben) stets  $p$  Relationen der Form (8), unabhängig von dem jedesmaligen Werth von  $\varrho$ .

Wir wenden diesen Satz auf die im vorigen § betrachtete Function  $R(x, y)$  von der Ordnung  $m$  an, für welche die  $m \infty^1$  Punkte durch  $b_i$  und die zugehörigen  $m$  Residuen durch  $B_i$  bezeichnet wurden; wir führen aber zugleich statt  $R$  eine rationale Function  $r$  von derselben Ordnung  $m$  ein mittels der Substitution

$$R = \frac{r - a}{r - b}. \quad (9)$$

Dann sind  $b_1, \dots, b_m$  diejenigen  $m$  Punkte, in welchen die rationale Function  $r$  den Werth  $b$  annimmt. Daher gelten die  $p$  Gleichungen (8), wenn man in denselben  $\mu$  durch  $m$  und  $x_1, \dots, x_\mu$  durch  $b_1, \dots, b_m$  ersetzt, wobei wir unter  $b_i$  zugleich die  $x$ -Ordinate des Punktes  $b_i$  verstehen. Nun ist das zu  $b_i$  gehörige Residuum  $B_i$  von  $R$  nach (9)

$$\left. \begin{aligned} B_i &= \lim_{x=b_i} R \cdot (x - b_i) = (b - a) \cdot \lim_{x=b_i} \frac{x - b_i}{r - b} = (b - a) \left( \frac{dx}{dr} \right)_{x=b_i} \\ &= (b - a) \frac{db_i}{db}. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Setzt man daher für  $dx_i$  in (8) den Werth  $db_i = \frac{B_i db}{b - a}$  und unterdrückt den allen Gliedern gemeinsamen Factor  $\frac{db}{b - a}$ , so erhält man die  $p$  Gleichungen<sup>1)</sup>:

$$\sum_{i=1}^m B_i \left[ \frac{\Phi_1(x, y)}{F' y} \right]_{b_i} = 0, \dots, \sum_{i=1}^m B_i \left[ \frac{\Phi_p(x, y)}{F' y} \right]_{b_i} = 0, \quad (11)$$

oder den Satz:

(IV) Ist  $R(x, y)$  eine rationale Function von der Ordnung  $m$  und sind die  $m \infty^1$  Punkte  $b_1, \dots, b_m$  derselben einfache Punkte im Endlichen von  $T$ , so bestehen zwischen ihnen und den  $m$  zugehörigen Residuen  $B_1, \dots, B_m$  die  $p$  Gleichungen (11), die ausser diesen Elementen nur von  $F(x, y) = 0$  abhängen.

1) Vgl. (5) § 19.

Wir verweilen noch kurz bei den Gleichungen (11). Riemann gelangt zu denselben auf transcendentem Wege, indem er die rationale Function  $R$  durch eine Summe von Integralen zweiter Gattung darstellt und die Bedingungen aufsucht, unter denen eine solche Summe in der Fläche  $T$  eindeutig ist (s. Gl 7 § 17). Er kommt dabei unter Voraussetzung des fundamentalen Satzes (der ebenfalls auf transcendentem Wege gewonnen wird), dass es stets  $p$  linear unabhängige  $\Phi$ -Functionen oder Differentiale 1. Gattung gibt, gerade zu den obigen Gleichungen (11) als den einzigen Bedingungen, die zwischen den  $\infty^1$  Punkten  $b_i$  und den zugehörigen Residuen  $B_i$  der rationalen Function bestehen müssen. Die Discussion der Gleichungen (11) führt alsdann zu dem Riemann'schen Satze (in der Form (I) § 11) und seiner Erweiterung durch Roch (in der Form (II) § 11). Es ist von Interesse, diese Riemann-Roch'sche Discussion kennen zu lernen, da bei derselben die Bedeutung der  $\Phi$ -Functionen besonders deutlich hervortritt. Wir nehmen also an, man habe die Gleichungen (11), ohne über die Ordnungszahl  $m$  und die Lage der  $\infty^1$  Punkte  $b_i$  von  $R$  in  $T$  eine Annahme zu machen, auf dem angegebenen Riemann'schen Wege (§ 17, Gl. 7) gewonnen und stellen die Aufgabe, aus diesen Gleichungen die Grenzen für die Ordnungszahl  $m$  und das Gesetz der Abhängigkeit zwischen den  $\infty^1$  und  $0^1$  Punkten der rationalen Function  $R$  zu ermitteln.

Es wird von der Beschaffenheit der Function  $R$  oder der  $m$  Punkte  $b_i$  abhängen, ob die  $p$  Gleichungen (11) linear unabhängig sind oder nicht d. h. ob es  $p$  constante Factoren gibt, mit denen sie multiplicirt die Summe 0 geben oder ob dies nicht zutrifft. Hiernach sind (wie in § 12) zwei Fälle zu unterscheiden; im ersten Falle ist  $R$  eine Function von allgemeiner, im zweiten Falle eine Function von besonderer Art; wir beginnen mit dem ersten Fall, der dem ersten Fall in § 12 S. 87 entspricht.

1. Fall. Hier gilt der Satz:

(V) Sind die  $p$  Gleichungen (11) linear unabhängig, so sind die  $m$  Punkte  $b_i$ , in welchen die rationale Function  $R$   $\infty^1$  wird, derart unabhängig von einander, dass sie nicht auf ein und derselben  $\Phi$ -Curve liegen.

Denn, angenommen die  $m$  Punkte  $b_i$  lägen auf einer  $\Phi$ -Curve  $\lambda_1 \Phi_1 + \dots + \lambda_p \Phi_p = 0$ , so würden die  $p$  Gleichungen (11), multiplicirt mit diesen Factoren  $\lambda$  und addirt, identisch 0 geben, was der Voraussetzung, dass die Gleichungen (11) linear unabhängig seien, widerspricht. (q. e. d.)

(Va) Umgekehrt: Sind die  $m$  Punkte  $b_i$ , in denen eine ratio-

nale Function  $R \infty^1$  wird, derart unabhängig, dass sie nicht sämmtlich auf ein und derselben  $\Phi$ -Curve liegen, so sind die  $p$  Gleichungen (11) linear unabhängig.

Denn, angenommen, die  $p$  Gleichungen (11) seien linear abhängig und das zugehörige Factorensystem sei  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ , so müssten bei der Addition, damit die Summe identisch 0 würde, die Coefficienten von  $B_1, \dots, B_m$  verschwinden d. h. die  $m$  Punkte  $b_i$  auf derselben  $\Phi$ -Curve liegen, was der Voraussetzung widerspricht. (q. e. d.)

Zugleich muss in diesem Falle  $m > p$  sein; denn für  $m = p$  (und ähnlich für  $m < p$ ) hätte man aus (11) durch Elimination der  $B_i$

$$\sum \pm \Phi_1(b_1) \cdots \Phi_p(b_p) = 0$$

d. h. ebensowohl die  $m$  Punkte  $b_i$  müssten auf derselben  $\Phi$ -Curve liegen als auch die Gleichungen (11) wären linear abhängig. Wir fassen dies so zusammen:

(VI) Sind die  $m \infty^1$  Punkte  $b_i$  einer rationalen Function derart willkürlich, dass sie nicht 0-Punkte ein und derselben  $\Phi$ -Function sind, so muss  $m > p$  sein. Von den  $m$  Residuen  $B_i$  sind alsdann noch  $m - p$  willkürlich, die  $p$  letzten aber durch sie und die Punkte  $b_i$  eindeutig bestimmt.

2. Fall. Hier gilt der Satz<sup>1)</sup>:

(VII) Sind die  $p$  Gleichungen (11) linear abhängig von einander derart, dass  $q$  derselben eine identische Folge der übrigen sind, so müssen die  $m$  Punkte  $b_i$  0-Punkte der nämlichen  $q$  linear unabhängigen  $\Phi$ -Functionen sein.

Zum Beweise seien die  $p - q$  letzten der Gleichungen (11) linear unabhängig, die  $q$  ersten aber eine identische Folge derselben, so dass man hat  $p > q \geq 1$  und  $m > p - q$ . Als dann müssen die  $p - q$  letzten Gleichungen (11), mit gewissen Factoren  $\lambda'_{q+1}, \dots, \lambda'_p$  multiplicirt und addirt, die erste Gleichung (11) ergeben, mit andern Factoren  $\lambda''_{q+1}, \dots, \lambda''_p$  multiplicirt und addirt, die zweite Gleichung (11) u. s. f. bis zur  $q^{\text{ten}}$  Gleichung (11). Man erhält so die  $q$  Gleichungen

$$\lambda_1 \Phi_1 - \sum_{i=q+1}^p \lambda'_i \Phi_i = 0, \dots, \lambda_q \Phi_q - \sum_{i=q+1}^p \lambda''_i \Phi_i = 0 \quad (12)$$

und jeder dieser  $q$  Gleichungen genügen die sämmtlichen  $m \infty^1$  Punkte  $b_i$  der Function  $R$ . Mehr als  $q$  Gleichungen aber können nicht durch die sämmtlichen  $m$  Punkte  $b_i$  befriedigt werden, weil sonst mehr als

1) Roch, Journ. für Math. Bd. 64, p. 372 ff. (1864); vgl. auch Brill und Nöther, Math. Ann. VII. S. 290 (1873).



jeden derselben die nämlichen  $q$  linear unabhängigen  $\Phi$ -Functionen verschwinden, so muss  $m > p - q$  sein. Von den  $m$  Residuen  $B_i$  der Function  $R$  sind alsdann noch  $m - p + q$  willkürlich, die  $p - q$  letzten aber durch sie und die  $m$  Punkte  $b_i$  eindeutig bestimmt.

Die Sätze (VI) und (VIII) sind nun identisch mit den Sätzen (I) und (II) in § 11. Denn die hier gefundene Abhängigkeit zwischen den  $\infty^1$  Punkten  $b_i$  und den Residuen  $B_i$  lässt sich mittels der Form (7) § 12 der Function  $R$  leicht in die früher (§ 11) gefundene Abhängigkeit zwischen den  $\infty^1$  Punkten  $b_i$  und  $0^1$  Punkte  $a_i$  von  $R$  umsetzen.

Der Fall 2 tritt immer ein, wenn  $m \leq p$  ist; es kann indess auch  $m > p$  sein. Aber es hat  $m$  eine obere Grenze, nämlich  $m \leq 2p - 2$ , da eine  $\Phi$ -Curve, abgesehen von den Doppelpunkten, nur  $2p - 2$   $0^1$  Punkte besitzt und es hat andererseits  $m$  eine untere Grenze, nämlich  $m \geq \frac{p}{2} + 1$ , wie in § 11 Gl. (5) gezeigt wurde. Das letztere ergibt sich auch durch eine einfache Abzählung<sup>1)</sup>, wenn man die  $m$   $\infty^1$  Punkte  $b_i$  von  $R$  nicht als gegeben annimmt, sondern so bestimmt, dass die Ordnung  $m$  von  $R$  eine möglichst niedere wird. Nach (Ia) § 12 hat eine rationale Function  $R$  von der Ordnung  $m$  im Ganzen  $2m + 1$  Elemente, nämlich die  $m$   $\infty^1$  Punkte  $b_i$ , die  $m$   $0^1$  Punkte  $a_i$  und einen constanten Factor; zwischen den  $2m$  ersten Elementen bestehen  $p$  Bedingungsgleichungen. Ferner muss von den  $m$  Punkten  $b_i$  und von den  $m$  Punkten  $a_i$  je einer willkürlich sein. Denn ist  $R = M : N$  von der Ordnung  $m$ , so ist auch die Function  $\lambda_0 (M + \lambda N) : (M + \mu N)$ , wo  $\lambda_0, \lambda, \mu$  constante Coefficienten sind, von der Ordnung  $m$ . In dieser Function ist wegen der willkürlichen Parameter  $\lambda$  und  $\mu$  je einer der  $0^1$  und der  $\infty^1$  Punkte willkürlich; dasselbe muss von der Function  $R = M : N$  gelten. Nach willkürlicher Bestimmung je eines der Punkte  $a_i$  und  $b_i$  und des Factors  $\lambda_0$  hat  $R$  noch  $2m - 2$  Elemente, welche  $p$  Bedingungsgleichungen genügen müssen. Dies ist nur möglich, wenn  $2m - 2 \geq p$  oder  $m \geq \frac{p}{2} + 1$  ist. (q. c. d.)

1) Riemann, Ges. W. S. 101.

## Dritter Abschnitt.

### Die Abel'schen Integrale.

Im zweiten Abschnitt wurden die zu  $F(x, y) = 0$  gehörigen rationalen Functionen von  $(x, y)$  auf ihre charakteristischen Eigenschaften und ihre Bildungsweise untersucht. Das Gleiche soll jetzt mit den Integralen dieser rationalen Functionen, den sogenannten Abel'schen Integralen geschehen, deren Differentiale zum Theil schon im zweiten Abschnitt aufgetreten sind. Wie bei den rationalen Functionen die Curve  $n^{\text{ter}}$  Ordnung, so ist bei den Abel'schen Integralen die  $n$ -blättrige Verzweigungsfläche  $T$  von  $y$  als geometrisches Bild der Gleichung  $F(x, y) = 0$  vorzuziehen. Wir untersuchen zuerst in § 14—17 die Abel'schen Integrale selber; es zeigt sich, dass dieselben in einzelnen Punkten der Verzweigungsfläche  $T$  nicht nur algebraisch, sondern im Allgemeinen auch logarithmisch unendlich werden, und dass sie in  $T$  nicht eindeutige, sondern unendlich vieldeutige Functionen des Ortes von bestimmtem Charakter sind. Man kann das allgemeine Abel'sche Integral zusammensetzen aus dreierlei Gattungen von Integralen, deren Eigenschaften und Bildungsweise besonders einfach und charakteristisch ist. Wir betrachten zweitens in § 18—21 die Beziehungen, die zwischen Abel'schen Integralen unter sich oder zwischen ihnen und rationalen Functionen stattfinden. Dabei ergeben sich eine Reihe von Darstellungen und Sätzen, von denen wir als das Wichtigste hier nur das Abel'sche Theorem hervorheben.

#### § 14. Das allgemeine, Abel'sche Integral.<sup>1)</sup>

Wir beginnen mit den Eigenschaften des allgemeinen, zu  $F(x, y) = 0$  gehörigen, Abel'schen Integrals. Dasselbe hat, wenn  $P(x, y)$  eine rationale Function von  $(x, y)$  bezeichnet, die Form

$$(1) \quad W = \int_{\xi, \eta}^{x, y} P(x, y) dx,$$

wobei der Integrationsweg eine beliebige Curve in der  $n$ -blättrigen

1) Puiseux-Fischer, Unters. üb. algebr. Funct. Halle 1861. S. 129 ff.



Verzweigungsfläche  $T$  zwischen einem festen Anfangspunkt  $(\xi, \eta)$  und einem variablen Endpunkt  $(x, y)$  ist.

Betrachtet man  $W$  als Function der Coordinaten des Punktes  $(x, y)$  in  $T$ , so ist diese Function charakterisirt einerseits durch ihre Unstetigkeiten, andererseits durch ihre Vieldeutigkeit. Bei der Besprechung derselben mögen vorerst noch die allgemeinen Voraussetzungen gelten, die in § 2 über die Fläche  $T$  und in § 6 über eine rationale Function  $P(x, y)$  gemacht wurden.

Wir untersuchen zuerst die Integralfunction  $W$  auf ihr Verhalten in einzelnen Punkten von  $T$ .  $W$  ist stetig in einem Punkte  $(x_1, y_1)$  von  $T$  (auch wenn derselbe ein Verzweigungspunkt ist), falls für  $(x = x_1, y = y_1)$   $\lim (x - x_1) P(x, y) = 0$  und stetig in einem der  $n$  Punkte  $(x = \infty, y = \infty)$ , wenn für diese Werthe  $\lim x^{-1} P(x, y) = 0$  ist. Im Allgemeinen ergibt sich das Verhalten von  $W$  in einem Punkte  $(x_1, y_1)$  von  $T$  aus der in der Umgebung dieses Punktes gültigen Reihenentwicklung der Function  $P(x, y)$  nach Potenzen von  $x - x_1$  durch Integration nach  $x$ . Um verschiedene Lagen des Punktes gleichzeitig zu berücksichtigen, sei jedem Punkte von  $T$  die Grösse  $s$  zugeordnet, die in ihm unendlich klein von der ersten Ordnung ist, so dass  $s$  die Bedeutung  $x - x_1$ ,  $(x - x_1)^{\frac{1}{\lambda}}$  oder  $x^{-1}$  hat, je nachdem der Punkt ein einfacher Punkt (mehrfache Punkte ohne Verzweigung inbegriffen) oder ein  $(\lambda - 1)$ -facher Verzweigungspunkt im Endlichen von  $T$  oder einer der Punkte  $(x = \infty, y = \infty)$  ist. In der Umgebung dieser Punkte ist alsdann  $P(x, y)$  jedesmal dargestellt durch eine Entwicklung von der Form (§ 6 Satz II)

$$P(x, y) = \mathfrak{P}(s) + B_1 s^{-1} + B_2 s^{-2} + \dots, \quad (2)$$

wo  $\mathfrak{P}(s)$  eine nach ganzen Potenzen von  $s$  mit positiven Exponenten fortschreitende Reihe bezeichnet und wo die nachfolgenden Glieder mit negativen Exponenten, welche die Art der Unstetigkeit von  $P(x, y)$  in dem betrachteten Punkte angeben, nur in endlicher Zahl vorkommen. Aus (2) ergibt sich, wenn man mit  $dx$  multiplicirt und die Integration ausführt, nachdem  $s$  durch seine verschiedenen Werthe ersetzt ist, für  $W$  im Allgemeinen ein Ausdruck von der Form

$$W = \mathfrak{P}_1(s) + A \log s + A_1 s^{-1} + A_2 s^{-2} + \dots, \quad (3)$$

wo  $\mathfrak{P}_1(s)$  wieder eine aufsteigende Potenzreihe von  $s$  ist und wo die Glieder mit negativen Exponenten wieder bis zu einer endlichen Ordnung ansteigen.

Hieraus ist ersichtlich, dass das Abel'sche Integral  $W$  im Allgemeinen nicht nur algebraisch, sondern auch logarithmisch unendlich wird. Ein im Endlichen von  $T$  liegender Punkt  $(x_1, y_1)$  ohne oder mit

Verzweigung ist ein logarithmischer Unstetigkeitspunkt von  $W$ , wenn in der Entwicklung von  $P(x, y)$  in der Umgebung des Punktes das Glied  $(x - x_1)^{-1}$  vorkommt; einer der  $n$  Punkte  $(x = \infty, y = \infty)$  von  $T$ , wenn in der Entwicklung von  $P(x, y)$  in der Umgebung dieses Punktes das Glied  $x^{-1}$  vorkommt.

Wir untersuchen zweitens die Vieldeutigkeit der Integralfunktion  $W$  in der Verzweigungsfläche  $T$ . Nach den allgemeinen

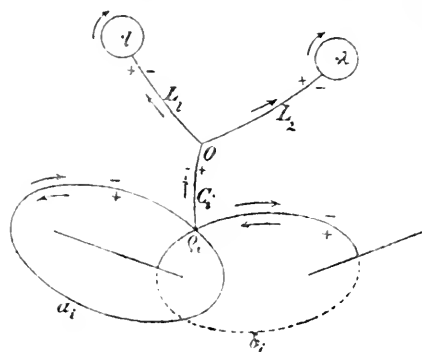


Fig. 8.

Methoden von Cauchy und Riemann hat man die  $m$  Punkte  $(x_l, y_l)$  ( $l = 1, \dots, m$ ) der Fläche  $T$ , in denen  $W$  logarithmisch unendlich wird und zu denen auch Verzweigungspunkte oder einzelne der Punkte  $(x = \infty, y = \infty)$  gehören können, durch kleine Kreise auszuschneiden und die so durchlöchernte Fläche durch Querschnitte in eine einfach zusammenhängende Fläche  $T'$  zu verwandeln.

Diese Querschnitte, die einander nicht schneiden sollen, bestehen nach § 2 (s. Fig. 8; die Punkte  $\lambda$  und die Schnitte  $\mathfrak{L}_l$  sind hier wegzudenken).

- 1) in den  $p$  Querschnittpaaren  $a_i, b_i$  und den zugehörigen Schnitten  $c_i$ , die je ein Paar mit dem beliebigen Punkte  $O$  verbinden ( $i = 1, \dots, p$ ),
- 2) in  $m$  Schnitten  $\mathfrak{L}_l$ , welche den Punkt  $O$  mit den um die  $m$  Punkte  $(x_l, y_l)$  gelegten Kreisen verbinden ( $l = 1, \dots, m$ ).

Sind keine logarithmischen Unstetigkeitspunkte vorhanden, wie bei den Integralen 1. und 2. Gattung, so fallen die Schnitte  $\mathfrak{L}$  weg.

Ferner unterscheide man an jedem Querschnitt beliebig einen positiven (+) und einen negativen (−) Rand, bezeichne den Werth von  $W$  in gegenüberliegenden Punkten dieser Ränder bez. mit  $W^+$  und  $W^-$  und ermittle die constanten Werthdifferenzen  $P = W^+ - W^-$ , die  $W$  längs jedes Querschnittes besitzt. Dies geschieht, indem man  $W$  auf einer Curve von einem Punkte des − Randes zu dem gegenüberliegenden Punkte des + Randes führt, ohne dabei einen Querschnitt zu überschreiten. Diese Werthdifferenzen  $P$  sind charakteristisch für  $W$  und heissen nach Riemann die Periodicitätsmoduln von  $W$ .<sup>1)</sup> Im Einzelnen ergibt sich Folgendes:

1) Nach Puiseux, l. c. S. 84 auch kürzer „Perioden“ von  $W$ .

Die Periodicitätsmoduln von  $W$  an den Schnitten  $c_i$  sind gleich 0; die Schnitte  $c_i$  können daher ganz unberücksichtigt bleiben.

In der That, um den Periodicitätsmodul von  $W$  an  $c_i$  oder die Differenz der Werthe von  $W$  in einem Punkt  $\alpha$  des  $-$  Randes und dem gegenüberliegenden Punkt  $\alpha'$  des  $+$  Randes von  $c_i$  zu erhalten, hat man das Integral (1) vom Punkt  $\alpha$  aus längs des  $-$  Randes von  $c_i$  bis zum Kreuzungspunkt des Querschnittpaares  $a_i, b_i$ , alsdann längs der beiden Ränder dieses Paares (entgegengesetzt der Pfeilrichtung) und schliesslich längs des  $+$  Randes von  $c_i$  bis zu dem Punkt  $\alpha'$  zu führen. Dabei ist die Richtung, in der man die Ränder je eines der Querschnitte  $a_i$  und  $b_i$  und ebenso die des Stückes von  $c_i$  durchläuft, in je zwei gegenüberliegenden Punkten dieser Schnitte entgegengesetzt, während der Werth der zu integrierenden rationalen Function  $I'(x, y)$  in solchen zwei Punkten der gleiche ist. Daher heben sich die Elemente des Integrals (1) in je zwei solchen Punkten gegenseitig auf und der Gesamtwertb des Integrals ist 0. (q. e. d.)

Die Periodicitätsmoduln von  $W$  an den Querschnitten  $a_i$  und  $b_i$  sind gewisse, endliche Werthe

$$\text{an } a_i: M_i, \quad \text{an } b_i: N_i. \quad (4)$$

Der Werth  $M_i$  wird gefunden, indem man  $W$  in  $T'$  vom  $-$  zum  $+$  Rande von  $a_i$  führt, was etwa längs der  $-$  Seite von  $b_i$  im Sinne des Pfeiles geschehen kann; der Werth  $N_i$ , indem man  $W$  in  $T'$  vom  $-$  zum  $+$  Rande von  $b_i$  führt, was längs der  $+$  Seite von  $a_i$  im Sinne des Pfeiles geschehen kann. Man überzeugt sich leicht, dass der Werth von  $W$ , der für einen gewissen Integrationsweg zwischen  $(\xi, \eta)$  und  $(x, y)$  in der Fläche  $T$  gilt, bei Verlegung des Weges jedesmal um  $M_i$  wächst, so oft der neue Weg einmal den Schnitt  $a_i$  von der  $+$  zur  $-$  Seite und um  $N_i$ , so oft der neue Weg einmal den Schnitt  $b_i$  von der  $+$  zur  $-$  Seite überschreitet.

Die Periodicitätsmoduln von  $W$  an den Schnitten  $\mathfrak{L}_i$  sind ebenfalls endliche Werthe.

Ist nämlich ein logarithmischer Unstetigkeitspunkt  $(x_i, y_i)$  von  $W$  einfacher Punkt im Endlichen von  $T$  und  $A_i$  der Coefficient von  $(x - x_i)^{-1}$  in der Entwicklung von  $P(x, y)$  in der Umgebung von  $(x_i, y_i)$ , so ist der Periodicitätsmodul von  $W$

$$\text{an } \mathfrak{L}_i: + 2i\pi A_i, \quad (5)$$

wie sich ergibt, wenn man  $W$  in  $T'$  vom  $-$  zum  $+$  Rande von  $\mathfrak{L}_i$  führt, was auf einem kleinen, den Punkt  $(x_i, y_i)$  umgebenden Kreise geschehen kann, so dass dieser Punkt zur Linken liegt, der Kreis

also entgegengesetzt der Pfeilrichtung durchlaufen wird. Ist der logarithmische Unstetigkeitspunkt  $(x_i, y_i)$  von  $W$  ein  $(\lambda - 1)$ -facher Verzweigungspunkt, so umläuft der Kreis den Punkt  $\lambda$ -mal (in jedem der  $\lambda$  zusammenhängenden Blätter einmal) und der Periodicitätsmodul von  $W$  an der Linie  $\mathfrak{L}_i$  (die nur in einem der  $\lambda$  Blätter verläuft) ist  $= 2i\pi \lambda A_i$ . Ist einer der Punkte  $(x = \infty, y = \infty)$  ein logarithmischer Unstetigkeitspunkt von  $W$ , und  $A$  der Coefficient von  $x^{-1}$  in der Entwicklung von  $P(x, y)$ , ferner  $\mathfrak{L}$  der von  $O$  nach dem Punkte gehende Schnitt, so ist der zugehörige Periodicitätsmodul von  $W$  an  $\mathfrak{L}$  gleich  $2i\pi A$ , wie sich ergibt, wenn man  $W$  auf einem kleinen Kreise um den betreffenden Punkt  $(x = \infty, y = \infty)$  führt, so dass dieser Punkt zur Rechten liegt.

Man überzeugt sich wieder leicht, dass in allen diesen Fällen bei einer Verlegung des Integrationsweges  $W$  um die angegebenen Periodicitätsmoduln wächst, wenn der neue Weg die Linien  $\mathfrak{L}_i$  oder  $a_i, b_i$  von dem  $+$  zum  $-$  Rande überschreitet.

Nach dieser Betrachtung ist die Integralfunction  $W$  in der einfach zusammenhängenden Fläche  $T'$  eine eindeutige, dagegen in der ursprünglichen Fläche  $T$  eine unendlich vieldeutige Function des Ortes  $(x, y)$  von besonderer Art. Ist nämlich einer ihrer Werthe in  $(x, y)$  gleich  $W$ , so erhält man den allgemeinsten Werth, den sie in demselben Endpunkt  $(x, y)$  durch Abänderung des Weges annehmen kann, indem man zu  $W$  den Ausdruck hinzufügt

$$(6) \quad 2i\pi \sum_{i=1}^m a_i A_i + \sum_{i=1}^p (\mu_i M_i + \nu_i N_i),$$

wo  $a_i, \mu_i, \nu_i$  ganze Zahlen sind, die angeben, wie oft der betreffende Querschnitt bei Verlegung des Weges von der  $+$  zur  $-$  Seite überschritten wurde. Zugleich folgt, dass der Werth von  $W$ , erstreckt über eine beliebige, geschlossene Curve in  $T$ , sich immer linear und mit ganzzahligen Coefficienten durch die Periodicitätsmoduln (4) und (5) ausdrückt.

Während also eine zu  $F(x, y) = 0$  gehörige rationale Function  $P(x, y)$  als eindeutige und reguläre Function in der Verzweigungsfläche  $T$  charakterisirt war, gilt für die Integralfunction  $W$  derselben der Satz:

- (I) Die allgemeine, zu  $F(x, y) = 0$  gehörige Abel'sche Integralfunction  $W$  unterscheidet sich von der rationalen Function dadurch,

1) dass sie in einzelnen Punkten von  $T$  im Allgemeinen

nicht nur algebraisch, sondern auch logarithmisch  $\infty$  wird,

- 2) dass sie eine unendlich vieldeutige Function des Ortes  $(x, y)$  in  $T$  ist, deren Werthe in demselben Punkte von  $T$  um ganzzahlige Vielfache der  $m + 2p$  Periodicitätsmoduln  $2i\pi A_i$ ,  $M_i$ ,  $N_i$  von einander verschieden sind.

Hierbei ist stets  $A_i$  durch  $\lambda A_i$  zu ersetzen, wenn der logarithmische Unstetigkeitspunkt  $(x_i, y_i)$  ein  $(\lambda - 1)$ -facher Verzweigungspunkt ist.

Die Eigenschaften (I) sind charakteristisch für das Abel'sche Integral, denn es gilt umgekehrt der Satz<sup>1)</sup>:

- (II) Eine Function  $W$  von  $(x, y)$ , die in der Fläche  $T$  im Allgemeinen eindeutig und stetig ist, die aber in einzelnen Punkten  $(x_i, y_i)$  algebraisch logarithmisch  $\infty$  wird und an einzelnen Linien, nämlich den Querschnitten  $a_i$  und  $b_i$  und den nach den logarithmischen Unstetigkeitspunkten gezogenen Linien  $\mathfrak{L}_i$  constante Werthdifferenzen oder Periodicitätsmoduln hat, ist ein Abel'sches Integral, d. h. das Integral einer rationalen Function von  $(x, y)$ .

Nach Voraussetzung ist nämlich die Function  $\frac{dW}{dx}$  in einzelnen Punkten nur noch algebraisch  $\infty$ ; sie ist im Uebrigen stetig und eindeutig in  $T$ , da die constanten Werthdifferenzen an den Linien  $a_i, b_i, \mathfrak{L}_i$  bei der Differentiation von  $W$  wegfallen; sie ist daher nach (§ 6) eine rationale Function von  $(x, y)$  und  $W$  selber das Integral einer solchen Function.

Wir erwähnen hier noch einen wichtigen Satz, der die Periodicitätsmoduln  $2i\pi A_i$  des allgemeinen Abel'schen Integrales  $W$  betrifft<sup>2)</sup>.

- (III) Die Summe der Coefficienten  $A_i$ , die zu den logarithmischen Unstetigkeitspunkten  $(x_i, y_i)$  des Integrals  $W$  gehören, ist Null. Dabei ist wieder  $A_i$  durch  $\lambda A_i$  zu

1) Riemann, (Ges. W. S. 97). Dort ergibt sich dieser Satz als specieller Fall des Dirichlet'schen Principis.

2) Puiseux, l. c. S. 117. Die Grössen  $A_i$  sind die Residuen der Function  $P(x, y)$  in (1) bezüglich der Punkte  $(x_i, y_i)$  (vgl. § 12). Riemann, Ges. W. S. 97—99. Der Satz (III) lässt sich auch leicht aus den Gleichungen (11) § 13 herleiten, wie in § 16 Gl. (5a) näher angedeutet ist.

ersetzen, wenn der Punkt ein  $(\lambda - 1)$ -facher Verzweigungspunkt ist.

Denn führt man  $W$  oder  $\int dW$  im Sinne der Pfeile um die ganze Begrenzung von  $T'$ , so erhält man den Werth 0, weil sich der geschlossene Integrationsweg auf einen beliebigen Punkt, in dem  $W$  stetig ist, zusammenziehen lässt. Andererseits aber zerfällt der Integralwerth in einzelne Integrale, genommen längs der beiden Ränder der Schnitte  $a_i$ ,  $b_i$ ,  $c_i$  und  $\mathfrak{L}_i$  und über die Kreise um die Punkte  $(x_i, y_i)$ . Von diesen Bestandtheilen sind die auf die Schnitte  $a_i$ ,  $b_i$ ,  $c_i$ ,  $\mathfrak{L}_i$  bezüglichen Null, weil jeder der Schnitte zweimal und zwar in entgegengesetzter Richtung durchlaufen wird, wobei sich die Elemente von  $W$  oder  $\int dW$  in zwei gegenüberliegenden Punkten eines Schnittes aufheben. Es bleibt also nur die Summe der Integralwerthe für die Kreise um die Punkte  $(x_i, y_i)$ . Diese Summe ist nach (5)  $= -2i\pi \sum_i A_i$  und es ist demnach  $\sum A_i = 0$ . (q. e. d.)

Aus (III) folgt, dass ein Abel'sches Integral mit nur einem logarithmischen Unstetigkeitspunkt unmöglich ist oder der Satz:

(IV) Wenn in einem Abel'schen Integral logarithmische Unstetigkeitspunkte auftreten, so ist die Zahl derselben mindestens gleich zwei.

Als specielle Fälle gehören zu den Abel'schen Integralen auch die rationalen Functionen von  $(x, y)$  und die Logarithmen solcher Functionen. Die ersteren sind dadurch charakterisirt, dass sie nicht logarithmisch, sondern nur algebraisch unendlich werden, und dass für sie die Periodicitätsmoduln  $2i\pi A_i$ ,  $M_i$  und  $N_i$  sämmtlich verschwinden; die letzteren dadurch, dass sie nicht algebraisch, sondern nur logarithmisch unendlich werden, dass in den Periodicitätsmoduln  $2i\pi A_i$  die Grössen  $A_i$  sämmtlich ganze, positive oder negative Zahlen und dass ebenso die Moduln  $M_i$  und  $N_i$  ganzzahlige Vielfache von  $2i\pi$  sind (vgl. § 17 Gl. 9). Die Betrachtung des Logarithmus einer rationalen Function  $\log R(x, y)$  führt zu einem neuen Beweis des früheren Satzes (II) § 7, nämlich:

(V) Für jede rationale Function  $R(x, y)$  ist die Zahl der  $\infty^1$  Punkte und der  $0^1$  Punkte die gleiche.

Bei dieser Ausdrucksweise ist vorausgesetzt, dass  $\infty$  und 0 Punkte höherer Ordnung ihren Ordnungszahlen entsprechend gerechnet werden. Der Beweis ist analog dem des Satzes (III). Sei  $R(x, y)$  gleich 0 in  $m$  Punkten  $(x_i, y_i)$  und gleich  $\infty$  in  $\mu$  Punkten  $(\xi_\lambda, \eta_\lambda)$

die wir der Einfachheit halber sämmtlich im Endlichen der Fläche  $T$  annehmen; es verhalte sich

$$\left. \begin{array}{l} \text{in } (x_i, y_i) \quad R(x, y) \text{ wie } (x - x_i)^{p_i}, \text{ also } \log R(x, y) \text{ wie } +p_i \log(x - x_i) \\ \text{in } (\xi_\lambda, \eta_\lambda) \quad R(x, y) \text{ „ } (x - \xi_\lambda)^{-q_\lambda}, \text{ „ } \log R(x, y) \text{ „ } -q_\lambda \log(x - \xi_\lambda). \end{array} \right\} (7)$$

Hier sind  $p_i$  und  $q_\lambda$  ganze, positive Zahlen. Man schliesse die Punkte  $(x_i, y_i)$  und  $(\xi_\lambda, \eta_\lambda)$  durch kleine Kreise aus (s. Fig. 8) und lege von dem Punkte  $O$  (dem gemeinsamen Punkt der Schnitte  $c_i$ ) nach diesen Kreisen Schnitte  $\mathfrak{Q}_i$  und  $\mathfrak{Q}_\lambda$ , die weder einander noch  $a_i, b_i, c_i$  schneiden. Hierdurch entsteht eine einfach zusammenhängende Fläche  $T'$ ,

in der das Integral  $\int d \log R = \int \frac{1}{R} \frac{dR}{dx} dx$  eindeutig und stetig ist.

Führt man daher dies Integral um die ganze Begrenzung von  $T'$ , so erhält man den Werth 0. Andererseits ist der Beitrag, den die Schnitte  $a_i, b_i, c_i, \mathfrak{Q}_i$  und  $\mathfrak{Q}_\lambda$  zu dem Integralwerth liefern, wie in dem Beweise von (III) gleich 0. Dagegen gibt nach (7) der Kreis um den Punkt  $(x_i, y_i)$  den Beitrag  $-p_i$ , der Kreis um  $(\xi_\lambda, \eta_\lambda)$  den Beitrag

$$+q_\lambda; \text{ folglich hat man } \sum_{i=1}^m p_i - \sum_{\lambda=1}^n q_\lambda = 0. \text{ (q. e. d.)}$$

Die weitere Untersuchung des allgemeinen Abel'schen Integrals beruht auf der Zerlegung desselben in möglichst einfache Integrale. Dabei ergeben sich drei wesentlich verschiedene Gattungen von Integralen, nämlich:

Integrale 1. Gattung, d. h. solche, die in  $T$  allenthalben endlich sind,

Integrale 2. Gattung, d. h. solche, die in  $T$  nur in einem Punkte algebraisch  $\infty$  werden,

Integrale 3. Gattung, d. h. solche, die in  $T$  nur in zwei Punkten je logarithmisch  $\infty$  werden.

Daneben können noch rationale Functionen und Logarithmen solcher Functionen auftreten. Diese Formen lassen sich ebenfalls auf Integrale der 1., 2., 3. Gattung zurückführen (s. § 17 Satz II und III). Man kann nun die Zerlegung des allgemeinen Integrals  $W$  direct und algebraisch vornehmen durch eine Partialbruchzerlegung<sup>1)</sup> der rationalen Function  $\frac{dW}{dx} = P(x, y)$ . Wir ziehen es vor, umgekehrt zu zeigen<sup>2)</sup>, wie sich die Integrale der genannten drei Gattungen von

1) Clebsch-Gordan, Abel'sche Functionen S. 9 (1866). Nöther, Math. Ann. Bd. 37. S. 424 (1890).

2) Riemann, Ges. W. S. 100.

vornherein bilden lassen und wie sich das allgemeine Integral aus ihnen zusammensetzen lässt, womit indirect auch die Zerlegung geleistet ist. Wir setzen dabei wie im Abschnitt II voraus, dass in  $T$  von Verzweigungspunkten nur einfache und von singulären Punkten nur Doppelpunkte vorkommen.

### § 15. Die $p$ Integrale erster Gattung.

Wir stellen uns die Aufgabe, ein Integral  $v$  erster Gattung zu bilden<sup>1)</sup>, d. h. ein Integral, das in  $T$  allenthalben endlich ist. Damit  $v$  in den  $n$  Punkten ( $x = \infty, y = \infty$ ), den  $\omega$  einfachen Verzweigungspunkten und den  $r$  Doppelpunkten endlich sei, muss die zugehörige rationale Function  $\frac{dv}{dx}$  in diesen Punkten ein bestimmtes Verhalten zeigen, das sich aus den für  $v$  in der Umgebung dieser Punkte gültigen Entwicklungen ergibt. Es genügt, von denselben die ersten Glieder anzuschreiben.

In der Umgebung eines der  $n$  Punkte ( $x = \infty, y = \infty$ ) ist:

$$v = H_0 + H_1 x^{-1} + \dots, \quad \text{also} \quad \frac{dv}{dx} = -H_1 x^{-2} + \dots$$

In der Umgebung eines Verzweigungspunktes ( $x = \gamma, y = y_\gamma$ ) ist:

$$v = M_0 + M_1 (x - \gamma)^{\frac{1}{2}} + \dots, \quad \text{also} \quad \frac{dv}{dx} = \frac{1}{2} M_1 (x - \gamma)^{-\frac{1}{2}} + \dots$$

In der Umgebung eines Doppelpunktes ( $x = \delta, y = y_\delta$ ) ist für je einen Zweig:

$$v = N_0 + N_1 (x - \delta) + \dots, \quad \text{also} \quad \frac{dv}{dx} = N_1 + \dots$$

Hieraus folgt: die rationale Function  $\frac{dv}{dx}$  muss

=  $0^2$  sein in jedem der  $n$  Punkte ( $x = \infty, y = \infty$ );

=  $\infty^1$  sein in jedem Verzweigungspunkt und

endlich bleiben in allen übrigen Punkten von  $T$ .

Diesen Bedingungen wird nach früheren Betrachtungen (§ 13) in allgemeinster Weise genügt, wenn man  $\frac{dv}{dx} = \varphi : F'(y)$ , d. h. gleich einem Quotienten setzt, dessen Nenner  $F'(y)$  und dessen Zähler eine allgemeine, adjungirte Function  $\varphi$  des  $n-3^{\text{ten}}$  Grades von  $F=0$  ist. Daher hat man den Satz:

1) Riemann, Ges. W. S. 98 u. 110.



(I) Das allgemeine Integral 1. Gattung  $v$  ist von der Form

$$v = \int_{\xi, \eta}^{x, y} \frac{\varphi}{F''y} dx. \quad (1)$$

Das Integral (1) hat nur  $2p$  Periodicitätsmoduln, entsprechend den  $2p$  Querschnitten  $a_i$  und  $b_i$  der Fläche  $T$ . Bezeichnet man dieselben an  $a_i$  mit  $A_i$ , an  $b_i$  mit  $B_i$  und ist  $v$  der Werth, den das Integral (1) auf irgend einem Wege in  $T$  zwischen  $(\xi, \eta)$  und  $(x, y)$  annimmt, so erhält man den allgemeinsten Werth, den das Integral durch Veränderung des Weges annehmen kann, indem man zu  $v$  den Ausdruck addirt

$$P = \sum m_i A_i + \sum n_i B_i \quad (i = 1, \dots, p), \quad (2)$$

wo  $m_i$  und  $n_i$  ganze Zahlen sind, die angeben, wie oft bei Veränderung des Weges der Querschnitt  $a_i$  resp.  $b_i$  von der  $+$  zur  $-$  Seite überschritten wird. Der Ausdruck (2) ist der allgemeine Periodicitätsmodul des Integrals (1).

Es folgt auch hier:

(Ia) Der Werth von  $v$ , erstreckt über eine beliebige, geschlossene Curve in  $T$ , lässt sich ganzzahlig und linear durch die  $2p$  Periodicitätsmoduln  $A_i$  und  $B_i$  ausdrücken in der Form (2),

und weiter:

(Ib) Wählt man statt des kanonischen Querschnittsystems  $(a_i, b_i)$  ein anderes System, so drücken sich die zu dem letzteren gehörigen  $2p$  Periodicitätsmoduln von  $v$  linear und ganzzahlig durch die ursprünglichen Moduln  $A_i$  und  $B_i$  aus.

Um einen zweiten, wichtigen Satz zu beweisen, schicken wir einen Hilfssatz aus der allgemeinen Functionentheorie voraus.

Der Satz von Green lautet bekanntlich<sup>1)</sup>:

Ist  $z = x + iy$  eine complexe Variable und  $Z$  ein zusammenhängendes Flächenstück, das aus einem oder mehreren Blättern besteht und von einer oder mehreren geschlossenen Curven begrenzt ist, sind ferner  $X$  und  $Y$  sowie  $\frac{\partial X}{\partial y}$  und  $\frac{\partial Y}{\partial x}$  in  $Z$  eindeutige und stetige Functionen der reellen Variabeln  $x$  und  $y$ , so ist

1) Vgl. etwa Durège, Elemente der Theorie der Functionen. 4. A. S. 89.

$$(a) \quad \iint \left( \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) dx dy = \int (X dx + Y dy),$$

wenn das Doppelintegral der linken Seite über die ganze Fläche  $Z$ , das einfache Integral der rechten Seite über alle Grenzcurven von  $Z$  ausgedehnt wird in positiver Richtung.

Positiv heisst eine Richtung der Grenzlinie von  $Z$ , wenn beim Durchlaufen derselben die Fläche  $Z$  zur Linken liegt, wobei vorausgesetzt ist, dass beim Durchlaufen der reellen Axe des Coordinatensystems in positiver Richtung die imaginäre Axe ebenfalls zur Linken liegt.

Die Gleichung (a) bleibt auch dann noch richtig, wenn  $\frac{\partial Y}{\partial x}$  und  $\frac{\partial X}{\partial y}$  in einzelnen Punkten der Fläche  $Z$  unstetig werden, wenn nur an diesen Stellen  $Y$  und  $X$  keine Unterbrechung der Stetigkeit erleiden.

Ist nämlich in einem Punkte  $(x = \alpha, y = \beta)$  des Gebietes  $Z$  die Function  $Y = Y(x, y)$  stetig,  $\frac{\partial Y}{\partial x}$  aber unstetig und schliesst man den Punkt  $(\alpha, \beta)$  in ein kleines Rechteck ein, begrenzt von den Seiten  $x = x_0$  und  $x = x_1$  parallel der  $y$ -Axe, und von  $y = y_0$  und  $y = y_1$  parallel der  $x$ -Axe, so ist leicht zu sehen, dass der für dies Rechteck gebildete, von  $Y$  abhängige Theil des Flächenintegrals in (a) gegen Null convergirt, wenn man das Rechteck unendlich klein werden lässt. Denn führt man zuerst die Integration nach  $x$  aus, so erhält man bereits

$$\lim_{x_0=x_1} \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial Y}{\partial x} dx = \lim_{x_0=x_1} [Y(x_1, y) - Y(x_0, y)] = 0,$$

weil  $Y(x, y)$  für  $(x = \alpha, y = \beta)$  stetig ist.

Entsprechendes gilt für den von  $X$  abhängigen Theil des Flächenintegrals in (a), wenn in einem Punkte von  $Z$  die Function  $X$  stetig, aber  $\frac{\partial X}{\partial y}$  unstetig wird.

Aus dem Green'schen Satze folgt unmittelbar der in Rede stehende Hilfssatz:

(A) Ist  $Z$  definirt wie vorher, sind  $W$  und  $\frac{\partial W}{\partial z}$  im Inneren von  $Z$  eindeutige und stetige Functionen der complexen Variabeln  $z = x + iy$  und setzt man  $W = U + iV$ , so hat das Integral  $\int U dV$ , genommen in positiver Richtung über

die Grenzlilien von  $Z$ , stets einen positiven, von 0 verschiedenen Werth.

In der That: mit  $W$  und  $\frac{dW}{dz}$  sind zugleich  $U$  und  $V$  sammt ihren ersten und höheren partiellen Ableitungen nach  $x$  und  $y$  in  $Z$  eindeutige und stetige Functionen von  $x$  und  $y$ ; ausserdem gelten die Gleichungen

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y}, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial V}{\partial x}. \quad (b)$$

Setzt man nun  $Y = U \frac{\partial U}{\partial x}$ ,  $X = -U \frac{\partial U}{\partial y}$ , so sind für diese Functionen innerhalb  $Z$  die Bedingungen des Green'schen Satzes erfüllt; daher folgt aus (a) mit Rücksicht auf (b)

$$\left. \begin{aligned} \int \int \left[ \left( \frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy &= \int U \left( -\frac{\partial U}{\partial y} dx + \frac{\partial U}{\partial x} dy \right) \\ &= \int U \left( \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy \right) = \int U dV, \end{aligned} \right\} \quad (c)$$

wo das Doppelintegral und die einfachen Integrale in demselben Sinne zu nehmen sind, wie oben. Da nun das zu Anfang stehende Flächenintegral positiv und von 0 verschieden ist, so gilt der obige Satz (A). Schreibt man das Doppelintegral in (c)

$$\int \int \left( \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial y} - \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial V}{\partial x} \right) dx dy = \int \int dU dV, \quad (d)$$

so sieht man, dass dasselbe den Inhalt des Flächenstückes ausdrückt, welches die Gesammtheit der Werthe, die  $W$  innerhalb  $Z$  annimmt, in der  $W$ -Ebene oder in einer die  $W$ -Ebene mehrfach bedeckenden Fläche repräsentirt.

Man kann die Voraussetzungen des Satzes (A) zum Theil fallen lassen.

Die Gleichungen (c) und (d) behalten nämlich nach der obigen Bemerkung über  $Y$  und  $X$  ihre Gültigkeit, wenn die zweiten Ableitungen von  $U$  und  $V$  nach  $x$  und  $y$  in einzelnen Punkten der Fläche  $Z$  unstetig werden, wenn nur an diesen Stellen  $U$  und  $V$  und ihre ersten Ableitungen nach  $x$  und  $y$  keine Unterbrechung der Stetigkeit erleiden. Die Gleichungen (c) und (d) bleiben aber auch dann noch richtig, wenn die ersten Ableitungen von  $U$  und  $V$  nach  $x$  und  $y$  in gewissen Punkten von  $Z$  und in gewisser Weise unstetig werden. Sei z. B. die Fläche  $Z$  zweiblättrig und besitze einen einfachen Verzweigungspunkt  $z = \gamma$  (oder  $x + iy = \alpha + i\beta$ ), in dem  $W = 0$ ! also  $= 0$  wie  $(z - \gamma)^{\frac{1}{2}}$  sei. Dann sind  $\frac{\partial U}{\partial x}$  und  $\frac{\partial U}{\partial y}$  in  $(x = \alpha, y = \beta)$

unstetig, das Flächenintegral in (c) aber bleibt endlich und die Gleichung (c) gültig.

Zum Beweise ziehe man um den Punkt  $z = \gamma$  einen kleinen, die beiden in  $\gamma$  zusammenhängenden Blätter durchlaufenden Kreis  $K$  vom Radius  $r$  und berechne den Antheil des Flächenintegrals in (c) für die von  $K$  eingeschlossene, zweiblättrige Kreisfläche für sich. In der Umgebung des Punktes  $z = \gamma$  mögen, wenn der conjugirt complexe Werth einer Grösse  $P$  mit  $P'$  bezeichnet wird, die Entwicklungen gelten:

$$W = U + iV = 2C(z - \gamma)^{+\frac{1}{2}} + C_0(z - \gamma) + C_1(z - \gamma)^{+\frac{3}{2}} + \dots,$$

$$W' = U - iV = 2C'(z' - \gamma')^{+\frac{1}{2}} + C'_0(z' - \gamma') + C'_1(z' - \gamma')^{+\frac{3}{2}} + \dots$$

Nun ist die Function unter dem Integralzeichen in (c) wegen (b)

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 = \frac{\partial(U+iV)}{\partial x} \frac{\partial(U-iV)}{\partial x} = \frac{dW}{dz} \frac{dW'}{dz'}$$

$$= CC'(z - \gamma)^{-\frac{1}{2}} (z' - \gamma')^{-\frac{1}{2}} + \dots = CC' [(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2]^{-\frac{1}{2}} + \dots$$

Setzt man  $x - \alpha = r \cos \varphi$ ;  $y - \beta = r \sin \varphi$  und führt die Polarcordinaten  $r, \varphi$  ein, so liefert das erste Glied dieser Entwicklung zu dem Flächenintegral in (c) für das Innere des Kreises  $K$  den Beitrag

$$CC' \iint [(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2]^{-\frac{1}{2}} dx dy = CC' \iint dr d\varphi = CC' 4\pi r.$$

Dieser Beitrag aber verschwindet, wenn  $r$  gegen 0 convergirt. Dasselbe gilt in erhöhtem Maasse für die folgenden Glieder der Entwicklung in der Umgebung von  $z = \gamma$ .

Hiermit ist die Behauptung erwiesen und die angegebene Erweiterung der Voraussetzungen des Satzes (A) gerechtfertigt.

Der Satz (A) dient nun zum Beweise des folgenden Satzes, der sich auf die reellen und imaginären Bestandtheile der Periodicitätsmoduln des Integrals 1. Gattung  $v$  bezieht.

(II) Ist  $v = v_1 + iv_2$  ein beliebiges Integral 1. Gattung mit den Periodicitätsmoduln  $A_i = A'_i + iA''_i$  an dem Querschnitt  $a_i$  und  $B_i = B'_i + iB''_i$  an dem Querschnitt  $b_i$ , so ist der Ausdruck

$$(3) \quad \sum_{i=1}^p (A'_i B''_i - B'_i A''_i)$$

stets positiv und nur  $= 0$ , wenn  $v$  eine Constante ist<sup>1)</sup>.

1) Riemann, Ges. W. S. 125.

Wendet man nämlich den Hilfssatz (A) auf das Integral  $v$  und die von den Querschnitten  $a_i, b_i$  begrenzte Fläche  $T'$  an, was gestattet ist, weil  $v$  in  $T'$  den Bedingungen des Satzes (A) in der erweiterten Fassung genügt, so folgt, dass  $\int v_1 dv_2$ , genommen in positiver Richtung über die Begrenzung von  $T'$ , d. h. über das System der  $2p$  Querschnitte  $a_i, b_i$ , positiv ist. Nach den in (II) angegebenen Werthen ist nun für die Periodicitätsmoduln  $v^+ - v^-$  des Integrals  $v = v_1 + iv_2$

$$\left. \begin{array}{ll} \text{an } a_i: v_1^+ - v_1^- = A_i' & v_2^+ - v_2^- = A_i'', \\ \text{an } b_i: v_1^+ - v_1^- = B_i' & v_2^+ - v_2^- = B_i''. \end{array} \right\} \quad (4)$$

Hiermach ist das Integral  $\int v_1 dv_2$ , genommen im Sinne der Pfeile (Figur 8 S. 104) über die beiden Ränder des Querschnitts  $a_i$ ,

$$= \int (v_1^+ - v_1^-) dv_2 = \int A_i' dv_2;$$

das letzte Integral ist nur noch längs dem  $+$  Rande von  $a_i$  zu nehmen, hat also nach (4) den Werth  $A_i' B_i''$ .

Ferner ist das Integral  $\int v_1 dv_2$ , genommen im Sinne der Pfeile über die beiden Ränder des Querschnitts  $b_i$ ,

$$= \int (v_1^+ - v_1^-) dv_2 = \int B_i' dv_2;$$

das letzte Integral ist nur noch längs dem  $+$  Rande von  $b_i$  zu nehmen, hat also nach (4) den Werth  $-B_i' A_i''$ .

Das Integral  $\int v_1 dv_2$ , genommen im Sinne der Pfeile über sämtliche Ränder des Querschnittsystems  $a_i, b_i$ , ist also gleich

$$\sum_{i=1}^p (A_i' B_i'' - B_i' A_i'') \text{ und dieser Ausdruck ist folglich positiv. (q. e. d.)}$$

Aus (II) erhält man unmittelbar die Zusätze:

(IIa) Ein Integral 1. Gattung, dessen Periodicitätsmoduln an  $p$  unter den  $2p$  Querschnitten  $a_i$  und  $b_i$  sämtlich  $= 0$  sind, ist nothwendig eine Constante.

(IIb) Ein Integral 1. Gattung, dessen Periodicitätsmoduln an den  $2p$  Querschnitten  $a_i$  und  $b_i$  entweder sämtlich reell oder sämtlich rein imaginär sind, ist nothwendig eine Constante.

Wir schliessen noch folgende Bemerkung an. Der Ausdruck (3) stellt nach Hilfssatz (A) den Inhalt der Fläche  $S$  dar, die man erhält, wenn man die von den Querschnitten  $a_i$  und  $b_i$  begrenzte Fläche

$T'$  mittels des Integrals  $v$  conform abbildet. Die Fläche  $S$  besteht aus  $p$  krummlinig begrenzten Parallelogrammen in  $p$  übereinander liegenden Blättern. Die vier Seiten eines solchen Parallelogrammes entsprechen den vier Rändern je eines der  $p$  Querschnittspaare  $a_i, b_i$  ( $i = 1, \dots, p$ ). Die Fläche  $S$  besitzt  $2p - 2$  einfache Verzweigungspunkte und  $p - 1$  Verzweigungsschnitte, längs deren die  $p$  Blätter der Parallelogramme in einander übergehen<sup>1)</sup>.

Weitere Sätze beziehen sich auf Systeme von  $p$  Integralen

1. Gattung. Der Ausdruck (1) stellt das allgemeinste Integral 1. Gattung dar. Da es nach (II § 10) stets  $p$  und nur  $p$  linear unabhängige  $\varphi$  Functionen  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p$  gibt, so hat man den Satz:

(III) Es gibt ein ganzes System von  $p$  Integralen 1. Gattung

$$(5) \quad v_1 = \int \frac{\varphi_1 dx}{F'(y)}, \dots, v_p = \int \frac{\varphi_p dx}{F'(y)},$$

die linear unabhängig sind, d. h. zwischen denen keine lineare Gleichung der Form  $c_1 v_1 + \dots + c_p v_p + c_0 = 0$  mit constanten Coefficienten  $c_i$  besteht. Aus ihnen setzt sich jedes weitere Integral 1. Gattung  $v$  linear und mit constanten Coefficienten zusammen in der Form

$$(6) \quad v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_p v_p + \lambda_0.$$

Wir denken uns die Integrale (5) genommen zwischen denselben Punkten  $(\xi, \eta)$  und  $(x, y)$  und betrachtet als Functionen der oberen Grenzen  $(x, y)$ . Auch weiterhin sind die Grenzen der Integrale hinzuzudenken. Um das System der  $p$  Integrale (5) näher zu untersuchen, seien die Periodicitätsmoduli derselben an den Querschnitten  $a_i$  und  $b_i$  dargestellt durch das Schema:

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{c|ccc|cccc} & a_1 & a_2 & \dots & a_p & b_1 & b_2 & \dots & b_p \\ \hline v_1 & A_{11} & A_{21} & \dots & A_{p1} & B_{11} & B_{21} & \dots & B_{p1} \\ v_2 & A_{12} & A_{22} & \dots & A_{p2} & B_{12} & B_{22} & \dots & B_{p2} \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ v_p & A_{1p} & A_{2p} & \dots & A_{pp} & B_{1p} & B_{2p} & \dots & B_{pp} \end{array} \right.$$

Dasselbe sagt aus, dass die Integrale  $v_1, \dots, v_p$  bei einer für alle gleichen Aenderung des Integrationsweges sich gleichzeitig bezüglich um Ausdrücke der Form ( $i = 1, \dots, p$ ):

1) Riemann, Ges. W. S. 113 f.

$$\sum_i m_i A_{i1} + \sum_i n_i B_{i1}, \dots, \sum_i m_i A_{ip} + \sum_i n_i B_{ip} \quad (8)$$

ändern, in welchen  $m_i$  und  $n_i$  dieselben ganzen Zahlen sind.

Die Ausdrücke (8) bilden ein System von zusammengehörigen oder simultanen Periodicitätsmoduln der  $p$  Integrale  $v_i$ .

Für die Determinanten, gebildet aus den Periodicitätsmoduln (7), gilt der Satz<sup>1)</sup>:

(IV) Sind  $p$  Integrale erster Gattung  $v_1, \dots, v_p$  linear unabhängig, so ist jede aus  $p$  unter den  $2p$  Verticalreihen von Periodicitätsmoduln in (7) gebildete Determinante verschieden von 0.

Denn angenommen, es sei eine dieser Determinanten in (7), etwa die erste

$$A = \sum \pm A_{11} A_{22} \cdots A_{pp}$$

gleich 0, so könnte man  $p$  von 0 verschiedene (complexe) Constanten  $M_1, \dots, M_p$  bestimmen derart, dass

$$M_1 A_{i1} + \cdots + M_p A_{ip} = 0 \quad (i = 1, \dots, p)$$

wäre; in diesem Falle hätte man in

$$v = M_1 v_1 + \cdots + M_p v_p$$

ein Integral 1. Gattung, dessen Periodicitätsmoduln an den  $p$  ersten Querschnitten  $a_1, \dots, a_p$  sämtlich 0 wären, das also nach (IIa) gleich einer Constanten wäre. Zwischen den  $p$  Integralen  $v_i$  bestünde demnach eine lineare Gleichung mit constanten Coefficienten, was gegen die Voraussetzung ist. Nur wenn die sämtlichen  $p^2$  Unterdeterminanten von  $A$  verschwänden, wäre die Bestimmung der  $M_i$  aus den obigen Gleichungen unmöglich. In diesem Falle<sup>2)</sup> könnte man aus dem Verschwinden je einer dieser Unterdeterminanten dieselben Schlüsse ziehen, wie aus dem Verschwinden von  $A$ , nämlich entweder, dass die  $v_i$  linear abhängig wären, oder dass die zweiten Unterdeterminanten von  $A$  sämtlich verschwänden u. s. f. Da nun die Integrale  $v_i$  nach Voraussetzung linear unabhängig sind, so würde aus dem Verschwinden von  $A$  schliesslich folgen, dass sämtliche Elemente  $A_{ik} = 0$  wären; es müssten dann nach (IIa) die Integrale  $v_i$  sämt-

1) Riemann, Ges. W. S. 98.

2) C. Neumann, Vorlesungen über Riemann's Theorie der Abel'schen Integrale. 2. A. S. 244 (1884).

lich Constanten sein, was selbstverständlich ausgeschlossen. (q. e. d.) Umgekehrt gilt der Satz:

(V) Sind  $v_1, \dots, v_p$  in (7)  $p$  beliebige Integrale 1. Gattung und verschwindet keine der aus  $p$  unter den  $2p$  Verticalreihen von Periodicitätsmoduln in (7) gebildeten Determinanten, so sind die  $p$  Integrale  $v_1, \dots, v_p$  linear unabhängig.

Angenommen, es sei  $c_1 v_1 + \dots + c_p v_p + c_0 = 0$ , so würde man, indem man für die linke Seite dieser Gleichung als Function von  $(x, y)$  die Periodicitätsmoduln an den  $2p$  Querschnitten  $a_i$  und  $b_i$  bildet, die  $2p$  Gleichungen erhalten ( $i = 1, \dots, p$ ):

$$c_1 A_{i1} + \dots + c_p A_{ip} = 0, \quad c_1 B_{i1} + \dots + c_p B_{ip} = 0,$$

d. h. es würden die sämtlichen in (V) genannten Determinanten verschwinden, was gegen die Voraussetzung ist. (q. e. d.)

In ähnlicher Weise leitet man einen Satz her, der sich auf die reellen und imaginären Bestandtheile der Periodicitätsmoduln in (7) bezieht; setzt man  $A_{ik} = A'_{ik} + i A''_{ik}$  und  $B_{ik} = B'_{ik} + i B''_{ik}$ , so lautet dieser Satz:

(VI) Sind die  $p$  Integrale  $v_1, \dots, v_p$  linear unabhängig, so ist die aus den  $4p^2$  reellen und imaginären Bestandtheilen der  $2p^2$  Periodicitätsmoduln in (7) gebildete Determinante, die abgekürzt durch

$$(9) \quad \begin{vmatrix} A'_{ik} & A''_{ik} \\ B'_{ik} & B''_{ik} \end{vmatrix}$$

bezeichnet sei, von 0 verschieden.

Denn angenommen, die Determinante (9) verschwände, so könnte man  $2p$  reelle Constanten  $M'_1, \dots, M'_p$ ;  $M''_1, \dots, M''_p$  bestimmen, derart, dass

$$M'_1 A'_{i1} + \dots + M'_p A'_{ip} - M''_1 A''_{i1} - \dots - M''_p A''_{ip} = 0,$$

$$M'_1 B'_{i1} + \dots + M'_p B'_{ip} - M''_1 B''_{i1} - \dots - M''_p B''_{ip} = 0$$

wäre. Man hätte alsdann, wenn  $M'_k + i M''_k = M_k$  gesetzt wird, in

$$v = M_1 v_1 + \dots + M_p v_p$$

ein Integral 1. Gattung, für welches die reellen Bestandtheile der Periodicitätsmoduln an den  $2p$  Querschnitten  $a_i$  und  $b_i$  sämtlich 0 wären, das also nach (IIa) oder (IIb) gleich einer Constanten sein müsste. Die  $p$  Integrale  $v_i$  wären also nicht linear unabhängig, was der Voraussetzung widerspricht. Nur wenn die ersten Unterdeter-



minanten von (9) sämtlich verschwinden, wäre die Bestimmung der  $M'$ ,  $M''$  aus den obigen Gleichungen unmöglich; dann aber würde dieselbe Schlussweise wie beim Beweis des Satzes (IV) dahin führen, dass die Integrale  $v_i$  sämtlich Constante sein müssten. Umgekehrt gilt der Satz:

(VII) Ist die Determinante (9) von 0 verschieden, so sind die  $p$  Integrale  $v_1, \dots, v_p$  linear unabhängig.

Denn angenommen, es sei  $c_1 v_1 + \dots + c_p v_p + c_0 = 0$ , so würde man, indem man für die Function von  $(x, y)$  auf der linken Seite dieser Gleichung die reellen und imaginären Bestandtheile der Periodicitätsmoduln an den  $2p$  Querschnitten  $a_i$  und  $b_i$  bildet,  $2p$  Gleichungen erhalten, die das Verschwinden der Determinante (9) nach sich zögen, was der Voraussetzung widerspricht.

Aus den vorstehenden Sätzen ergeben sich wichtige Folgerungen; zunächst aus (IV) der Satz:

(VIII) Ein Integral 1. Gattung  $v$  ist (bis auf eine additive Constante) vollständig bestimmt, wenn seine Periodicitätsmoduln an irgend  $p$  unter den  $2p$  Querschnitten  $a_i$  und  $b_i$  willkürlich gegeben sind; nur dürfen dieselben nicht sämtlich  $= 0$  sein.

Besitzt nämlich  $v$  etwa an den  $p$  ersten Querschnitten  $a_1, \dots, a_p$  die vorgegebenen Periodicitätsmoduln  $A_1, \dots, A_p$  und versteht man unter  $v_1, \dots, v_p$   $p$  linear unabhängige Integrale 1. Gattung mit den Periodicitätsmoduln (7), so kann man  $v$  in die Form (6) setzen und hat dann zur Bestimmung der  $p$  Coefficienten  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  die  $p$  Gleichungen ( $i = 1, \dots, p$ ):

$$\lambda_1 A_{i1} + \dots + \lambda_p A_{ip} = A_i,$$

aus welchen sich, da die Determinante  $A$  nicht verschwindet, bestimmte Werthe für die  $p$   $\lambda_i$  ergeben. Damit ist  $v$  bis auf die additive Constante  $\lambda_0$  vollkommen bestimmt.

Ebenso ergibt sich aus (VI) der Satz:

(IX) Ein Integral 1. Gattung  $v$  ist (bis auf eine additive Constante) vollständig bestimmt, wenn die  $2p$  reellen (oder aber die  $2p$  imaginären) Bestandtheile seiner Periodicitätsmoduln an den sämtlichen  $2p$  Querschnitten  $a_i$  und  $b_i$  beliebig gegeben sind; nur dürfen diese  $2p$  Bestandtheile nicht sämtlich  $= 0$  sein.

Die Sätze VIII und IX geben je ein System von unabhängigen und hinreichenden Stücken zur Bestimmung eines

Integrals 1. Gattung an<sup>1)</sup>). Sie zeigen ferner, dass die Periodicitätsmoduln eines einzelnen Integrals 1. Gattung nicht unabhängig von einander sind; durch die eine Hälfte der Periodicitätsmoduln ist die andere Hälfte oder durch die reellen Theile der Periodicitätsmoduln sind die imaginären Theile bereits mitbestimmt.

Wir erwähnen hier noch einen Satz, der aussagt, dass auch zwischen den Periodicitätsmoduln von je zwei Integralen 1. Gattung eine Beziehung besteht<sup>2)</sup>); nämlich:

(X) Zwischen den Periodicitätsmoduln zweier Integrale 1. Gattung  $v_k$  und  $v_l$  besteht die Gleichung

$$(9a) \quad \sum_{i=1}^p (A_{ik}B_{il} - A_{il}B_{ik}) = 0;$$

zwischen den  $2p^2$  Periodicitätsmoduln (7) der  $p$  linear unabhängigen Integrale  $v_1, \dots, v_p$  bestehen daher  $\frac{1}{2}p(p-1)$  solcher Relationen.

Wir benutzen bereits im Folgenden diesen Satz, wenn auch sein Beweis erst in § 19 gegeben wird.

Man kann aus einem System von  $p$  linear unabhängigen Integralen 1. Gattung  $v_1, \dots, v_p$  ein zweites solches System  $u_1, \dots, u_p$  ableiten. Zur Bestimmung der Integrale  $u_i$  können die  $p^2$  Periodicitätsmoduln, welche diese Integrale an  $p$  von den  $2p$  Querschnitten  $a_i$  und  $b_i$  besitzen, beliebig vorgegeben sein, nur mit der Bedingung, dass die Determinante dieser  $p^2$  Moduln nicht verschwindet. Die noch fehlenden Periodicitätsmoduln an den  $p$  übrigen Querschnitten sind alsdann eindeutig bestimmt.

Dies gibt Anlass zur Einführung eines gewissen Normalsystems von  $p$  linear unabhängigen Integralen 1. Gattung<sup>3)</sup>). Wir bezeichnen dieselben in der Folge stets mit  $u_1, \dots, u_p$  und setzen:

$$(10) \quad u_1 = \int \frac{f_1 dx}{F^y}, \dots, u_p = \int \frac{f_p dx}{F^y},$$

wo  $f_1, \dots, f_p$   $p$  noch näher zu bestimmende, linear unabhängige, adjungirte Functionen vom  $n - 3^{\text{ten}}$  Grade sind.

1) Bei Riemann, (Ges. W. S. 98) erscheinen diese Sätze wieder als eine Folge aus dem Dirichlet'schen Princip.

2) Riemann, Ges. W. S. 124.

3) Riemann, Ges. W. S. 122.





an dem Querschnitt  $b_i$  und sind  $r_1, \dots, r_p$  reelle Zahlen, so ist stets der reelle Theil von  $\sum_{ik} a_{ik} r_i r_k$  ( $i, k = 1, \dots, p$ ),

$$\sum_{ik} a'_{ik} r_i r_k \quad \text{negativ}^1). \quad (19)$$

Bildet man nämlich aus den Integralen  $u_i$  das Integral 1. Gattung

$$u = r_1 u_1 + \dots + r_p u_p$$

mit den reellen Coefficienten  $r_i$  und bezeichnet die Periodicitätsmoduln desselben an den Querschnitten  $a_i$  und  $b_i$  durch  $A_i = A'_i + i A''_i$  und  $B_i = B'_i + i B''_i$ , so ist nach (11)

$$\begin{aligned} A_i &= r_i \pi i & \text{also} & \quad A'_i = 0 & \quad A''_i &= r_i \pi \\ B_i &= \sum_k r_k a_{ik} & ,, & \quad B'_i = \sum_k r_k a'_{ik} & \quad B''_i &= \sum_k r_k a''_{ik}. \end{aligned}$$

Hieraus folgt nach Satz (II), dass

$$\sum_i (A'_i B''_i - B'_i A''_i) = -\pi \sum_{ik} a'_{ik} r_i r_k \quad \text{positiv ist. (q. e. d.)}$$

Das durch den Satz (XI) definirte System von  $p$  Normalintegralen  $u_i$  ist offenbar nicht das einzige System dieser Art; man erhält vielmehr eine endliche Anzahl solcher Systeme, indem man die erste Determinante der Periodicitätsmoduln in (11) nicht den Querschnitten  $a_i$ , sondern beliebigen  $p$  unter den  $2p$  Querschnitten  $a_i$  und  $b_i$  zuordnet. Es gibt aber nicht nur eine endliche Anzahl, sondern unendlich viele Systeme von Normalintegralen 1. Gattung oder Systeme von Periodicitätsmoduln  $a_{ik}$ . Man kann nämlich, wie schon in § 2 S. 31 erwähnt wurde, das anfangs gewählte, kanonische Querschnittsystem  $a_i, b_i$  von  $T$  durch unendlich viele andere, gleichwerthige kanonische Querschnittsysteme ersetzen; zu jedem derselben gehört ein neues System von Normalintegralen 1. Gattung, die sich linear durch die ursprünglichen Normalintegrale  $u_i$  ausdrücken und ein neues System von Periodicitätsmoduln, die sich linear durch die ursprünglichen Periodicitätsmoduln  $\pi i$  und  $a_{ik}$  ausdrücken. Wie aber auch das kanonische Querschnittsystem  $a_i, b_i$  und die zugehörigen Normalintegrale  $u_i$  gewählt seien, stets gelten für das zugehörige Modulsystem  $a_{ik}$  die in den Sätzen (XII) bis (XV) ausgesprochenen Eigenschaften. Wir kommen auf die unendlich vielen Systeme von

1) Riemann, Ges. W. S. 125.

Normalintegralen  $v_i$  und die zugehörigen Systeme von Moduln  $a_{ik}$  zurück bei der linearen Transformation der Thetafunctionen (Abschnitt VIII).

### § 16. Das Integral 2. und 3. Gattung<sup>1)</sup>.

Es sei nunmehr die Aufgabe:

A. Ein Abel'sches Integral  $W$  zu bilden, das in  $\varrho$  beliebig gegebenen Punkten  $(x_1, y_1), \dots, (x_\varrho, y_\varrho)$  logarithmisch  $\infty$  wird bezüglich wie

$$(1) \quad A_1 \log(x - x_1), \dots, A_\varrho \log(x - x_\varrho),$$

wobei nach (III) § 14  $\sum_i A_i = 0$  ( $i = 1, \dots, \varrho$ ) ist.

Die  $\varrho$  Punkte  $(x_i, y_i)$  seien einfache Punkte im Endlichen von  $T$ ; für andere Annahmen (wenn einzelne der  $\varrho$  Punkte in Verzweigungspunkte oder ins Unendliche fallen) ist die Behandlung der Aufgabe nur wenig abzuändern.

Damit  $W$  den gestellten Forderungen genügt, muss die zugehörige rationale Function  $\frac{dW}{dx}$  von  $(x, y)$  in den  $\varrho$  Punkten  $(x_i, y_i)$ , in den  $n$  Punkten  $(x = \infty, y = \infty)$ , den Verzweigungspunkten und den Doppelpunkten ein bestimmtes Verhalten zeigen, das sich wieder aus der Entwicklung von  $W$  in der Umgebung dieser Punkte ergibt.

In der Umgebung eines der  $n$  Punkte  $(x = \infty, y = \infty)$  ist:

$$W = H_0 + H_1 x^{-1} + \dots, \quad \text{also} \quad \frac{dW}{dx} = -H_1 x^{-2} + \dots$$

In der Umgebung eines Verzweigungspunktes  $(x = \gamma, y = y_\gamma)$  ist:

$$W = M_0 + M_1 (x - \gamma)^{\frac{1}{2}} + \dots, \quad \text{also} \quad \frac{dW}{dx} = \frac{1}{2} M_1 (x - \gamma)^{-\frac{1}{2}} + \dots$$

In der Umgebung eines Doppelpunktes  $(x = \delta, y = y_\delta)$  ist für jeden Zweig:

$$W = N_0 + N_1 (x - \delta) + \dots, \quad \text{also} \quad \frac{dW}{dx} = N_1 + \dots$$

In der Umgebung des Punktes  $(x_i, y_i)$  ist:

$$W = A_i \log(x - x_i) + A_i^0 + A_i' (x - x_i) + \dots, \quad \text{also} \\ \frac{dW}{dx} = A_i (x - x_i)^{-1} + A_i' + \dots$$

1) Riemann, Ges. W. S. 99 u. 110.

Hieraus folgt: Die rationale Function  $\frac{dW}{dx}$  muss sein

$$\left. \begin{aligned} &= 0^2 \text{ in jedem der } n \text{ Punkte } (x = \infty, y = \infty), \\ &= \infty^1 \text{ in jedem der } \omega = 2(n + p - 1) \text{ Verzweigungspunkte,} \\ &= \infty^1 \text{ wie } A_i (x - x_i)^{-1} \text{ in dem Punkte } (x_i, y_i) \text{ } (i = 1, \dots, \varrho), \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

und sie muss endlich bleiben in allen übrigen Punkten von  $T$ .

Die Ordnung der Function  $\frac{dW}{dx}$  ist hiernach  $= \varrho + \omega = \varrho + 2(n + p - 1)$  und die Zahl der im Endlichen gelegenen  $0^1$  Punkte  $= \varrho + 2p - 2$ .

Um zunächst eine specielle Function herzustellen, welche die Eigenschaften (2) besitzt, füge man zu den  $\varrho$  Punkten  $(x_i, y_i)$  noch  $p - 1$  willkürliche Punkte  $(\xi_\lambda, \eta_\lambda)$  ( $\lambda = 1, \dots, p - 1$ ) hinzu und bilde aus zwei adjungirten Functionen  $M$  und  $N$  von gleichem Grade  $\mu$  eine rationale Function  $M:N$  von der Ordnung  $m = \varrho + p - 1$ , deren  $\infty^1$  Punkte die  $\varrho + p - 1$  Punkte  $(x_i, y_i)$  und  $(\xi_\lambda, \eta_\lambda)$  sind, was nach (I § 12) stets möglich ist, wenn  $\varrho + p - 1 > p$  oder  $\varrho \geq 2$  ist.

Der Zähler  $M$  hat dann noch  $m - p + 1 = \varrho$  homogene, willkürliche Coefficienten. Sei ferner  $\Phi_0$  eine adjungirte Function des  $n - 3^{\text{ten}}$  Grades und die  $p - 1$  willkürlichen  $0^1$  Punkte derselben die oben gewählten  $p - 1$  Punkte  $(\xi_\lambda, \eta_\lambda)$ . Dann genügt der Ausdruck

$$\frac{M \Phi_0}{N F' y} \quad (3)$$

den Bedingungen (2), wenn man die  $\varrho$  in  $M$  noch willkürlichen Coefficienten so bestimmt, dass (3) in den Punkten  $(x_i, y_i)$  sich verhält wie  $A_i (x - x_i)^{-1}$ , was bei allgemeiner Lage dieser Punkte stets möglich ist. Man hat hierzu die  $\varrho$  Gleichungen<sup>1)</sup> ( $i = 1, \dots, \varrho$ ):

$$\left[ \frac{M \Phi_0}{N' x F' y - N' y F' x} \right]_{x_i} = A_i. \quad (4)$$

Für diese Ausdrücke (4) ist wirklich

$$\sum A_i = 0, \quad (5)$$

denn die letztere Gleichung ist nichts anderes, als das Abel'sche Theorem für Differentiale 1. Gattung (§ 13 Gl. (11)), angewandt auf die  $\infty^1$  Punkte und Residuen der Function  $M:N$ , wie leicht zu sehen.

1) Wir bezeichnen hier, wie im Folgenden, häufig einen Punkt mit den Coordinaten  $(x_i, y_i)$  kurz durch  $x_i$ ; so soll der Index  $x_i$  in (4) andeuten, dass in dem Klammerausdruck die Coordinaten  $(x, y)$  durch  $(x_i, y_i)$  zu ersetzen sind.

Die Function (3) ist hierdurch völlig bestimmt; sie ist indess noch nicht die allgemeinste Function, welche den Bedingungen (2) genügt. Die Differenz aber zwischen der gesuchten, allgemeinen Function  $\frac{dW}{dx}$  und dem Ausdruck (3) ist eine Function, die in jedem der  $n$  Punkte  $(x = \infty, y = \infty) = 0^2$  und in jedem der  $\omega$  Verzweigungspunkte  $= \infty^1$  wird, während sie in den übrigen Punkten von  $T$  endlich bleibt. Die allgemeinste Function dieser Art ist nach (1) § 13  $\Phi : F'y$ , wo  $\Phi$  eine beliebige, adjungirte Function des  $n - 3^{\text{ten}}$  Grades ist, die noch  $p$  lineare, homogene Coefficienten enthält. Man hat daher als allgemeinsten Ausdruck für die gesuchte Function:

$$(6) \quad \frac{dW}{dx} = \frac{M\Phi_0 + N\Phi}{N F'y}.$$

Geht man zur Integralfunction über und bezeichnet mit  $W_0$  das Integral von (3), also

$$(7) \quad W_0 = \int \frac{M\Phi_0}{N F'y} dx,$$

so erhält man aus (6), wenn  $u_1, \dots, u_p$  die  $p$  linear unabhängigen Normalintegrale 1. Gattung mit denselben Grenzen, die  $W_0$  hat, bedeuten,

$$(7a) \quad W = W_0 + \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_p u_p + \alpha_0.$$

Hiermit ist die Aufgabe (A) gelöst. Man kann die  $p$  Coefficienten  $\alpha_i$  immer so bestimmen, dass die  $p$  Periodicitätsmoduln des Integrals (7a) an den  $p$  Querschnitten  $a_i$  beliebig gegebene Werthe annehmen; man kann ferner dem Integral  $W$  noch einen constanten Factor geben und denselben so bestimmen, dass eine der Grössen  $A_i$  (1) einen gegebenen Werth erhält.

Wegen der Bedingung  $\varrho \geq 2$  oder der Bedingung  $\sum A_i = 0$  gibt es, wie schon früher erwähnt, kein Abel'sches Integral mit nur einem logarithmischen Unstetigkeitspunkt. Setzt man in (7a)  $\varrho = 2$ , so hat man das sog. Abel'sche Integral 3. Gattung mit den 2 logarithmischen Unstetigkeitspunkten  $(x_1, y_1)$  und  $(x_2, y_2)$  und mit der Bedingung  $A_2 = -A_1$ . Dividirt man noch durch  $-A_1$  und bestimmt die  $p$  Coefficienten  $\alpha_i$  so, dass die Periodicitätsmoduln des Integrals an den  $p$  Querschnitten  $a_i$  Null werden, so erhält man das sog. Normalintegral 3. Gattung  $w_{12}$ . Wir fassen dies so zusammen:

(I) Das Normalintegral  $w_{12}$  mit den 2 logarithmischen Unstetigkeitspunkten  $(x_1, y_1)$  und  $(x_2, y_2)$  ist dadurch definirt



- 1) dass es sich in  $(x_1, y_1)$  wie  $-\log(x - x_1)$ , in  $(x_2, y_2)$  wie  $+\log(x - x_2)$  verhält,
- 2) dass die Periodicitätsmoduln an den  $p$  Querschnitten  $a_i$  sämtlich 0 sind.

Die übrigen Periodicitätsmoduln des so normirten Integrals  $w_{12}$  sind nun völlig bestimmt; sie sind nämlich an den von  $O$  nach den Punkten  $(x_1, y_1)$  und  $(x_2, y_2)$  gelegten Schnitten  $\mathfrak{L}_1$  und  $\mathfrak{L}_2$  (Figur 8 S. 104) bez. gleich  $-2i\pi$  und  $+2i\pi$ ; ferner, wie in § 18 (III) gezeigt wird, an dem Querschnitt  $b_i$  gleich

$$w_{12}^+ - w_{12}^- = 2 \int_{x_1}^{x_2} du_i, \quad (8)$$

wobei vorausgesetzt ist, dass der Integrationsweg zwischen  $(x_1, y_1)$  und  $(x_2, y_2)$  die Querschnitte  $a_i, b_i$  ( $i = 1, \dots, p$ ) und die Linien  $\mathfrak{L}_1$  und  $\mathfrak{L}_2$  nicht schneidet. Der allgemeinste Werth, den die Integralfunktion  $x_{12}$  durch Abänderung des Weges zwischen zwei Grenzpunkten  $(\xi, \eta)$  und  $(x, y)$  in  $T$  annehmen kann, wird erhalten, indem man zu  $w_{12}$  den Ausdruck hinzufügt:

$$m 2i\pi + 2 \sum_{i=1}^p n_i \int_{x_1}^{x_2} du_i, \quad (9)$$

wo  $m$  und die  $n_i$  ganze Zahlen sind.

Aus der Definition (I) ergeben sich zwei wichtige Sätze. Seien  $w_{01}$ ,  $w_{02}$ ,  $w_{12}$  u. s. w. Normalintegrale 3. Gattung mit denselben Grenzpunkten  $(\xi, \eta)$  und  $(x, y)$  und sei vorerst angenommen, dass ihre Integrationswege zwischen diesen Grenzpunkten in der einfach zusammenhängenden Fläche  $T'$  (mit der von den Rändern der Schnitte  $a_i, b_i, c_i, \mathfrak{L}_0, \mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2 \dots$  gebildeten Grenzlinie) verlaufen, so gelten die Gleichungen

$$w_{12} + w_{21} = 0, \quad w_{12} + w_{20} + w_{01} = 0 \quad \text{u. s. f.} \quad (10)$$

Denn die linken Seiten dieser Gleichungen sind Integralfunktionen, die in keinem Punkt der Fläche  $\infty$  werden und längs der Linien  $\mathfrak{L}_0, \mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2, \dots$  stetig sind; sie stellen daher Integrale 1. Gattung dar (§ 15). Diese reduciren sich aber auf Constanten, da auch die Periodicitätsmoduln an den  $p$  Querschnitten  $a_i$  gleich 0 sind (§ 15 Satz IIa) und diese Constanten sind 0, weil die Grenzpunkte der Integrale die nämlichen sind.

Schreibt man die Gleichungen (10) in der Form

$$(11) \quad w_{12} = -w_{21}, \quad w_{12} = w_{10} - w_{20},$$

so hat man die Sätze:

(II) Das Normalintegral 3. Gattung ändert sein Zeichen, wenn man die zwei logarithmischen Unstetigkeitspunkte vertauscht.

(III) Ein Normalintegral 3. Gattung  $w_{12}$  mit den Unstetigkeitspunkten  $(x_1, y_1)$  und  $(x_2, y_2)$  ist gleich der Differenz zweier Normalintegrale 3. Gattung, die nur in je einem der Punkte  $(x_1, y_1)$  und  $(x_2, y_2)$  und ausserdem in dem nämlichen dritten, beliebigen Punkt  $(x_0, y_0)$  logarithmisch  $\infty$  werden; für diesen Punkt  $(x_0, y_0)$  bleibt das Integral  $w_{12}$  stetig.

Lässt man die Beschränkung, dass die Wege der Integrale in (10) und (11) nur in  $T'$  verlaufen sollen, fallen und nimmt dieselben beliebig in der mehrfach zusammenhängenden Fläche  $T$ , so gelten die nämlichen Gleichungen (10) und (11), nur mit dem Zusatze, dass zu jedem Integral noch eine Constante hinzutreten kann, die sich linear und ganzzahlig aus den Periodicitätsmoduln der Integrale an den Schnitten  $b_i$  und  $\mathfrak{Q}_0, \mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2, \dots$  zusammensetzt und von dem Weg des betreffenden Integrals in  $T$  abhängt.

Wir kommen schliesslich zur Bildung des Integrals 2. Gattung, d. h. eines Integrals, das nur in einem Punkt  $(x_1, y_1)$   $\infty$  wird und zwar algebraisch  $\infty$  wie  $A_1(x - x_1)^{-1}$ . Ein solches Integral lässt sich in ähnlicher Weise herstellen, wie das Integral 3. Gattung. Bestimmt man nämlich eine rationale Function von  $(x, y)$ , welche

$$= 0^2 \text{ in jedem der } n \text{ Punkte } (x = \infty, y = \infty),$$

$$= \infty^1 \text{ in jedem der } \omega \text{ Verzweigungspunkte,}$$

$$= \infty^2 \text{ wie } -A_1(x - x_1)^{-2} \text{ in dem Punkt } (x_1, y_1),$$

so ist das Integral dieser Function, vermehrt um ein Aggregat von  $p$  linear unabhängigen Integralen 1. Gattung, das allgemeinste Integral 2. Gattung mit dem Unstetigkeitspunkt  $(x_1, y_1)$ .

Indem man dies Integral durch  $A_1$  dividirt und die Coefficienten der Integrale 1. Gattung passend bestimmt, erhält man das Normalintegral 2. Gattung  $t_1$ , das wir so definiren:

(IV) Das Normalintegral 2. Gattung  $t_1$  mit dem algebraischen Unstetigkeitspunkt  $(x_1, y_1)$  ist so bestimmt,

- 1) dass es in  $(x_1, y_1) \infty$  wird wie  $(x - x_1)^{-1}$ ,
- 2) dass die Periodicitätsmoduln an den  $p$  Querschnitten  $a_i$  sämmtlich  $= 0$  sind.

Man bildet indess das Normalintegral 2. Gattung  $t_1$  einfacher durch einen Grenzübergang aus dem Normalintegral 3. Gattung  $w_{12}$ . Hierzu dient die zweite Gleichung (11). Lässt man in derselben  $(x_2, y_2)$  unendlich nahe an  $(x_1, y_1)$  heranrücken, so werden zunächst beide Seiten unendlich kleine Grössen. Dividirt man beiderseits durch die constante Grösse  $x_1 - x_2$ , so hat man den Grenzübergang

$$\lim_{x_2=x_1} \frac{w_{12}}{x_1 - x_2} = \lim_{x_2=x_1} \frac{w_{10} - w_{20}}{x_1 - x_2} = \frac{dw_{10}}{dx_1}. \quad (12)$$

Dieser Ausdruck stellt nun ein Integral 2. Gattung dar und zwar grade das in (IV) definirte Normalintegral  $t_1$ . Denn nach dem Verhalten von  $w_{10}$  hat der Ausdruck (12) folgende Eigenschaften:

Er wird nur  $\infty$  in  $(x_1, y_1)$  und zwar wie  $-\frac{d \log(x-x_1)}{dx_1} = (x-x_1)^{-1}$ ; er bleibt dagegen in  $(x_0, y_0)$  endlich, da  $w_{12}$  hier endlich ist.

Die Periodicitätsmoduln von (12) an den Querschnitten  $a_i$  sind 0, wie die von  $w_{12}$  oder  $w_{10}$  selber.

An den Querschnitten  $\mathfrak{L}$  sind die Periodicitätsmoduln von (12) ebenfalls  $= 0$ , da sie für  $w_{12}$  oder  $w_{10}$  gleich  $+2i\pi$  waren.

Bei der Bildung des Differentialquotienten (12) ist wesentlich, dass das Integral  $w_{10}$  bereits normirt ist, oder dass der Coefficient des Logarithmus in der Entwicklung von  $w_{10}$  in der Umgebung von  $(x_1, y_1)$  gleich  $-1$ , also unabhängig von  $(x_1, y_1)$  ist. Wäre dieser Coefficient abhängig von  $(x_1, y_1)$ , so würde man durch Differentiation von  $w_{10}$  nach  $x_1$  ein Integral erhalten, das in  $(x_1, y_1)$  zugleich algebraisch und logarithmisch  $\infty$  wäre.

Man hat so den Satz<sup>1)</sup>:

(V) Das Normalintegral 2. Gattung  $t_1$  mit dem Unstetigkeitspunkt  $(x_1, y_1)$  ist

$$t_1 = \frac{dw_{10}}{dx_1}, \quad (13)$$

d. h. es ist gleich der Ableitung des Normalintegrals 3. Gattung  $w_{10}$  nach  $x_1$ , wobei der Punkt  $(x_0, y_0)$  ganz beliebig ist.

Aus (8) folgt, dass der Periodicitätsmodul von  $t_1$  an dem Querschnitt  $b_i$  den Werth hat

1) Riemann, Ges. W. S. 100.

$$(14) \quad t_1^+ - t_1^- = 2 \frac{d}{dx_1} \int_{x_1}^{x_0} du_i = -2 \left( \frac{du_i}{dx} \right)_{x_1},$$

wie auch im § 18 (II) noch besonders gezeigt wird.

Der allgemeinste Werth, den das Integral  $t_1$  durch Abänderung des Integrationsweges in  $T$  annehmen kann, wird daher erhalten, indem man zu  $t_1$  den Ausdruck addirt

$$(15) \quad 2 \sum n_i \left( \frac{du_i}{dx} \right)_{x_i},$$

wo die  $n_i$  beliebige, ganze Zahlen sind.

In ähnlicher Weise, wie oben, findet man, dass ein Integral, das nur in einem Punkt  $(x_1, y_1) \infty$  wird, und zwar wie  $(x - x_1)^{-2}$  oder wie  $2(x - x_1)^{-3}$  u. s. f. und das an den Querschnitten  $a_i$  die Periodicitätsmodulu 0 hat, identisch ist mit der 1., 2., . . Ableitung von  $t_1$  nach  $x_1$  oder mit der 2., 3., . . Ableitung von  $w_{10}$  nach  $x_1$ . Auch diese Integrale lassen sich leicht direct bilden.

Umgekehrt kann man nach (13) das Integral  $w_{12}$  durch einen Integrationsprocess aus dem Integral 2. Gattung herleiten. Ist nämlich  $t_0$  ein Normalintegral 2. Gattung mit dem Unstetigkeitspunkt  $(x_0, y_0)$ , so ist nach (11) und (13)

$$(16) \quad w_{12} = \int_{x_2}^{x_1} t_0 dx_0,$$

oder, wenn  $\frac{dt_0}{dx}$  als rationale Function von  $(x, y)$  und  $(x_0, y_0)$  mit  $\psi(x; x_0)$  bezeichnet wird,

$$(17) \quad w_{12} = \int_{x_2}^x dx \int_{x_2}^{x_1} \psi(x; x_0) dx_0.$$

Das Normalintegral 3. Gattung kann also auch erhalten werden durch zweimalige Integration einer algebraischen Function.

### § 17. Zerlegung des allgemeinen Integrals.

Wir kehren zurück zu dem allgemeinen, Abel'schen Integral

$$(1) \quad W = \int P(x, y) dx$$

und zeigen, wie sich dasselbe aus Integralen der drei Gattungen zusammensetzen oder in solche zerlegen lässt.

Man nehme zuerst an, es sei die Form von  $W$  (1) gesucht und

es seien zu diesem Zweck die Unstetigkeitspunkte von  $W$  und die Entwicklungen von  $W$  in der Umgebung derselben gegeben. Die Unstetigkeitspunkte von  $W$  seien einfache Punkte im Endlichen von  $T$  mit den Coordinaten  $(x_l, y_l)$  ( $l = 1, \dots, m$ ) und die Entwicklung von  $W$  in der Umgebung des Punktes  $(x_l, y_l)$  sei

$$A_l \log(x - x_l) + B_l(x - x_l)^{-1} + C_l(x - x_l)^{-2} + D_l(x - x_l)^{-3} + \dots + \mathfrak{P}(x - x_l), \quad (2)$$

wo  $\sum A_l = 0$  ist, wo ferner die Glieder mit negativen Exponenten in endlicher Zahl auftreten und  $\mathfrak{P}(x - x_l)$  eine aufsteigende Potenzreihe bezeichnet. Eine Betrachtung, ähnlich der zu Anfang des § 16 angestellten, zeigt, dass  $P(x, y)$  die bestimmte Form

$$P(x, y) = Q\Phi : F'(y) \quad (2a)$$

haben muss, wo  $\Phi$  eine beliebige, adjungirte Function vom Grade  $n - 3$  und  $Q(x, y)$  eine rationale, gebrochene Function von gleichem Grade im Zähler und Nenner ist, welche die Punkte  $(x_l, y_l)$  zu  $\infty$  Punkten erster oder höherer Ordnung hat. Man gelangt aber zur Lösung der gestellten Aufgabe und damit indirect zur Bildung der Function  $Q$  unmittelbar mit Hilfe des in § 16 definirten Normalintegrals 3. Gattung. Bildet man nämlich aus den  $\infty$  Punkten  $(x_l, y_l)$  und den Coefficienten  $A_l, B_l, C_l, D_l, \dots$  den Ausdruck

$$\sum_{l=1}^m \left( A_l \omega_{l0} + B_l \frac{d\omega_{l0}}{dx_l} + C_l \frac{d^2\omega_{l0}}{dx_l^2} + \frac{1}{2} D_l \frac{d^3\omega_{l0}}{dx_l^3} + \dots \right), \quad (3)$$

in welchem der Punkt  $(x_0, y_0)$  ganz willkürlich ist, so ist die Differenz zwischen  $W$  und der Function (3) in allen Punkten der Fläche  $T$  endlich, in  $(x_l, y_l)$ , weil sich die unstetigen Glieder aufheben, in  $(x_0, y_0)$ , weil  $\sum A_l = 0$  ist. Die Differenz ist daher ein allgemeines Integral 1. Gattung, das sich aus den  $p$  Normalintegralen 1. Gattung  $u_1, \dots, u_p$  mit  $p$  Coefficienten  $\mu_1, \dots, \mu_p$  zusammensetzt. Man hat folglich für  $W$  den Ausdruck

$$W = \sum_{l=1}^m \left( -A_l \omega_{l0} + B_l \frac{d\omega_{l0}}{dx_l} + C_l \frac{d^2\omega_{l0}}{dx_l^2} + \dots \right) + \sum_{k=1}^p \mu_k u_k + \text{Const.} \quad (4)$$

Kennt man weiter die Periodicitätsmoduln  $M_1, \dots, M_p$  von  $W$  an den Querschnitten  $a_1, \dots, a^p$ , so erhält man noch  $p$  Gleichungen zur Bestimmung der  $p$  Coefficienten  $\mu_k$ .

Ist umgekehrt  $W$  oder  $P(x, y)$  in (1) gegeben und die Zerlegung (4) gesucht, so ermittelt man auf algebraischem Wege die Unstetigkeitspunkte von  $P(x, y)$  und zu jedem derselben die Reihen-

entwicklung dieser Function. Damit sind die Punkte  $(x_i, y_i)$  und die zugehörigen Coefficienten  $A_i, B_i, C_i, \dots$  gegeben, aus denen man den Ausdruck (4) bilden kann. Dies gibt den Satz:

(I) Ein System von hinreichenden und unabhängigen Stücken zur Bestimmung eines Abel'schen Integrals besteht

- 1) in den Unstetigkeitspunkten  $(x_i, y_i)$  und den zugehörigen Entwicklungscoefficienten  $A_i, B_i, C_i, \dots$  mit der Bedingung  $\sum A_i = 0$  und
- 2) in den Periodicitätsmoduln an  $p$  der  $2p$  Querschnitte  $a_i, b_i$  oder auch in den reellen Theilen der Periodicitätsmoduln an allen  $2p$  Querschnitten.

Durch diese Stücke ist das Integral bis auf eine additive Constante bestimmt. Bei Riemann ergibt sich der Satz (I) wieder als specieller Fall des Dirichlet'schen Princips.

Differentiirt man die Gleichung (4) nach  $x$ , so erhält man für die rationale Function  $P(x, y)$  eine Zerlegung in eine Reihe von einfachen, rationalen Functionen, die in den Unstetigkeitspunkten von  $P$  in bestimmter Weise  $\infty$  werden, eine Zerlegung, die sich auch direct vornehmen lässt.

Man kann diese Darstellungen noch mannigfach abändern, indem man auf der rechten Seite in (4) die Integrale 2. Gattung zum Theil durch eine rationale Function von  $(x, y)$  und die Integrale 3. Gattung zum Theil durch den Logarithmus einer rationalen Function von  $(x, y)$  ersetzt.

So lässt sich z. B. ein Integral  $W$ , das in einer beliebigen Zahl  $m$  von Punkten  $(x_l, y_l)$  ( $l = 1, \dots, m$ )  $\infty^1$  wird, bez. wie  $B_l(x - x_l)^{-1}$ , darstellen durch ein Aggregat, gebildet aus den  $p$  Normalintegralen 1. Gattung  $u_r$ , aus  $p$  Normalintegralen 2. Gattung  $t_r$  mit beliebigen Unstetigkeitspunkten  $(\xi_r, \eta_r)$  ( $r = 1, \dots, p$ ) und aus einer rationalen Function von  $(x, y)$ .

Denn sind  $M_i$  und  $N_i$  die Periodicitätsmoduln von  $W$  an den Querschnitten  $a_i$  und  $b_i$ , sind ferner  $t_1, \dots, t_p$  die  $p$  Normalintegrale 2. Gattung, bez. mit den Unstetigkeitspunkten  $(\xi_1, \eta_1), \dots, (\xi_p, \eta_p)$ , sind endlich  $u_1, \dots, u_p$  die  $p$  Normalintegrale 1. Gattung und bildet man das Integral ( $r = 1, \dots, p$ ):

$$W + \sum_r v_r t_r - \sum_r \mu_r u_r, \quad (5)$$

so lassen sich die  $2p$  constanten Coefficienten  $\mu_r, v_r$  so wählen, dass die  $2p$  Periodicitätsmoduln von (5) an den Querschnitten  $a_i, b_i$  sämt-

lich verschwinden. Dabei bestimmen sich die  $2p$  Grössen  $\mu_r, \nu_r$  nach (11) § 15 und (14) § 16 aus den  $2p$  Gleichungen ( $i = 1, \dots, p$ ):

$$M_i - \mu_i \pi i = 0, \quad N_i - 2 \sum_r \nu_r \left( \frac{du_i}{dx} \right)_r - \sum_r \mu_r a_{ir} = 0,$$

wo  $\left( \frac{du_i}{dx} \right)_r$  der für  $(\xi_r, \eta_r)$  gebildete Werth von  $\frac{du_i}{dx}$  ist. Es ist daher nur noch die Bedingung hinzuzufügen, dass die Determinante, gebildet aus den Grössen  $\left( \frac{\partial u_i}{\partial x} \right)_r$  ( $i, r = 1, \dots, p$ ), nicht verschwinden darf. Nach dieser Bestimmung der Grössen  $\mu_r, \nu_r$  ist (5) eine rationale Function  $R$  von  $(x, y)$ , deren  $\infty^1$  Punkte die  $m$  Punkte  $(x_i, y_i)$  und die  $p$  Punkte  $(\xi_r, \eta_r)$  und deren Residuen in diesen Punkten bez.  $B_i$  und  $\nu_r$  sind, die sich daher nach § 12 leicht bilden lässt. Damit ist das Integral  $W$  in der angegebenen Weise dargestellt.

Ebenso kann man offenbar ein Integral  $W$ , das in  $m$  Punkten  $(x_i, y_i)$  logarithmisch  $\infty$  wird bez. wie  $A_i \log(x - x_i)$ , darstellen durch ein Aggregat, gebildet aus den  $p$  Normalintegralen 1. Gattung, aus  $p$  Normalintegralen 3. Gattung mit beliebigen Unstetigkeitspunkten und aus dem Logarithmus einer rationalen Function von  $(x, y)$ , und man kann allgemein ein Integral  $W$  mit beliebigen algebraischen oder logarithmischen Unstetigkeitspunkten darstellen durch ein Aggregat, gebildet aus  $p$  Normalintegralen 1. Gattung, aus  $p$  Normalintegralen, die theils 2. Gattung, theils 3. Gattung sind und aus einer rationalen Function von  $(x, y)$  und dem Logarithmus einer solchen Function.

Wichtiger als diese Darstellungen sind die folgenden Anwendungen des Satzes (I), welche die Darstellung einer rationalen Function von  $(x, y)$  durch Integrale 2. Gattung und die des Logarithmus einer solchen Function durch Integrale 3. Gattung enthalten.

Um eine gegebene rationale Function  $R(x, y) = R$  von der Ordnung  $m (> p)$  durch Abel'sche Integrale darzustellen, sei der Einfachheit halber vorausgesetzt, dass die  $\infty$  Punkte  $(\beta_l, y_{\beta_l})$  ( $l = 1, \dots, m$ ) von  $R$  beliebige, einfache Punkte im Endlichen von  $T$  seien, und dass  $R$  in jedem derselben nur in 1. Ordnung  $\infty$  werde, in  $(\beta_l, y_{\beta_l})$  wie  $B_l(x - \beta_l)^{-1}$ . Tritt nun in (4)  $R$  an Stelle von  $W$ , so hat man  $x_i = \beta_i, A_i = 0, C_i = 0, \dots$  und es folgt, wenn  $\frac{d\omega_{l0}}{dx_i} = t_{\beta_l}$  gesetzt wird (vgl. (13) § 16), für  $R$  der Ausdruck ( $l = 1, \dots, m$ ):

$$R = \sum_l B_l t_{\beta_l} + B_0, \quad (6)$$

wo  $B_0$  eine Constante ist. Das in (4) auftretende Integral 1. Gattung fällt hier weg oder die Coefficienten  $\mu_k$  sind hier 0, weil die Periodicitätsmoduln der Function  $R$  und ebenso der Normalintegrale 2. Gattung  $t$  an den Querschnitten  $a_i$  sämmtlich 0 sind. Die Gleichung (6) gibt den Satz<sup>1)</sup>:

(II) Eine rationale Function  $R(x, y)$  lässt sich darstellen als ein Aggregat von Normalintegralen 2. Gattung, deren Unstetigkeitspunkte die  $\infty^1$  Punkte und deren Coefficienten die zugehörigen Residuen der Function  $R$  sind.

Das Charakteristische der rationalen Function  $R$ , betrachtet als Abel'sches Integral, besteht darin, dass die  $2m$  Elemente  $(\beta_i, y_{\beta_i})$  und  $B_i$  nicht willkürlich, sondern durch  $p$  Gleichungen an einander gebunden sind (Satz IV § 12). Diese  $p$  Gleichungen ergeben sich hier, indem man die Periodicitätsmoduln an den  $p$  Querschnitten  $b_i$  auf der rechten Seite der Gleichung (6) gleich 0 setzt, nach (14) § 16 in der Form ( $i = 1, \dots, p$ ):

$$(7) \quad \sum_{i=1}^m B_i \left( \frac{du_i}{dx} \right)_{\beta_i} = 0.$$

Diese Gleichungen sind identisch mit (12) § 13 und stellen das Abel'sche Theorem für Differentiale 1. Gattung dar, angewandt auf die Function  $R(x, y)$ . Wir haben an jener Stelle gesehen, wie man durch Discussion der Gleichungen (7) den Riemann-Roch'schen Satz findet. In der That war die Darstellung der rationalen Function  $R$  in der Form (6) und der zugehörigen Bedingungsgleichungen in der Form (7) für Riemann und Roch der Ausgangspunkt zur Herleitung des Satzes.

Um den Logarithmus einer gegebenen, rationalen Function  $R(x, y)$  durch Abel'sche Integrale darzustellen, muss man nach (I) von  $\log R$  wieder die Unstetigkeitspunkte und die zugehörigen Entwicklungscoefficienten, sowie die Periodicitätsmoduln an den Querschnitten  $a_i$  kennen. Die  $m \infty^1$  Punkte von  $R$  seien wieder  $(\beta_i, y_{\beta_i})$ , die  $m 0^1$  Punkte  $(\alpha_i, y_{\alpha_i})$ . In der Umgebung dieser Punkte ist für

$$(8) \quad \begin{cases} \beta_i: R = B_i (x - \beta_i)^{-1} + \dots & \text{also } \log R = -\log (x - \beta_i) + \dots \\ \alpha_i: R = A_i (x - \alpha_i)^{+1} + \dots & \text{,, } \log R = +\log (x - \alpha_i) + \dots \end{cases}$$

d. h. für die sämmtlichen Punkte  $\alpha_i$  und  $\beta_i$  ist  $\log R$  logarithmisch  $\infty$ . Tritt nun  $\log R$  an Stelle von  $W$  in (4) ein, so hat man

1) Riemann, Ges. W. S. 100.



( $x_i = \beta_i$ ,  $A_i = -1$ ) und ( $x_i = \alpha_i$ ,  $A_i = +1$ ) zu setzen, während  $B_i$ ,  $C_i$ , .. gleich 0 sind. Es folgt daher für  $\log R$  ein Ausdruck, den man mit Rücksicht auf die Gleichung  $\omega_{10} - \omega_{20} = \omega_{12}$  (11) § 16 schreiben kann

$$\log R = \sum_{i=1}^m \omega_{\beta_i \alpha_i} + \sum_{k=1}^p \mu_k u_k + C.$$

Die Periodicitätsmoduln von  $\log R$  an dem Querschnitt  $a_i$  (das- selbe gilt von  $b_i$ ) müssen ganzzahlige Vielfache von  $2i\pi$  sein, also von der Form  $m_i 2i\pi$ , wo  $m_i$  eine  $\pm$  ganze Zahl (oder 0) ist, die man erhält, indem man  $\log R$  von der  $-$  zur  $+$  Seite des Quer- schnitts  $a_i$  führt. Hiernach sind die Coefficienten  $\mu_i = 2m_i$  und man hat die Gleichung

$$\log R = \sum_i \omega_{\beta_i \alpha_i} + 2 \sum_k m_k u_k + C \quad (9)$$

oder den Satz:

(III) Der Logarithmus einer rationalen Function  $R(x, y)$  lässt sich, abgesehen von einem Integral 1. Gattung, dar- stellen als eine Summe von Normalintegralen 3. Gattung, deren Unstetigkeitspunkte die  $\infty^1$  und  $0^1$  Punkte der Func- tion  $R$  sind.

Das Charakteristische des Logarithmus einer rationalen Function  $R(x, y)$ , betrachtet als Abel'sches Integral, besteht darin, dass die  $2m$  Elemente ( $\beta_i, y_{\beta_i}$ ) und ( $\alpha_i, y_{\alpha_i}$ ) nicht willkürlich, sondern durch  $p$  Gleichungen an einander gebunden sind. Diese  $p$  Gleichungen er- geben sich hier, indem man die Periodicitätsmoduln an den Quer- schnitten  $b_i$  auf beiden Seiten der Gleichung (9) gleich setzt, nach (8) § 16 in der Form ( $i = 1, \dots, p$ ):

$$\sum_i \int_{\beta_i}^{\alpha_i} du_i = n_i \pi i. \quad (10)$$

Die ganzen Zahlen  $n_i$  in diesen Gleichungen hängen von den Integrationswegen zwischen den Punkten  $\beta_i$  und  $\alpha_i$  ab und können durch passende Wahl derselben auch  $= 0$  gemacht werden. Die Gleichungen (10) stellen das Abel'sche Theorem für Integrale 1. Gattung dar, angewandt auf die rationale Function  $R(x, y)$ ; sie werden in § 20 eingehender untersucht.

### § 18. Beziehungen zwischen zwei Abel'schen Integralen.

In den §§ 14—17 wurden die Eigenschaften und die Bildungsweise der Abel'schen Integrale besprochen. Wir fragen jetzt nach den Beziehungen der Abel'schen Integrale zu einander. Es besteht eine allgemeine Formel<sup>1)</sup> zwischen den Elementen zweier beliebigen Abel'schen Integrale  $V$  und  $W$ , aus der sich durch Specialisirung von  $V$  und  $W$  eine Reihe von Sätzen und Darstellungen ergibt, die sich auf das Verhalten der drei Gattungen von Integralen zu einander und auf ihr Verhalten zu den rationalen Functionen beziehen.

Es seien zwei Abel'sche Integrale gegeben,  $V$  mit den Unstetigkeitspunkten  $(x_l, y_l)$  ( $l = 1, \dots, m$ ) und  $W$  mit den Unstetigkeitspunkten  $(\xi_\lambda, \eta_\lambda)$  ( $\lambda = 1, \dots, \mu$ ) in der Verzweigungsfläche  $T$ . Man schliesse diese Punkte durch kleine Kreise aus, lege ferner die Querschnitte  $a_i, b_i, c_i$  ( $i = 1, \dots, p$ ) und von dem Punkte  $O$  (dem gemeinsamen Punkte der Schnitte  $c_i$ ) nach den um die Punkte  $(x_l, y_l)$  und  $(\xi_\lambda, \eta_\lambda)$  gezogenen Kreisen weitere Schnitte  $\mathfrak{Q}_l$  und  $\mathfrak{Q}_\lambda$ , die weder einander noch  $a_i, b_i, c_i$  schneiden und wähle endlich den  $+$  und  $-$  Rand an jedem dieser Schnitte, wie in Figur 8 S. 104. In der so aus  $T$  entstandenen, einfach zusammenhängenden Fläche  $T'$  sind die Integrale  $V$  und  $W$  eindeutig und stetig und es ist folglich nach dem Cauchy'schen Fundamentalsatz<sup>2)</sup> über die Integration im complexen Gebiet

$$(1) \quad \int V dW = 0,$$

wenn dies Integral etwa in positiver Richtung (im Sinne der Pfeile in Fig. 8) über die ganze Begrenzung von  $T'$  ausgedehnt wird. Die in Rede stehende Gleichung ergibt sich nun aus (1), indem man für das Integral die von den einzelnen Querschnitten der Fläche  $T'$ , sowie die von den Kreisen um die Punkte  $(x_l, y_l)$  und  $(\xi_\lambda, \eta_\lambda)$  herrührenden Beiträge bestimmt. Was die Querschnitte betrifft, so kommen die Linien  $c_i$  nicht in Betracht, weil für sie, wie früher bemerkt, die Periodicitätsmoduln jedes Abel'schen Integrals gleich 0 sind. Für die übrigen Schnitte  $a_i, b_i, \mathfrak{Q}_l$  und  $\mathfrak{Q}_\lambda$  lässt sich mit Hilfe der Periodici-

1) Das Princip zur Herleitung dieser Formel durch Auswerthung des Randintegrals (1) ist von Riemann (Ges. W. S. 124 und 133) für einen speciellen Fall entwickelt und von Clebsch-Gordan, Ab. F. S. 114 ff. (1866) zur Ableitung weiterer Relationen benutzt worden. Die allgemeinste, derartige Formel hat Herr Prym (Journ. für Math. Bd. 71. S. 305) (1869) gegeben.

2) S. etwa Durège, Elemente der Theorie der Functionen. 4. A. § 18.

tätsmoduln der Weg des Integrals (1) beschränken auf den  $+$  Rand dieser Schnitte.

Wir machen vorerst vereinfachende Annahmen, die sich später leicht aufheben lassen, nämlich, dass die Unstetigkeitspunkte  $(x_i, y_i)$  und  $(\xi_\lambda, \eta_\lambda)$  weder in Verzweigungspunkte noch ins Unendliche von  $T$  fallen, dass keiner der Punkte  $(x_i, y_i)$  mit einem der Punkte  $(\xi_\lambda, \eta_\lambda)$  zusammenfalle, und dass  $V$  und  $W$  algebraisch nur bis zur ersten Ordnung  $\infty$  werden. Es sei also in der Umgebung von

$$\begin{aligned} (x_i, y_i) : V &= C_i \log(x - x_i) + D_i (x - x_i)^{-1} + \mathfrak{P}_i(x - x_i), \\ (\xi_\lambda, \eta_\lambda) : W &= \mathbf{C}_\lambda \log(x - \xi_\lambda) + \mathbf{D}_\lambda (x - \xi_\lambda)^{-1} + \mathbf{P}_\lambda(x - \xi_\lambda), \end{aligned} \quad (2)$$

wobei 
$$\sum_i C_i = 0, \quad \sum_\lambda \mathbf{C}_\lambda = 0 \quad (3)$$

ist und  $\mathfrak{P}_i(x - x_i)$  und  $\mathbf{P}_\lambda(x - \xi_\lambda)$  aufsteigende Potenzreihen bez. von  $(x - x_i)$  und  $(x - \xi_\lambda)$  bedeuten.

Ferner sei in der Umgebung von

$$\begin{aligned} (x_i, y_i) : W &= W_{x_i} + (x - x_i) \left( \frac{dW}{dx} \right)_{x_i} + \dots \\ (\xi_\lambda, \eta_\lambda) : V &= V_{\xi_\lambda} + (x - \xi_\lambda) \left( \frac{dV}{dx} \right)_{\xi_\lambda} + \dots \end{aligned} \quad (4)$$

Endlich seien die Periodicitätsmoduln von

$$\begin{aligned} V &\text{ an } a_i : M_i, \text{ an } b_i : N_i, \\ W &\text{ „ } a_i : \mathbf{M}_i, \text{ „ } b_i : \mathbf{N}_i. \end{aligned} \quad (5)$$

Unter diesen Voraussetzungen bestimmen sich die Beiträge zu dem Integral (1) folgendermassen (Fig. 8):

- 1) Für die Querschnitte  $a_i, b_i$  sind die Werthe von  $dW$  in zwei entsprechenden Punkten zu beiden Seiten jedes Querschnittes gleich und von entgegengesetzten Vorzeichen; ferner ist an

$$a_i : V^+ - V^- = M_i, \quad b_i : V^+ - V^- = N_i;$$

folglich ist, da die positive Grenzrichtung

auf der  $+$  Seite von  $a_i$  von dem  $-$  zum  $+$  Rande von  $b_i$ ,

„ „  $+$  „ „  $b_i$  „ „  $+$  „  $-$  „ „  $a_i$

führt, der Beitrag zu (1) für

$$a_i : M_i \int_{a_i}^+ dW = M_i N_i, \quad b_i : N_i \int_{b_i}^+ dW = - N_i M_i,$$

wo  $\int_{a_i}^+$  andeutet, dass das Integral nur noch längs der  $+$  Seite des Querschnitts  $a_i$  im Sinne des Pfeiles zu nehmen ist. Demnach ist der Gesamtbeitrag von allen Querschnitten  $a_i, b_i$  zum Integral (1)

$$(6) \quad = \sum_{i=1}^p (M_i N_i - N_i M_i).$$

2) Für den Schnitt  $\mathfrak{L}_i$  ist  $V^+ - V^- = 0$ , also ist der Beitrag von sämtlichen Schnitten  $\mathfrak{L}_i$  zum Integral (1)  $= 0$ .

Für den Schnitt  $\mathfrak{L}_i$  ist  $V^+ - V^- = 2i\pi C_i$ , also ist der Beitrag zum Integral (1)

$$= 2i\pi C_i \int_{\mathfrak{L}_i}^+ dW = 2i\pi C_i \int_0^{x_i} dW.$$

Daher ist der Gesamtbeitrag von allen Schnitten  $\mathfrak{L}_i$  zum Integral (1)

$$(7) \quad = 2i\pi \sum_i C_i \int_0^{x_i} dW.$$

3) Für den Kreis um  $(\xi_i, \eta_i)$  erhält man nach (2) und (4), indem man in der Entwicklung von  $V \frac{dW}{dx}$  in der Umgebung von  $(\xi_i, \eta_i)$  die Glieder mit  $(x - \xi_i)^{-1}$  zusammenfasst, als Beitrag zu (1)

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} &= \int_{(\xi_i)} V \frac{dW}{dx} dx = \left[ \mathbf{C}_i V_{\xi_i} - \mathbf{D}_i \left( \frac{dV}{dx} \right)_{\xi_i} \right] \int_{(\xi_i)} (x - \xi_i)^{-1} dx \\ &= -2i\pi \left[ \mathbf{C}_i V_{\xi_i} - \mathbf{D}_i \left( \frac{dV}{dx} \right)_{\xi_i} \right]. \end{aligned} \right.$$

Für den Kreis um  $(x_i, y_i)$  findet man in ähnlicher Weise als Beitrag zu (1)<sup>1)</sup>

$$(9) \quad \int_{(x_i)} V \frac{dW}{dx} dx = \left( \frac{dW}{dx} \right)_{x_i} D_i \int_{(x_i)} (x - x_i)^{-1} dx = -2i\pi D_i \left( \frac{dW}{dx} \right)_{x_i}.$$

1) Da  $\int_{(x_i)} \log(x - x_i) dx$  und eben jedes  $\int_{(x_i)} (x - x_i)^k \log(x - x_i) dx = 0$  ist, wenn  $k > 0$ , wie sich durch theilweise Integration ergibt.

Fasst man die Beiträge (6) bis (9) zusammen, so erhält man aus (1) die gesuchte fundamentale Gleichung:

$$\left. \begin{aligned} \sum_i \left[ C_i \int_0^{x_i} dW - D_i \left( \frac{dW}{dx} \right)_{x_i} \right] - \sum_\lambda \left[ \mathfrak{C}_\lambda \int_0^{\xi_\lambda} dV - \mathfrak{D}_\lambda \left( \frac{dV}{dx} \right)_{\xi_\lambda} \right] \\ + \frac{1}{2i\pi} \sum_{i=1}^p (M_i N_i - N_i M_i) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Die Lage des Punktes  $O$  ist von keinem Einfluss, da  $\sum C_i = 0$  und  $\sum \mathfrak{C}_\lambda = 0$  ist.

Wir heben nachträglich die bei der Herleitung der Gleichung (10) gemachten, vereinfachenden Voraussetzungen auf. Zunächst war angenommen, dass die Integrationswege  $Ox_i$  und  $O\xi_\lambda$  in  $T$  weder einander noch die Querschnitte  $a_i, b_i$  schneiden. Lässt man diese Beschränkung fallen, also die Wege  $Ox_i$  und  $O\xi_\lambda$  ganz beliebig in  $T$  verlaufen, so ist jedes der Integrale  $\int dW$  und  $\int dV$ , so oft der Weg  $Ox_i$  oder  $O\xi_\lambda$  einen der Schnitte  $a_i, b_i, \mathfrak{A}_i, \mathfrak{A}_\lambda$  von der  $+$  zur  $-$  Seite überschreitet, um den zugehörigen Periodicitätsmodul zu vermehren. Die linke Seite in (10) ist daher bei allgemeinen Integrationswegen in  $T$  um eine Summe von ganzzahligen Vielfachen von sämtlichen Periodicitätsmoduln der Integrale  $C_i \int dW$  und  $\mathfrak{C}_\lambda \int dV$  zu vermehren, d. h. um einen Ausdruck der folgenden Form

$$+ \sum_i \sum_i C_i (m_{ii} M_i + n_{ii} N_i) - \sum_\lambda \sum_i \mathfrak{C}_\lambda (\mu_{\lambda i} M_i + \nu_{\lambda i} N_i), \quad (10a)$$

wo die  $m, n, \mu, \nu$  ganze Zahlen sind, die von den gewählten Integrationswegen abhängen. Dieselbe Bemerkung gilt für die späteren aus (10) abgeleiteten, speziellen Gleichungen.

Ferner war vorausgesetzt, dass in den Entwicklungen (2) die algebraisch unendlichen Glieder nur von der ersten Ordnung seien. Nimmt man in den Entwicklungen (2) noch Glieder auf, die in höherer Ordnung  $\infty$  sind, so treten in (10) noch Aggregate mit höheren Ableitungen von  $V$  und  $W$  hinzu, wie sich ergibt, wenn man die Entwicklungen auch in (4) fortsetzt. Es wurde endlich angenommen, dass die Unstetigkeitspunkte  $(x_i, y_i)$  und  $(\xi_\lambda, \eta_\lambda)$  der Integrale  $V$  und  $W$  weder in Verzweigungspunkte noch ins Unendliche von  $T$  fallen. Um ganz allgemein zu verfahren, seien  $s_i$  und  $\sigma_\lambda$  zwei Größen, die bez. in  $(x_i, y_i)$  und  $(\xi_\lambda, \eta_\lambda)$  unendlich klein von der ersten Ordnung sind, so dass

$$(10b) \quad \begin{cases} s_l = x - x_l, & \text{oder } (x - x_l)^{\frac{1}{\mu_l}}, & \text{oder } x^{-1}, \\ \sigma_\lambda = x - \xi_\lambda, & \text{,, } (x - \xi_\lambda)^{\frac{1}{\nu_\lambda}}, & \text{,, } x^{-1}, \end{cases}$$

je nachdem  $(x_l, y_l)$  und  $(\xi_\lambda, \eta_\lambda)$  im ersten Falle einfache Punkte, im zweiten Falle Verzweigungspunkte der Ordnung  $\mu_l$  und  $\nu_\lambda$  sind, im dritten Falle zu den  $n$  Punkten  $(x = \infty, y = \infty)$  gehören. Ferner sei in der Umgebung von

$$(x_l, y_l) \quad V = C_l \log s_l + D_l s_l^{-1} + \mathfrak{P}_l(s_l),$$

$$(\xi_\lambda, \eta_\lambda) \quad W = \mathfrak{C}_\lambda \log \sigma_\lambda + \mathbf{D}_\lambda \sigma_\lambda^{-1} + \mathbf{P}_\lambda(\sigma_\lambda),$$

wobei wieder 
$$\sum C_l = 0, \quad \sum \mathfrak{C}_\lambda = 0,$$

und es sei in der Umgebung von

$$(x_l, y_l) \quad W = W_{x_l} + T_l s_l + \dots$$

$$(\xi_\lambda, \eta_\lambda) \quad V = V_{\xi_\lambda} + \mathbf{T}_\lambda \sigma_\lambda + \dots$$

Die Grössen  $T_l$  und  $\mathbf{T}_\lambda$  sind nur für  $s_l = x - x_l$  und  $\sigma_\lambda = x - \xi_\lambda$  bez. gleich  $\left(\frac{dW}{dx}\right)_{x_l}$  und  $\left(\frac{dV}{dx}\right)_{\xi_\lambda}$ ; für die anderen Fälle hat man die Substitution (10b) zu machen und die Entwicklung auszuführen. Wiederholt man die Berechnung der Beiträge zum Integral (1), so zeigt sich, dass in (8) und (9) und folglich auch in (10) an Stelle von  $\left(\frac{dW}{dx}\right)_{x_l}$  und  $\left(\frac{dV}{dx}\right)_{\xi_\lambda}$  die Grössen  $T_l$  und  $\mathbf{T}_\lambda$  treten, während alles andere ungeändert bleibt.

Wir leiten zunächst aus der allgemeinen Formel (10) einige specielle Sätze ab, die sich auf die Periodicitätsmoduln der drei Gattungen von Abel'schen Integralen beziehen, nämlich der Normalintegrale 1. Gattung  $u_k$  ( $k = 1, \dots, p$ ), des Normalintegrals 2. Gattung  $t_{x_1}$  mit dem algebraischen Unstetigkeitspunkt  $(x_1, y_1)$  und des Normalintegrals 3. Gattung  $w_{x_1 x_2}$  mit den logarithmischen Unstetigkeitspunkten  $(x_1, y_1)$  und  $(x_2, y_2)$ .

Es sei  $W = u_k$ , also

$$\mathfrak{C}_\lambda = 0, \quad \mathbf{D}_\lambda = 0, \quad \mathbf{M}_i = 0, \quad \mathbf{M}_k = \pi i, \quad \mathbf{N}_i = a_{ik} \quad (i, k = 1, \dots, p).$$

Dann folgt aus (10)

$$(11) \quad \sum_l \left[ C_l \int_0^{x_l} du_k - D_l \left( \frac{du_k}{dx} \right)_{x_l} \right] = \frac{1}{2i\pi} \left( \pi i N_k - \sum_i M_i a_{ik} \right).$$

Setzt man in (11) der Reihe nach

$$\left. \begin{aligned} V=u_l & \quad \text{also} \quad C_l=0, \quad D_l=0, \quad M_l=0, \quad M_l=\pi i, \quad N_l=a_{il} \\ V=t_{x_1} & \quad ,, \quad C_1=0, \quad D_1=1, \quad M_l=0, \\ V=w_{x_1 x_2} & \quad ,, \quad C_1=-1, \quad C_2=+1, \quad D_1=D_2=0, \quad M_l=0, \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

so erhält man die Gleichungen ( $k, l = 1, \dots, p$ ):

$$a_{kl} = a_{lk}, \quad (13)$$

$$N_k = -2 \left( \frac{du_k}{dx} \right)_{x_1}, \quad (14)$$

$$N_k = 2 \left[ \int_0^{x_2} du_k - \int_0^{x_1} du_k \right] = 2 \int_{x_1}^{x_2} du_k. \quad (15)$$

Die Gleichungen (14) ergeben sich auch aus (15) durch den Differentiationsprocess, der das Normalintegral 3. Gattung in das Normalintegral 2. Gattung überführt (Satz V § 16).

Die Gleichungen (13) bis (15) enthalten den Beweis der schon in § 15 Gl. (17) und § 16 Gl. (8 und 14) benutzten Sätze, nämlich:

- (I) Der Periodicitätsmodul des Normalintegrals 1. Gattung  $u_l$  an dem Querschnitte  $b_k$  ist gleich dem Periodicitätsmodul des Normalintegrals 1. Gattung  $u_k$  an dem Querschnitte  $b_l$ .
- (II) Die Periodicitätsmoduln des Normalintegrals 2. Gattung  $t_{x_1}$  an den Querschnitten  $b_k$  sind die mit  $-2$  multiplicirten Ableitungen der  $p$  Normalintegrale 1. Gattung  $u_k$  nach  $x$ , gebildet für den Unstetigkeitspunkt  $x_1$ .
- (III) Die Periodicitätsmoduln des Normalintegrals 3. Gattung  $w_{x_1 x_2}$  an den Querschnitten  $b_k$  sind gleich den mit 2 multiplicirten, zwischen den Unstetigkeitspunkten  $x_1$  und  $x_2$  genommenen Normalintegralen 1. Gattung  $u_k$ , wenn der Integrationsweg zwischen  $x_1$  und  $x_2$  die Querschnitte  $a_i, b_i$  nicht schneidet.

Die Gleichungen (13) beziehen sich auf das System der  $p$  Normalintegrale 1. Gattung  $u_1, \dots, u_p$  und die zugehörigen Periodicitätsmoduln. Betrachtet man statt dessen ein beliebiges System von  $p$  linear unabhängigen Integralen 1. Gattung  $v_1, \dots, v_p$ , deren Periodicitätsmoduln an den Querschnitten  $a_i, b_i$  durch das Schema (7) § 15 gegeben sind, so hat man in (10) zu setzen

$$V = v_k, \quad W = v_l; \quad M_i = A_{ik}, \quad N_i = B_{ik}, \quad M_i = A_{il}, \quad N_i = B_{il}$$

und erhält daher zwischen den Periodicitätsmoduln der Integrale  $v_1, \dots, v_p$  die Relationen  $(k, l = 1, \dots, p)$ :

$$(16) \quad \sum_{i=1}^p (A_{ik} B_{il} - A_{il} B_{ik}) = 0$$

und damit den Beweis der Gleichungen (9a) § 15.

In ähnlicher Weise wie die Sätze über Periodicitätsmoduln ergeben sich gewisse Vertauschungssätze für die Abel'schen Integrale. Setzt man in der Gleichung (10) der Reihe nach

$$(V = t_{x_1}, W = t_{x_2}), (V = t_{x_0}, W = w_{x_1 x_2}), (V = w_{x_1 x_2}, W = w_{\xi_1 \xi_2}),$$

so erhält man die folgenden Gleichungen

$$(17) \quad \left( \frac{dt_{x_1}}{dx} \right)_{x_2} = \left( \frac{dt_{x_2}}{dx} \right)_{x_1},$$

$$(18) \quad \int_{x_1}^{x_2} dt_{x_0} = - \left( \frac{dw_{x_1 x_2}}{dx} \right)_{x_0},$$

$$(19) \quad \int_{x_1}^{x_2} dw_{\xi_1 \xi_2} = \int_{\xi_1}^{\xi_2} dw_{x_1 x_2}.$$

Auch hier lässt sich wieder (17) aus (18) und (18) aus (19) ableiten durch den Differentiationsprocess, der das Normalintegral 3. Gattung in das Normalintegral 2. Gattung überführt. Die Gleichungen (17) bis (19) geben die Sätze:

(IV) In der Ableitung des Normalintegrals 2. Gattung mit dem Unstetigkeitspunkt  $x_1$  nach  $x$ , gebildet für den Punkt  $x_2$ , kann man  $x_1$  mit  $x_2$  vertauschen. (Vertauschungssatz der Normaldifferentiale 2. Gattung.)

(V) Das Normalintegral 2. Gattung  $t_{x_0}$ , genommen zwischen den Grenzen  $x_1$  und  $x_2$ , drückt sich algebraisch aus durch die Ableitung des Normalintegrals 3. Gattung  $w_{x_1 x_2}$  nach  $x$ , gebildet für  $x_0$ .

(VI) In dem Normalintegral 3. Gattung  $w_{x_1 x_2}$ , genommen zwischen den Grenzen  $\xi_1$  und  $\xi_2$ , kann man die Unstetigkeitspunkte  $x_1, x_2$  mit den Integrationsgrenzen  $\xi_1, \xi_2$  vertauschen. (Vertauschungssatz der Normalintegrale 3. Gattung.)

Man nennt in einem Integral 3. Gattung die Coordinaten der



Unstetigkeitspunkte die Parameter und die Coordinaten der Grenzpunkte die Argumente und bezeichnet demgemäss den Satz (VI) als den Vertauschungssatz von Parameter und Argument.

### § 19. Das Abel'sche Theorem<sup>1)</sup>.

Man erhält weiter eine Reihe wichtiger Relationen, die in ihrer Gesamtheit das Abel'sche Theorem vorstellen, indem man, wie vorher zwei Abel'sche Integrale, so jetzt ein Abel'sches Integral mit einer rationalen Function oder mit dem Logarithmus einer solchen Function combinirt.

Es sei  $R(x, y)$  eine beliebige, rationale Function von der Ordnung  $m$  mit den  $m \infty^1$  Punkten  $(b_1, y_{b_1}), \dots, (b_m, y_{b_m})$  oder kurz  $b_1, \dots, b_m$  und den  $m \text{ O}^1$  Punkten  $(a_1, y_{a_1}), \dots, (a_m, y_{a_m})$  oder kurz  $a_1, \dots, a_m$ , die sämmtlich einfache Punkte im Endlichen von  $T$  seien. Es verhalte sich in

$$\left. \begin{array}{l} b_i: R \text{ wie } B_i(x - b_i)^{-1}, \text{ also } \log R \text{ wie } -\log(x - b_i) \\ a_i: R \text{ „ } A_i(x - a_i)^{+1}, \text{ „ } \log R \text{ „ } +\log(x - a_i). \end{array} \right\} \quad (1)$$

Für eine zweite rationale Function  $P(x, y)$  sollen  $\alpha_i, \beta_i, A_i, B_i$  dieselbe Bedeutung haben wie  $a_i, b_i, A_i, B_i$  für  $R(x, y)$ .

Setzt man in (10) § 18 zuerst  $V = 1$ ,  $W = \log P$ , so erhält man den Satz, dass für jede rationale Function  $P(x, y)$  die Zahl der  $\infty^1$  Punkte und der  $\text{O}^1$  Punkte dieselbe ist (vgl. § 7 Satz II und § 14 Satz V); setzt man  $V = 1$ , während  $W$  ein allgemeines Abel'sches Integral bleibt, so erhält man die Gleichung  $\sum \mathbf{C}_i = 0$ , d. h. den Satz, dass für jedes Abel'sche Integral die Summe der Coefficienten der logarithmischen Glieder verschwindet (vgl. § 14 Satz III).

Man setze nunmehr

$$V = R, \text{ also } C_i = 0, D_i = B_i, M_i = 0, N_i = 0;$$

dann geht (10) § 18 über in

$$\sum_i B_i \left( \frac{dW}{dx} \right)_{b_i} + \sum_\lambda \left[ \mathbf{C}_\lambda(R)_{\xi_\lambda} - \mathbf{D}_\lambda \left( \frac{dR}{dx} \right)_{\xi_\lambda} \right] = 0. \quad (2)$$

Diese Gleichung enthält das Abel'sche Theorem für das allgemeine Abel'sche Differential  $dW$ ; wir geben demselben am Schluss dieses § eine bestimmte Fassung (Satz VI).

1) Abel, Oeuvres complètes I. S. 145 (1826) und S. 515 (1829). Riemann, Ges. W. S. 116 ff. Clebsch-Gordan, Abel'sche Functionen S. 44 u. 127 (1866).

Nimmt man in (2) für  $W$  der Reihe nach die Functionen

$$P, \quad \log P, \quad u_k, \quad t_{x_1}, \quad w_{x_1 x_2},$$

so folgen die Gleichungen

$$(3) \quad \sum_l B_l \left( \frac{dP}{dx} \right)_{b_l} = \sum_\lambda B_\lambda \left( \frac{dR}{dx} \right)_{\gamma_\lambda},$$

$$(4) \quad \sum_l B_l \left( \frac{d \log P}{dx} \right)_{b_l} = \sum_\lambda (R_{\gamma_\lambda} - R_{\alpha_\lambda}),$$

$$(5) \quad \sum_l B_l \left( \frac{du_k}{dx} \right)_{b_l} = 0 \quad (k = 1, \dots, p),$$

$$(6) \quad \sum_l B_l \left( \frac{dt_{x_1}}{dx} \right)_{b_l} = \left( \frac{dR}{dx} \right)_{x_1},$$

$$(7) \quad \sum_l B_l \left( \frac{dw_{x_1 x_2}}{dx} \right)_{b_l} = R_{x_1} - R_{x_2}.$$

Die dritte dieser Formeln gibt den früher auf anderem Wege hergeleiteten Satz (vgl. (7) § 17 und (11) § 13):

Zwischen den  $m \infty^1$  Punkten  $b_l$  und den zugehörigen  $m$  Residuen  $B_l$  einer rationalen Function  $R(x, y)$  von der Ordnung  $m$  bestehen die  $p$  Gleichungen (5).

Man setze ferner in (10) § 18

$$V = \log R, \text{ also } C_l = -1 \text{ für } x_l = b_l \text{ und } C_l = +1 \text{ für } x_l = a_l,$$

$$\text{und} \quad D_l = 0 \text{ für alle } x_l, \quad M_i = m_i 2i\pi, \quad N_i = n_i 2i\pi,$$

wo  $m_i, n_i$  bestimmte ganze Zahlen sind (vgl. 17). Dann folgt aus (10) § 18

$$(8) \quad \sum_l \int_{a_l}^{b_l} dW + \sum_\lambda \mathbf{C}_\lambda (\log R)_{\xi_\lambda} - \sum_\lambda \mathbf{D}_\lambda \left( \frac{d \log R}{dx} \right)_{\xi_\lambda} = 0.$$

Auf der linken Seite wäre noch der Ausdruck

$$(8a) \quad - \sum_i (m_i N_i - n_i M_i)$$

hinzuzufügen. Man kann denselben, da er eine allgemeine Periode des Integrals  $W$  darstellt, weglassen, wenn man die Integrationswege von  $\int dW$  zwischen den Punkten  $a_l$  und  $b_l$  passend wählt, wie im Folgenden vorausgesetzt sein soll.

Die Gleichung (8) enthält das Abel'sche Theorem für das allgemeine Abel'sche Integral  $W$ , nämlich:

- (I) Die Summe der Werthe eines allgemeinen Abel'schen Integrals  $W$ , genommen zwischen zwei Systemen von Punkten  $b_i$  und  $a_i$ , in welchen eine rationale Function  $R(x, y)$  die Werthe  $\infty^1$  und  $0^1$  annimmt, ist eine rational-logarithmische Function der Coordinaten der Unstetigkeitspunkte von  $W$  und der Coefficienten von  $R$ .

Nimmt man in (8) für  $W$  der Reihe nach die Functionen

$$\log P, \quad u_k, \quad t_{x_1}, \quad w_{x_1 x_2},$$

so erhält man, unter  $\Pi$  ein Productzeichen verstanden,

$$\prod_i (P)_{b_i} : \prod_i (P)_{a_i} = \prod_{\lambda} (R)_{\beta_{\lambda}} : \prod_{\lambda} (R)_{\alpha_{\lambda}}, \quad (9)$$

$$\sum_i \int_{a_i}^{b_i} du_k = 0 \quad (k = 1, \dots, p), \quad (10)$$

$$\sum_i \int_{a_i}^{b_i} dt_{x_1} = \left( \frac{d \log R}{dx} \right)_{x_1}, \quad (11)$$

$$\sum_i \int_{a_i}^{b_i} dw_{x_1 x_2} = (\log R)_{x_1} - (\log R)_{x_2}. \quad (12)$$

Die Gleichungen (9) bis (12) enthalten die Sätze:

- (II) Der Quotient der Producte, gebildet aus den Werthen einer rationalen Function  $R$  für die  $0^1$  und  $\infty^1$  Punkte einer andern rationalen Function  $P$ , ist gleich dem Quotienten der Producte aus den Werthen von  $P$  für die  $0^1$  und  $\infty^1$  Punkte von  $R$ .
- (III) Für jedes Normalintegral 1. Gattung  $u_k$  ist die Summe der Integrale, genommen zwischen zwei Punktsystemen, in welchen eine rationale Function  $R$  die Werthe  $0^1$  und  $\infty^1$  annimmt, gleich 0.
- (IV) Für jedes Normalintegral 2. Gattung  $t_{x_1}$  ist die Summe der Integrale, genommen zwischen zwei Punktsystemen, in welchen eine rationale Function  $R$  die Werthe  $0^1$  und  $\infty^1$  annimmt, gleich einer rationalen Function der Coordinaten des Unstetigkeitspunktes  $x_1$ .
- (V) Für jedes Normalintegral 3. Gattung  $w_{x_1 x_2}$  ist die Summe der Integrale, genommen zwischen zwei Punktsystemen,

in welchen eine rationale Function  $R$  die Werthe  $0^1$  und  $\infty^1$  annimmt, gleich dem Logarithmus einer rationalen Function der Coordinaten der Unstetigkeitspunkte  $x_1$  und  $x_2$ .

Die Sätze III bis V gelten nach (10) nicht bloß für die Normalintegrale, sondern auch für die allgemeinen Integrale der 1., 2., 3. Gattung; sie bilden das Abel'sche Theorem für die Integrale der drei Gattungen.

Die Gleichungen (7) und (12) lassen sich in folgender Weise umformen. Nach dem Vertauschungssatz der Integrale 3. Gattung (19) § 18 ist

$$\left(\frac{dw_{x_1x_2}}{dx}\right)_{b_l} = \frac{d}{db_l} \int_{a_l}^{b_l} dw_{x_1x_2} = \frac{d}{db_l} \int_{x_2}^{x_1} dw_{b_la_l} = \int_{x_2}^{x_1} dt_{b_l}.$$

Die Gleichung (7) geht daher, wenn man noch  $x$  für  $x_1$  und  $x_0$  für  $x_2$ , ferner  $R$  und  $R_0$  für  $(R)_x$  und  $(R)_{x_0}$  schreibt, über in

$$(13) \quad R - R_0 = \sum_l B_l \int_{x_0}^x dt_{b_l}^1).$$

Ebenso geht (12), wenn man den Vertauschungssatz der Integrale 3. Gattung anwendet, über in

$$(14) \quad \log R - \log R_0 = \sum_l \int_{x_0}^x dw_{b_la_l}.$$

Die Gleichungen (13) und (14) sind nichts anderes, als die früher gefundenen Gleichungen (6) und (9) § 17. Sie enthalten die Darstellung einer rationalen Function durch Integrale 2. Gattung und des Logarithmus einer solchen Function durch Integrale 3. Gattung. Der Unterschied in der Form der Gleichung (14) von der früheren Gleichung (9) § 17, wo noch ein allgemeiner Periodicitätsmodul des Integrals 3. Gattung auftritt, erklärt sich daraus, dass hier die Integrationswege speciell, früher allgemein genommen waren.

Von Interesse ist noch folgende Bemerkung. Zwischen der algebraischen Gleichung (2) und der transcendenten Gleichung (8), die durch die Substitutionen  $V = R$  und  $V = \log R$  aus (10) § 18 gewonnen wurden (und ebenso zwischen den aus (2) und (8) durch Specialisirung abgeleiteten Gleichungen) besteht ein enger Zusammen-

1) Riemann, Ges. W. S. 100.

hang. Beide Gleichungen sagen dasselbe aus und lassen sich eine aus der andern ableiten. Führt man nämlich statt  $R$  eine Function  $r$  ein durch die Substitution

$$R = \frac{r-a}{r-b}, \quad (15)$$

so dass  $r$  in den  $m$  Punkten  $a_i$  und  $b_i$  bez. die Werthe  $a$  und  $b$  annimmt, so geht (8) über in

$$\sum_i \int_{a_i}^{b_i} dW + \sum_{\lambda} \mathbf{C}_{\lambda} \left( \log \frac{r-a}{r-b} \right)_{\xi_{\lambda}} - \sum_{\lambda} \mathbf{D}_{\lambda} \left( \frac{d \log r-a}{dx r-b} \right)_{\xi_{\lambda}} = 0. \quad (16)$$

Differenzirt man nach  $b$  und berücksichtigt, dass nach (1) und (15)

$$\frac{db_i}{db} = \lim_{x=b_i} \frac{x-b_i}{r-b} = \left( \frac{dx}{dr} \right)_{b_i} = \left( \frac{dR}{dr} : \frac{dR}{dx} \right)_{b_i} = \frac{B_i}{b-a}, \quad (17)$$

so folgt:

$$\frac{1}{b-a} \sum_i B_i \left( \frac{dW}{dx} \right)_{b_i} + \sum_{\lambda} \mathbf{C}_{\lambda} \left( \frac{1}{r-b} \right)_{\xi_{\lambda}} - \sum_{\lambda} \mathbf{D}_{\lambda} \left( \frac{d}{dx} \frac{1}{r-b} \right)_{\xi_{\lambda}} = 0. \quad (18)$$

Dies ist aber nichts anderes als die Gleichung (2), gebildet für die Function  $\frac{1}{r-b}$  statt\* für die Function  $R$ . Denn das Residuum dieser Function  $(r-b)^{-1}$  für den Punkt  $b_i$  ist grade der Werth (17).

Die Gleichung (18) lässt sich auf die Form bringen

$$\sum_i \left( \frac{dW}{dx} \frac{dx}{dr} \right)_{b_i} = \sum_{\lambda} \mathbf{C}_{\lambda} (b - r_{\lambda})^{-1} - \sum_{\lambda} \mathbf{D}_{\lambda} \left( \frac{dr}{dx} \right)_{\xi_{\lambda}} (b - r_{\lambda})^{-2}, \quad (19)$$

wo  $r_{\lambda}$  den Werth von  $r$  für  $(\xi_{\lambda}, \eta_{\lambda})$  bezeichnet. Sie stellt, wie schon bei (2) bemerkt wurde, das Abel'sche Theorem für das allgemeine Abel'sche Differential dar.

Es ist leicht, die Gleichung (19) direct herzuleiten, in derselben Weise, wie dies speciell für das Differential 1. Gattung (Gl. 7 § 13) geschah. In der That, da das Integral  $W$  nur in einfachen Punkten im Endlichen von  $T \infty$  wird, so ist  $\frac{dW}{dx}$  nach Gleichung (2a) § 17 von der Form  $Q\Phi : F'y$ , wo  $\Phi$  eine adjungirte Function von  $F' = 0$  des  $n-3^{\text{ten}}$  Grades und  $Q$  eine rationale, gebrochene Function von gleichem Grade im Zähler und Nenner ist, die  $\infty$  wird in den Punkten  $(\xi_{\lambda}, \eta_{\lambda})$  und zwar nach (2) § 18 so, dass in der Umgebung von  $(\xi_{\lambda}, \eta_{\lambda})$ :

$$\frac{dW}{dx} = \frac{Q\Phi}{F'y} = \mathbf{C}_{\lambda} (x - \xi_{\lambda})^{-1} - \mathbf{D}_{\lambda} (x - \xi_{\lambda})^{-2} + \mathbf{P}'_{\lambda} (x - \xi_{\lambda}). \quad (19a)$$

Man bilde nun, indem man die Function  $R(x, y) = \varrho$  setzt, wie in (5) § 13 den Ausdruck

$$(20) \quad \frac{Q \Phi}{F' y} \cdot \frac{dx}{d\varrho}$$

und führe in denselben  $\varrho$  als unabhängige Variable ein. Bezeichnet man die  $m$  Punkte, für die  $R(x, y)$  einen bestimmten Werth  $\varrho$  annimmt, mit  $(x_l, y_l)$  ( $l = 1, \dots, m$ ), so ist die Summe

$$(21) \quad \sum_{l=1}^m \left( \frac{Q \Phi}{F' y} \cdot \frac{dx}{d\varrho} \right)_{x_l}$$

nach den früheren Darlegungen (§ 13) eine eindeutige Function von  $\varrho$ , da sie in jedem Punkt der  $\varrho$ -Ebene nur einen Werth annimmt, und sie ist weiter eine rationale Function von  $\varrho$ , da sie nur für eine endliche Zahl von Werthen  $\varrho$  und für jeden nur in endlicher Ordnung  $\infty$  wird. Um den Ausdruck (21) als Function von  $\varrho$  darzustellen, hat man für jeden seiner  $\infty$  Punkte die Art des  $\infty$  Werdens zu untersuchen. Hierbei kommen in Betracht:

- 1) die Punkte  $(\xi_\lambda, \eta_\lambda)$ , für die  $Q \infty$  wird und für die  $\varrho = \varrho_\lambda$  sei,
- 2) die Punkte  $(b_l, y_{b_l})$ , für die  $\varrho = \infty$  wird,
- 3) die Verzweigungspunkte und Doppelpunkte in der Fläche  $T$  und die Punkte  $(x = \infty, y = \infty)$ .

Nimmt  $\varrho$  einen solchen Werth an, dass einer der  $m$  Punkte  $(x_l, y_l)$  mit dem Punkte  $(\xi_\lambda, \eta_\lambda)$  zusammenfällt, so wird das entsprechende Glied in (21)  $= \infty^2$ ; es ist nämlich für

$$(x, y) = (\xi_\lambda, \eta_\lambda): \varrho - \varrho_\lambda = (x - \xi_\lambda) \left( \frac{d\varrho}{dx} \right)_{\xi_\lambda},$$

folglich ist nach (19a)

$$\left( \frac{Q \Phi}{F' y} \frac{dx}{d\varrho} \right)_{\xi_\lambda} = \mathbf{C}_\lambda (\varrho - \varrho_\lambda)^{-1} - \mathbf{D}_\lambda \left( \frac{d\varrho}{dx} \right)_{\xi_\lambda} (\varrho - \varrho_\lambda)^{-2}.$$

Wird  $\varrho = \infty^1$ , so wird jedes Glied in (21) also auch (21) selber  $= 0^2$ .

Denn für einen zu  $\varrho = \infty$  gehörigen Punkt  $(b_l, y_{b_l})$  verhält sich

$$\varrho \text{ wie } (x - b_l)^{-1}, \quad \frac{d\varrho}{dx} \text{ wie } (x - b_l)^{-2}$$

und folglich der Ausdruck (21) wie  $(x - b_l)^{+2}$ .

Für die Verzweigungspunkte, die Doppelpunkte und die Punkte  $(x = \infty, y = \infty)$  gilt nach unseren Voraussetzungen dasselbe, wie in dem Falle der Differentiale 1. Gattung, d. h. der Ausdruck (21) nimmt in diesen Punkten einen endlichen, von 0 verschiedenen Werth an.

Fasst man dies zusammen, so erhält man für die Summe (21) als Function von  $q$  folgende Darstellung durch Partialbrüche

$$\sum_i \left( \frac{Q \Phi}{F' y} \frac{dx}{dq} \right)_{x_i} = \sum_{\lambda} \mathbf{C}_{\lambda} (q - q_{\lambda})^{-1} - \sum_{\lambda} \mathbf{D}_{\lambda} \left( \frac{dq}{dx} \right)_{\xi_{\lambda}} (q - q_{\lambda})^{-2}. \quad (22)$$

Denn beide Seiten dieser Gleichung werden als Function von  $q$  in derselben Weise  $\infty$ ; ihre Differenz ist also eine Constante und diese Constante ist 0, da für  $q = \infty$ , d. h. für  $(x_i, y_i) = (b_i, y_{b_i})$  beide Seiten in (22) verschwinden.

Hiermit ist die Gleichung (19) direct hergeleitet; denn (22) unterscheidet sich von (19) nur durch die Schreibweise.

Bringt man in (22) den allen Gliedern der linken Seite im Nenner gemeinsamen Factor  $dq$  auf die rechte Seite und führt  $W$  ein, so erhält man

$$\sum_i (dW)_{x_i} = \sum_{\lambda} \left[ \mathbf{C}_{\lambda} (q - q_{\lambda})^{-1} - \mathbf{D}_{\lambda} \left( \frac{dq}{dx} \right)_{\xi_{\lambda}} (q - q_{\lambda})^{-2} \right] dq, \quad (23)$$

(VI) d. h.: Wenn eine rationale Function  $R(x, y)$  von der angegebenen Art denselben Werth  $q$  annimmt in den  $m$  Punkten  $(x_i, y_i)$  ( $i = 1, \dots, m$ ), so ist die Summe der oben definirten Abel'schen Differentiale  $dW$ , gebildet für diese  $m$  Punkte, gleich dem Differential einer Function von  $q$  von der Form (23). (Abel'sches Theorem für das allgemeine Differential.)

Die Integration von (23) nach  $q$  zwischen zwei Werthen von  $q$  und den zugehörigen Werthsystemen  $(x_i, y_i)$  führt, wie leicht zu sehen, zurück zur Gleichung (16), d. h. zum Abel'schen Theorem für das allgemeine Abel'sche Integral.

## § 20. Das Abel'sche Theorem für Integrale 1. Gattung und seine Umkehrung.<sup>1)</sup>

Das Abel'sche Theorem für Integrale 1. Gattung soll seiner Wichtigkeit halber noch eingehender besprochen werden. Dasselbe war enthalten in den Gleichungen (10) § 19 ( $i = 1, \dots, m$ ):

$$\sum_i \int_{a_i}^{b_i} du_1 = 0, \dots, \sum_i \int_{a_i}^{b_i} du_p = 0, \quad (1)$$

1) Litteratur s. § 19.

- (I) d. h.: Für jedes Integral 1. Gattung ist die Summe der  $m$  Integrale, genommen zwischen zwei Punktsystemen  $a_i$  und  $b_i$ , in welchen eine rationale Function  $R(x, y)$  der Ordnung  $m$  die Werthe  $0^1$  und  $\infty^1$  oder eine rationale Function  $r(x, y)$  die Werthe  $a$  und  $b$  annimmt, gleich 0.

Hierbei ist vorausgesetzt, dass die Integrationswege zwischen den Punkten  $a_i$  und  $b_i$  die Querschnitte  $a_i, b_i$  ( $i = 1, \dots, p$ ) nicht schneiden<sup>1)</sup>.

Wählt man statt der  $m$  Anfangswerthe  $b_i$ , die einem bestimmten Werthe  $b$  von  $r$  entsprechen, ganz beliebige  $m$  Anfangswerthe  $b_i^0$ , so nehmen die Gleichungen (1) die Form an

$$(2) \quad \sum_i \int_{b_i^0}^{b_i} du_1 = c_1, \dots, \sum_i \int_{b_i^0}^{b_i} du_p = c_p,$$

wo  $c_1, \dots, c_p$  Constanten sind, die nur von den unteren Grenzen der Integrale abhängen. Die Gleichung (2) lautet in Worten:

- (II) Für jedes Integral 1. Gattung ist die Summe der Integrale, erstreckt von beliebigen festen Anfangspunkten  $b_i^0$  bis zu einem System von Punkten  $b_i$ , in welchen eine rationale Function  $r(x, y)$  einen bestimmten Werth  $b$  annimmt, constant, d. h. unabhängig von diesem Werth  $b$ .

Setzt man  $r(x, y)$  in die Form  $r_1(x, y) : r_2(x, y)$ , so sind die Punkte  $b_i$  diejenigen Punkte in  $T$ , für welche  $r_1(x, y) - br_2(x, y) = 0$  ist, mit Ausschluss der Punkte, für welche gleichzeitig  $r_1(x, y) = 0$  und  $r_2(x, y) = 0$  ist. Da nun die Constanten  $c_k$  in (2) unabhängig von  $b$  sind, da ferner  $b$  ein beliebiger Coefficient in der Gleichung  $r_1 - br_2 = 0$  ist und dasselbe für jeden Coefficienten dieser Gleichung gelten muss, so folgt als dritte Form des Abel'schen Theorems:

- (III) Für jedes Integral 1. Gattung ist die Summe der Integrale, erstreckt von beliebigen, festen Punkten bis zu solchen Punkten von  $T$ , in denen eine beliebige rationale Function von  $(x, y)$  verschwindet, constant, d. h. unabhängig von den Coefficienten dieser rationalen Function.

Deutet man die Gleichung  $F(x, y) = 0$  als Curve vom Grade  $n$  und vom Geschlecht  $p$ , so lassen sich die Sätze (I) und (III) geometrisch so aussprechen:

1) Es ist wohl nicht zu befürchten, dass die vorübergehende Bezeichnung von Punkten einerseits und Querschnitten andererseits durch dieselben Buchstaben  $a, b$  zu Verwechslungen führen könne.



(Ia) Für jedes Integral 1. Gattung ist die Summe der Integrale, genommen zwischen zwei Punktsystemen  $a_i$  und  $b_i$ , in welchen zwei algebraische Curven desselben Grades die Curve  $F(x, y) = 0$  schneiden, gleich 0.

(IIIa) Für jedes Integral 1. Gattung ist die Summe der Integrale, erstreckt von beliebigen Anfangspunkten bis zu einem System von Punkten, in welchen eine algebraische Curve  $U$  die Curve  $F(x, y) = 0$  schneidet, constant, d. h. unabhängig von den Coefficienten der Curve  $C$ .

Lässt man in (1) die Voraussetzung fallen, dass die Integrationswege zwischen den Punkten  $a_i$  und  $b_i$  die Querschnitte  $a_i$ ,  $b_i$  nicht schneiden, lässt also jene Integrationswege ganz beliebig in  $T$  verlaufen, nur so, dass sie für die  $p$  Integrale  $u_k$  dieselben sind, so hat man die linken Seiten in (1) je um eine Summe von ganzzahligen Vielfachen der Periodicitätsmoduln des betreffenden Integrales  $u_k$  zu vermehren, wobei die Zahlencoefficienten für alle  $p$  Gleichungen dieselben sind. Bei allgemeinen Integrationswegen treten somit an Stelle von (1) die Gleichungen ( $k = 1, \dots, p$ ):

$$\sum_i \int_{a_i}^{b_i} du_k = \sum_i m_i a_{ik} + n_k \pi i, \quad (3)$$

wo die ganzen Zahlen  $m$  und  $n$  von den gewählten Integrationswegen abhängen. Der Ausdruck auf der rechten Seite der  $p$  Gleichungen (3) bildet ein System von gleichzeitigen oder simultanen Periodicitätsmoduln der  $p$  Normalintegrale  $u_k$ .

Die Hauptbedeutung des Abel'schen Theorems für Integrale 1. Gattung liegt nun in seiner Umkehrbarkeit, oder in dem Satze:

(IV) Sind  $2m$  Punkte  $a_i$  und  $b_i$  in  $T$  so beschaffen, dass sie den  $p$  Gleichungen (3) genügen, so existirt immer eine (und abgesehen von einem constanten Factor nur eine) rationale Function  $R(x, y)$  der Ordnung  $m$ , für welche die  $m$  Punkte  $a_i$  die  $0^1$  und die  $m$  Punkte  $b_i$  die  $\infty^1$  Punkte sind.

Zum Beweise<sup>1)</sup> bilde man den Ausdruck

$$\Omega = \sum_i \int_{x_0}^x dw_{b_i a_i} + 2 \sum_i m_i \int_{x_0}^x du_i + \Omega_0, \quad (4)$$

wo  $w_{b_i a_i}$  ein Normalintegral 3. Gattung mit den Unstetigkeitspunkten  $b_i$  und  $a_i$ , ferner  $m_i$  ( $i = 1, \dots, p$ ) ganze Zahlen und zwar dieselben

1) C. Neumann, Vorlesungen über Riemann's Theorie der Abel'schen Integrale 2. A. Leipzig 1884. S. 275.

Zahlen, wie in den Gleichungen (3) und  $\Omega_0$  eine beliebige Constante. Der Ausdruck (4) stellt ein Abel'sches Integral von besonderer Art dar; er wird nämlich nur logarithmisch  $\infty$  in den Punkten  $b_i$  und  $a_i$  und zwar bez. wie  $-\log(x - b_i)$  und  $+\log(x - a_i)$ ; er hat also an den in  $T$  von dem Punkte  $O$  nach den Punkten  $b_i$  und  $a_i$  gelegten Schnitten  $\mathfrak{L}_{b_i}$  und  $\mathfrak{L}_{a_i}$  (Fig. 8. S. 104) die Periodicitätsmoduln  $-2i\pi$  und  $+2i\pi$ . Ferner ist der Periodicitätsmodul von  $\Omega$  an dem Querschnitt  $a_k$  gleich  $m_k 2i\pi$  und von dem Querschnitt  $b_k$  nach (15) § 18

$$= 2 \sum_i \int_{b_i}^{a_i} du_k + 2 \sum_i m_i a_{ik}, \text{ d. h. wenn die Integrationswege wie in}$$

(3) gewählt werden  $= -n_k 2i\pi$ . Es sind also die sämtlichen Periodicitätsmoduln von  $\Omega$  ganzzahlige Vielfache von  $2i\pi$ . Hieraus folgt, dass  $\Omega$  der Logarithmus einer rationalen Function mit den  $\infty^1$  Punkten  $b_i$  und den  $0^1$  Punkten  $a_i$  ist. Denn die Function  $c^\Omega$  wird  $= \infty^1$  in  $b_i$  wie  $B_i(x - b_i)^{-1}$  und  $= 0^1$  in  $a_i$  wie  $A_i(x - a_i)^{+1}$ , wo  $B_i$  und  $A_i$  gewisse Constanten sind, und ist sonst in der Fläche  $T$  allenthalben stetig, da sie an den Querschnitten  $a_i$ ,  $b_i$  und den Linien  $\mathfrak{L}$  stetig bleibt. Bezeichnet man die rationale Function  $c^\Omega$  mit  $R$ , so ist  $R$  bis auf einen constanten Factor  $R_0$  bestimmt durch die Gleichung:

$$\log R - \log R_0 = \sum_i \int_{x_0}^x dW_{b_i a_i} + 2 \sum_i m_i \int_{x_0}^x du_i.$$

Hiermit ist der obige Satz bewiesen. Aus ihm ergibt sich weiter der wichtige Satz:

(V) Systeme von  $p$  Summen, gebildet aus je einem der  $p$  Integrale 1. Gattung, mit  $\mu$  beliebigen unteren und oberen Grenzpunkten, die für jedes der  $p$  Integrale die nämlichen sind, lassen sich eindeutig und algebraisch auf Systeme von  $p$  ähnlich gebildeten Summen mit  $p$  unteren und oberen Grenzpunkten, von denen die ersteren Punkte gegeben sind, zurückführen, oder es lassen sich eindeutig und algebraisch die Gleichungen erfüllen ( $k = 1, \dots, p$ ):

$$(6) \quad \sum_{\lambda=1}^{\mu} \int_{\xi_{\lambda}^0}^{\xi_{\lambda}^i} du_k \equiv \sum_{i=1}^p \int_{x_i^0}^{x_i^i} du_k$$

durch Bestimmung der  $p$  Punkte  $x_i$ , während die Punktsysteme  $\xi_{\lambda}$ ,  $\xi_{\lambda}^0$ ,  $x_i^0$  beliebig gegeben sind.

Das Congruenzzeichen  $\equiv$  bedeutet, dass, je nach den Integrations-

wegen, auf der einen oder der andern Seite in (6) noch ein Ausdruck von der Form der rechten Seite in (3) hinzutreten kann, oder dass die beiden Seiten in (6) bis auf ein simultanes System von Periodicitätsmoduln der  $p$  Normalintegrale 1. Gattung einander gleich sind.

In den Gleichungen (6) sind die Punkte  $\xi_\lambda, \xi_\lambda^0, x_i^0$  gegeben. Um die  $p$  Punkte  $x_i$  zu finden, bringe man alle Glieder in (6) auf die linke Seite. Dann existirt nach Satz IV eine rationale Function  $\mathcal{W}(x, y): X(x, y)$  von  $(x, y)$ , die in den  $\mu + p$  Punkten  $\xi_1, \dots, \xi_\mu; x_1^0, \dots, x_p^0$  gleich  $\infty^1$  und in den  $\mu + p$  Punkten  $\xi_1^0, \dots, \xi_\mu^0; x_1, \dots, x_p$  gleich  $0^1$  wird. Zur Bildung dieser Function bestimme man nach der Methode des § 12 (Fall 1) eine ganze Function  $X(x, y)$  von hinreichend hohem Grade, die  $F(x, y) = 0$  adjungirt ist und für die  $\mu + p$  Punkte  $\xi_1, \dots, \xi_\mu; x_1^0, \dots, x_p^0$  verschwindet. Die weiteren Nullpunkte dieser Function seien  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_s$ ; sie dienen als Hilfspunkte. Von ihnen sind nach (I § 12) noch  $s - p$  willkürlich, die letzten  $p$  bestimmt. Alsdann bilde man eine zweite, ganze Function  $\mathcal{W}(x, y)$  von demselben Grade wie  $X$ , die ebenfalls  $F = 0$  adjungirt ist und die in den  $s$  Hilfspunkten  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_s$  und ausserdem in den  $\mu$  Punkten  $\xi_1^0, \dots, \xi_\mu^0$  verschwindet. Hierdurch ist die Function  $\mathcal{W}(x, y)$  vollkommen bestimmt nach (I § 12). Zu ihrer Bildung sind also die  $p$  Punkte  $x_1, \dots, x_p$  gar nicht nöthig. Diese Punkte sind vielmehr die  $p$  letzten und abhängigen  $0^1$  Punkte von  $\mathcal{W}(x, y)$ . Die  $p$  gesuchten Punkte  $x_1, \dots, x_p$  ergeben sich daher eindeutig und algebraisch als Functionen der  $p$  Punkte  $x_i^0$  und der  $2\mu$  Punkte  $\xi_\lambda$  und  $\xi_\lambda^0$ , indem man die  $p$  letzten Punkte aufsucht, die  $\mathcal{W}(x, y) = 0$  mit  $F(x, y) = 0$  ausser den Doppelpunkten von  $F = 0$ , den Hilfspunkten  $\varepsilon$  und den  $\mu$  Punkten  $\xi_\lambda^0$  gemein hat. (q. e. d.)

Da die Coefficienten der rationalen Function  $X$  für die Coordinaten eines jeden der zwei Punktsysteme  $\xi_\lambda$  und  $x_i^0$  und folglich die der Function  $\mathcal{W}$  für die Coordinaten eines jeden der drei Punktsysteme  $\xi_\lambda, x_i^0$  und  $\xi_\lambda^0$  rational und symmetrisch sind, so folgt weiter:

(VI) Wenn 4 Punktsysteme  $\xi_\lambda, \xi_\lambda^0; x_i, x_i^0$  ( $\lambda = 1, \dots, \mu; i = 1, \dots, p$ ) durch  $p$  Relationen der Form (6) verbunden sind, so sind die rationalen und symmetrischen Functionen der Coordinaten der  $p$  Punkte  $x_i$  rationale und symmetrische Functionen der Coordinaten eines jeden der 3 anderen Punktsysteme.

In ähnlicher Weise wie für die Integrale 1. Gattung lässt sich auch für die Differentiale 1. Gattung das Abel'sche Theorem

umkehren. Das letztere wurde (§ 13 Satz IV; § 17 Gl. 7) in der Form ausgesprochen:

(VII) Zwischen den  $m \infty^1$  Punkten  $b_l$  und den zugehörigen Residuen  $B_l$  einer rationalen Function  $R(x, y)$  der Ordnung  $m$  bestehen die  $p$  algebraischen Gleichungen ( $k = 1, \dots, p$ ):

$$(7) \quad \sum_l B_l \left( \frac{du_k}{dx} \right)_{b_l} = 0.$$

Die Umkehrung dieses Satzes lautet:

(VIII) Sind  $m$  Punkte  $b_1, \dots, b_m$  in  $T$  und  $m$  zugehörige Grössen  $B_1, \dots, B_m$  so beschaffen, dass sie den  $p$  Gleichungen (7) genügen, so existirt immer eine (und abgesehen von einer additiven Constanten nur eine) rationale Function  $R(x, y)$  von der Ordnung  $m$ , für welche die  $m$  Punkte  $b_l$  die  $\infty^1$  Punkte und die  $m$  Grössen  $B_l$  die zugehörigen Residuen sind.

Bildet man nämlich aus den  $2m$  gegebenen Elementen  $b_l$  und  $B_l$ , indem man unter  $t_{b_l}$  ein Normalintegral 2. Gattung mit dem Unstetigkeitspunkt  $b_l$  und unter  $R_0$  eine Constante versteht, den Ausdruck

$$(8) \quad \sum_l B_l t_{b_l} + R_0,$$

so stellt derselbe ein Abel'sches Integral von besonderer Art dar. Es sind nämlich die Periodicitätsmoduli von (8) nicht nur an den  $p$  Querschnitten  $a_k$ , sondern gleichzeitig auch in Folge der Bedingungen (7) an den  $p$  Querschnitten  $b_k$  sämmtlich gleich 0. Ausserdem wird die Function (8) nur algebraisch  $\infty$  in den Punkten  $b_1, \dots, b_m$  und zwar in  $b_l$  wie  $B_l(x - b_l)^{-1}$ . Hieraus folgt, dass (8) eine rationale Function mit den Unstetigkeitspunkten  $b_l$  und den zugehörigen Residuen  $B_l$  ist. Bezeichnet man diese Function mit  $R$ , so hat man

$$(9) \quad R - R_0 = \sum_l B_l t_{b_l},$$

womit  $R$  bis auf eine additive Constante  $R_0$  bestimmt ist.

An Satz (IV) schliessen sich folgende Bemerkungen an. Sind  $(x_1, y_1), \dots, (x_m, y_m)$   $m$  Punkte, in welchen eine rationale Function  $R$  der Ordnung  $m$  denselben Werth annimmt, so sind die Gleichungen der Abel'schen Theorems für Differentiale 1. Gattung nach (8) § 13, wenn ( $k = 1, \dots, p$ ;  $l = 1, \dots, m$ ):

$$(10) \quad \sum_l \left( \frac{du_k}{dx} \right)_{x_l} dx_l = 0.$$

Unter der Voraussetzung, dass  $m > p$  und dass die  $p$  Gleichungen (10) linear unabhängig seien, definiren dieselben  $p$  der Punkte  $(x_i, y_i)$  als Functionen der  $m - p$  übrigen. Die Aufgabe, diese  $p$  Functionen herzustellen, wird ebenfalls durch den Satz (IV) gelöst. Man wähle nämlich ganz beliebig  $m$  Punkte  $b_i$  und bilde nach (§ 12 Fall 1) ähnlich wie zu den Gleichungen (6) eine rationale Function  $\Psi(x, y): X(x, y)$  derart, dass  $X = 0^1$  wird in den  $m$  Punkten  $b_i$  und gewissen Hilfspunkten  $\varepsilon$ , und  $\Psi = 0^1$  wird in denselben Hilfspunkten  $\varepsilon$  und den  $m - p$  ersten und unabhängigen Punkten  $(x_i, y_i)$ . Hierdurch ist die Function  $\Psi$  bis auf einen constanten Factor bestimmt. Die Coordinaten der  $p$  letzten  $0^1$  Punkte  $(x_i, y_i)$  von  $\Psi = 0$  sind algebraische Functionen der Coordinaten der  $p$  ersten, unabhängigen Punkte  $(x_i, y_i)$  und der  $m$  Punkte  $b_i$ . Das so bestimmte System der  $p$  letzten und der  $m - p$  ersten Punkte  $(x_i, y_i)$  genügt den  $p$  Gleichungen (10). Da die  $m$  Punkte  $b_i$  willkürlich waren, so hat die obige Aufgabe unendlich viele Lösungen. Man hat hiernach den Satz:

(IX) Ein System von  $m$  Punkten  $(x_i, y_i)$ , das mit seinen Differentialen  $dx_i$  den  $p$  Gleichungen (10) genügt, kann definirt werden als das System der gemeinsamen Schnittpunkte von  $F(x, y) = 0$  mit einer Curve ( $\Psi = 0$ ), deren Coefficienten so sich ändern, dass alle übrigen Schnittpunkte constant bleiben.

Man kann mit Jacobi<sup>1)</sup> die Gleichungen (10) als ein System von  $p$  Differentialgleichungen ansehen, welches  $p$  der Punkte  $(x_i, y_i)$  als Functionen der  $m - p$  unabhängigen Punkte  $(x_i, y_i)$  definirt. Da in den Gleichungen (10) die Variablen getrennt sind, so lassen sich die  $p$  Integralgleichungen zunächst in Form von Quadraturen, also in transcenderter Form anschreiben, in dem Sinne, dass zu den  $m$  Punkten  $(x_i, y_i)$   $m$  beliebig gegebene Anfangswerthe  $b_i$  gehören, von denen die  $p$  letzten als Integrationsconstanten anzusehen sind, während die  $m - p$  ersten numerisch sind. Die obigen Betrachtungen leisten aber die Integration des Systemes (10) in demselben Sinne auch in rein algebraischer Form. Denn mittels der obigen Gleichung  $\Psi = 0$  stellen sich die  $p$  letzten und abhängigen Punkte  $(x_i, y_i)$  als Functionen der  $m - p$  ersten, unabhängigen Punkte  $(x_i, y_i)$  dar und dabei können von den  $m$  in diese Lösungen eingehenden Punkten  $b_i$  die  $m - p$  ersten als numerisch gegeben, die  $p$  letzten als die  $p$  Integrationsconstanten angesehen werden.

Sind die Gleichungen (10) linear abhängig, derart, dass  $q$  der-

1) Jacobi, Journal für Math. Bd. 9. S. 402 (1832).

selben eine identische Folge der übrigen sind, so hat man in (10) ein System von  $p - q$  Differentialgleichungen und es ist die Aufgabe, die  $p - q$  abhängigen Punkte  $(x_i, y_i)$  als Functionen der  $m - p + q$  unabhängigen Punkte  $(x_i, y_i)$  darzustellen. Dabei können den  $m$  Punkten  $(x_i, y_i)$   $m$  Anfangspunkte  $b_i$  entsprechen, die aber jetzt nicht mehr beliebig, sondern Nullpunkte derselben  $q$  linear unabhängigen  $\Phi$ -Functionen sind. Bildet man nun nach (§ 12 Fall 2) eine rationale Function  $\Phi: \Phi_0$  derart, dass  $\Phi_0$  in den  $m$  Punkten  $b_i$  und  $2p - 2 - m$  Hilfspunkten,  $\Phi$  in denselben Hilfspunkten und den  $m - p + q$  ersten Punkten  $(x_i, y_i)$  verschwindet, so stellen sich die  $p - q$  letzten Punkte  $(x_i, y_i)$ , welche  $\Phi = 0$  mit  $I' = 0$  (abgesehen von den Doppelpunkten und den Hilfspunkten) gemein hat, als Functionen der  $m - p + q$  ersten, unabhängigen Punkte  $(x_i, y_i)$  und der  $m$  Punkte  $b_i$  dar, womit das System (10) für den vorliegenden Fall algebraisch integrirt ist.

Ist z. B.<sup>1)</sup>  $q = 1$ ;  $m = 2p - 2$  und bezeichnet man die  $p - 1$  unabhängigen Punkte  $(x_i, y_i)$  durch  $x_1, \dots, x_{p-1}$ , die  $p - 1$  abhängigen durch  $\xi_1, \dots, \xi_{p-1}$ , so wird die Aufgabe, die Punkte  $\xi_i$  als Functionen der Punkte  $x_i$  so zu bestimmen, dass die  $p$  Gleichungen ( $k = 1, \dots, p$ ):

$$(11) \quad \sum_{i=1}^{p-1} du_k^{(x_i)} + \sum_{i=1}^{p-1} du_k^{(\xi_i)} = 0$$

erfüllt sind, gelöst, indem man eine Function  $\Phi$  bildet, die in den  $p - 1$  Punkten  $x_i$  verschwindet. Dann sind die  $p - 1$  letzten 0<sup>1</sup> Punkte von  $\Phi$  (ausser den Doppelpunkten) die den Gleichungen (11) genügenden Punkte  $\xi_i$ .

1) Riemann, Ges. W. S. 120.

## Vierter Abschnitt.

### Die eindeutigen Transformationen.

Die bisherigen Betrachtungen, die eine bestimmte Gleichung  $F(x, y) = 0$  vom Grade  $n$  und vom Geschlecht  $p$  zur Grundlage hatten, lassen sich bedeutend verallgemeinern. Es gibt nämlich unendlich viele Gleichungen  $F_1(x_1, y_1) = 0$ ,  $F_2(x_2, y_2) = 0 \dots$ , die mit  $F(x, y) = 0$  äquivalent sind und für die genau dieselben Sätze und Darstellungen bezüglich der rationalen Functionen und ihrer Integrale gelten, wie für  $F(x, y) = 0$ . Eine solche Gleichung z. B.  $F_1(x_1, y_1) = 0$  ergibt sich aus  $F(x, y) = 0$  durch eine sogenannte eindeutige, rationale Transformation, d. i. eine Transformation, bei der sich ebensowohl  $(x_1, y_1)$  rational durch  $(x, y)$  wie umgekehrt  $(x, y)$  rational durch  $(x_1, y_1)$  ausdrückt. Die Gesammtheit der durch solche Transformation in einander überführbaren Gleichungen, wie  $F = 0$ ,  $F_1 = 0 \dots$ , heisst eine zusammengehörige Klasse von algebraischen Gleichungen. Für die Theorie der rationalen Functionen und Abel'schen Integrale sind diejenigen Formen besonders wichtig, die für alle Gleichungen der Klasse die nämlichen oder die der eindeutigen Transformation gegenüber invariant sind. Man unterscheidet:

- 1) Invariante Constanten, d. h. solche zu  $F(x, y) = 0$  gehörige, constante Grössen, deren numerischer Werth bei der Ueberführung in  $F_1(x_1, y_1) = 0$  ungeändert bleibt; es sind dies:
  - a) die Geschlechtzahl  $p$  von  $F = 0$  oder die Zahl  $2p$  der Querschnitte in der Verzweigungsfläche  $T$ ;
  - b) gewisse aus den Coefficienten von  $F = 0$  gebildete Combinationen, welche die Moduln der zu  $F = 0$  gehörigen Klasse heissen.
- 2) Invariante Functionen, d. h. solche zu  $F = 0$  gehörige Functionen von  $(x, y)$ , die in gleich gebildete zu  $F_1 = 0$  gehörige Functionen von  $(x_1, y_1)$  übergehen; es sind dies:
  - c) die Quotienten der zu  $F = 0$  gehörigen  $\Phi$ -Functionen oder adjungirten Functionen  $(n - 3)^{\text{ten}}$  Grades und die mit ihrer

Benutzung gebildeten, an Stelle von  $F(x, y) = 0$  tretenden Normalformen;

- d) die zu  $F=0$  gehörigen, rationalen Functionen und Abel'schen Integrale, sobald dieselben allein durch  $\Phi$ -Functionen dargestellt sind.

Dieser Stoff ist in den nächsten §§ zu behandeln.

### § 21. Die eindeutige Transformation. Hilfssätze.

Man gelangt zu der eindeutigen Transformation<sup>1)</sup> einer gegebenen Gleichung vom Grade  $n$

$$(1) \quad F(x, y) = 0$$

in folgender Weise. Seien  $\eta_1, \eta_2, \eta_3$  ganze, rationale und linear unabhängige Functionen von  $(x, y)$  von demselben Grade  $\sigma$ , derart, dass für jedes Glied  $x^i y^k$  in diesen Functionen die Dimension  $i + k \leq \sigma$  ist und seien die Quotienten

$$(2) \quad x_1 = \frac{\eta_1(x, y)}{\eta_3(x, y)}, \quad y_1 = \frac{\eta_2(x, y)}{\eta_3(x, y)}$$

Functionen von gleicher Ordnung. Eliminiert man nun die Variablen  $(x, y)$  aus (1) und (2), so tritt an Stelle von (1) eine Gleichung von gewissem Grade  $n_1$  in den neuen Variablen  $(x_1, y_1)$

$$(3) \quad F_1(x_1, y_1) = 0.$$

Zugleich ergeben sich im Laufe der Elimination im Allgemeinen  $x$  und  $y$  als rationale Functionen von  $(x_1, y_1)$  in der Form

$$(4) \quad x = \frac{\vartheta_1(x_1, y_1)}{\vartheta_3(x_1, y_1)}, \quad y = \frac{\vartheta_2(x_1, y_1)}{\vartheta_3(x_1, y_1)}$$

und von der Beschaffenheit, dass die ganzen, rationalen Functionen  $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3$  in  $(x, y)$  von gewissem Grade  $\varrho$  und die Quotienten (4) von gleicher Ordnung sind.

In der That kann man, um (3) zu erhalten, zuerst aus (1) und den beiden Gleichungen (2) durch Elimination von  $y$  zwei Gleichungen  $P(x, x_1) = 0, Q(x, y_1) = 0$  und aus diesen durch Elimination von  $x$  die Gleichung (3) bilden. Man erhält aber zugleich aus  $P=0, Q=0$   $x$  rational dargestellt in  $(x_1, y_1)$ , also die erste Gleichung (4) durch dasselbe Verfahren, das S. 65 angewandt wurde, um die  $y$ -Ordinate eines Schnittpunktes zweier Curven  $F=0$  und  $N=0$  rational in der zugehörigen  $x$ -Ordinate auszudrücken.

<sup>1)</sup> Riemann, Ges. W. S. 111 ff. Clebsch-Gordan, Abel'sche Functionen S. 50 ff.



Der Uebergang von (1) zu (3) mittels der Gleichungen (2) oder (4) heisst eine eindeutige Transformation zwischen  $F=0$  und  $F_1=0$ . Denn es gehört zu jedem Punkt  $(x, y)$  von  $F=0$  nach (2) nur ein Punkt  $(x_1, y_1)$  von  $F_1=0$  und umgekehrt zu jedem Punkt  $(x_1, y_1)$  von  $F_1=0$  nach (4) nur ein Punkt  $(x, y)$  von  $F=0$ . Daher ist auch  $F_1(x_1, y_1)=0$  irreducibel, wenn  $F(x, y)=0$  diese Eigenschaft hat.

In die Formeln (1—4) für die eindeutige Transformation führen wir zur weiteren Behandlung homogene Coordinaten ein. Ersetzt man  $x$  und  $y$  durch  $\frac{x_1}{x_3}$  und  $\frac{x_2}{x_3}$ ,  $x_1$  und  $y_1$  durch  $\frac{y_1}{y_3}$  und  $\frac{y_2}{y_3}$  und schreibt den Grad einer homogenen Form über die Variablen, so besteht die eindeutige Transformation in der Verbindung der Gleichungen

$$F(\overbrace{x_1, x_2, x_3}^n) = 0 \quad \text{und} \quad \nu y_i = \eta_i(\overbrace{x_1, x_2, x_3}^\sigma) \quad (i = 1, 2, 3), \quad (5)$$

welche durch Elimination der  $x_i$  übergehen in die neuen Gleichungen

$$G(\overbrace{y_1, y_2, y_3}^{n_1}) = 0 \quad \text{und} \quad \mu x_i = \vartheta_i(\overbrace{y_1, y_2, y_3}^{n_1}) \quad (i = 1, 2, 3). \quad (6)$$

Die Proportionalitätsfactoren  $\mu$  und  $\nu$  sind unbestimmte Functionen der  $x_i$  oder  $y_i$ .

Trägt man die Werthe der  $y_i$  aus (5) in  $G=0$  ein, so erhält man

$$\nu^n G(\overbrace{y_1, y_2, y_3}^{n_1}) = G(\overbrace{\eta_1, \eta_2, \eta_3}^{n_1}) = F(\overbrace{x_1, x_2, x_3}^n) \mathfrak{L}(\overbrace{x_1, x_2, x_3}^{n_1 \sigma - n}), \quad (7)$$

wo  $\mathfrak{L}$  ein Factor vom Grade  $n_1 \sigma - n$  in den  $x_i$  ist, der sich nothwendig absondern muss. Denn andernfalls würde nach (7)  $F(x_1, x_2, x_3)$  eine Function der  $\eta_1, \eta_2, \eta_3$  sein und der Eliminationsprocess würde die  $x$  als Functionen der  $y$  nicht anders geben, als durch Auflösung der drei letzten Gleichungen (5), mithin im Allgemeinen mit Irrationalitäten behaftet. Die Transformation wäre also nicht eindeutig umkehrbar. Die Curve  $\mathfrak{L}=0$  wird in § 22 näher untersucht.

Die nächsten Fragen sind die nach dem Grade  $n_1$  und der Zahl  $r_1$  der Doppelpunkte der transformirten Gleichung  $G=0$ . Die Zahl  $n_1$  ist leicht zu bestimmen. Die drei Curven  $\eta_i=0$  mögen durch  $r_0$  von den  $r$  Doppelpunkten  $\delta$  von  $F=0$  und ausserdem durch  $s$  einfache Punkte  $\varepsilon$  von  $F=0$  hindurchgehen. Der Grad  $n_1$  von  $G=0$  ist gleich der Zahl der Schnittpunkte  $(y)$  von  $G=0$  mit einer geraden Linie  $a_1 y_1 + a_2 y_2 + a_3 y_3 = 0$ . Diesen Schnittpunkten entsprechen eindeutig diejenigen Schnittpunkte  $(x)$  von  $F=0$  mit der Curve  $a_1 \eta_1 + a_2 \eta_2 + a_3 \eta_3 = 0$ , die nicht in die festen Punkte  $\delta$

und  $\varepsilon$  fallen, sondern beweglich sind. Daher ist, weil die Doppelpunkte zweifach zählen,

$$(8) \quad n_1 = n\sigma - 2r_0 - s.$$

Da die hier bestimmte Zahl  $n_1$  zugleich angibt, in wieviel Punkten von  $F=0$ , die nicht in die Punkte  $\delta$  und  $\varepsilon$  fallen, die Functionen  $\eta_1, \eta_2, \eta_3$  verschwinden, so hat man den Satz:

(I) Der Grad  $n_1$  der transformirten Gleichung  $G=0$  ist die Ordnung der transformirenden Functionen (2).

Die Frage nach der Zahl  $r_1$  der Doppelpunkte der transformirten Gleichung wird im folgenden § (Gl. 1) beantwortet. Zu ihrer Behandlung sind einige Vorbereitungen nöthig, die wir hier erledigen. Zunächst ist eine Bemerkung<sup>1)</sup> über die Doppelpunkte von  $F=0$  und die ihnen entsprechenden Punkte von  $G=0$  von Wichtigkeit. Aus (6) folgt:

$$(9) \quad v dy_i + y_i dv = \frac{\partial \eta_i}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \eta_i}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial \eta_i}{\partial x_3} dx_3 \quad (i = 1, 2, 3).$$

Ist nun  $(x)$  ein Doppelpunkt der Curve  $F=0$ , für den die drei  $\eta_i$  nicht zugleich verschwinden, so ist nach (5) auch  $v$  nicht  $=0$  und folglich entspricht nach (9) jeder Fortschrittsrichtung oder jedem System der  $dx$  auf  $F=0$  eine Fortschrittsrichtung oder ein System der  $dy$  auf  $G=0$ , d. h. dem Doppelpunkt auf  $F=0$  entspricht ein Doppelpunkt auf  $G=0$ .

Ist dagegen  $(x)$  ein Doppelpunkt auf  $F=0$ , für den die drei  $\eta_i$  einfach verschwinden, so ist für denselben auch  $v=0$  und jeder der beiden Fortschrittsrichtungen  $(dx)$  auf  $F=0$  entspricht ein Werthsystem  $y_i$  auf  $G=0$ , d. h. dem Doppelpunkt auf  $F=0$  entspricht ein Punktepaar auf  $G=0$ . Dies gibt den Satz:

(II) Jedem Doppelpunkt auf  $F=0$ , durch den die drei Curven  $\eta_i=0$  nicht hindurchgehen, entspricht ein Doppelpunkt auf  $G=0$ ; dagegen jedem Doppelpunkt auf  $F=0$ , durch den die drei Curven  $\eta_i=0$  hindurchgehen, entspricht ein Punktepaar auf  $G=0$ .

Hieraus folgt unmittelbar:

(III) Sind  $\eta_1, \eta_2, \eta_3$  in (5) adjungirte Functionen von  $F=0$ , so sind auch  $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3$  in (6) adjungirte Functionen von  $G=0$ .

1) Clebsch-Gordan, Abel'sche Functionen S. 56.

Denn sind  $\eta_i$  adjungirte Functionen von  $F=0$ , d. h. verschwinden sie für alle Doppelpunkte von  $F=0$ , so entspricht einem Doppelpunkt von  $F=0$  niemals ein Doppelpunkt auf  $G=0$  (nach II), folglich auch einem Doppelpunkt auf  $G=0$  niemals ein Doppelpunkt auf  $F=0$ , d. h. die Functionen  $\vartheta_i$  müssen adjungirte Functionen von  $G=0$  sein.

Wir machen in den folgenden Untersuchungen zur Vereinfachung die Voraussetzung, dass die  $\eta_i$  adjungirte Functionen von  $F$  seien. Die Curven  $\eta_i=0$  sollen also durch sämtliche  $r$  Doppelpunkte  $\delta$  von  $F=0$  und sie mögen ausserdem durch  $s$  einfache Punkte  $\varepsilon$  von  $F=0$  hindurchgehen. Dann ist der Grad  $n_1$  der transformirten Gleichung  $G=0$  nach (8)

$$n_1 = n\sigma - 2r - s. \quad (10)$$

Wir beweisen ferner zwei Hilfssätze<sup>1)</sup>, die im Folgenden zur Verwendung kommen.

Sind  $A, B, C$  drei beliebige, homogene Functionen von  $x_1, x_2, x_3$  bez. vom Grade  $a, b, c$  und setzt man  $A'(x_i) = A_i$ , so heisst bekanntlich die Functionaldeterminante

$$\mathcal{A} = \Sigma \pm A_1 B_2 C_3 \quad (11)$$

die Jacobische Function von  $A, B, C$  oder  $\mathcal{A}=0$  die Jacobische Curve von  $A=0, B=0, C=0$ . Für sie gelten die Sätze:

(IV) Die Jacobische Curve  $\mathcal{A}=0$  der drei Curven  $A=0, B=0, C=0$  geht durch jeden gemeinsamen Schnittpunkt dieser drei Curven; sie hat in einem solchen Punkt einen Doppelpunkt, wenn der Grad der drei Curven derselbe ist.

(V) Die Jacobische Curve  $\mathcal{A}=0$  berührt in einem gemeinsamen Punkt der drei Curven  $A=0, B=0, C=0$  die Curve  $A=0$ , wenn  $B=0$  und  $C=0$  von gleichem Grade sind und hat, wenn ausserdem  $A=0$  einen solchen Punkt zum Doppelpunkt hat, diesen Punkt ebenfalls zum Doppelpunkt derart, dass ihre Tangenten mit denen von  $A=0$  zusammenfallen.

Es ist nämlich, wenn  $c_1, c_2, c_3$  drei beliebige Constanten sind,

1) Hesse, Journ. für Math. Bd. 41 S. 286 (1850). Clebsch, Journ. für Math. Bd. 64 S. 215 (1864). Clebsch-Gordan, Abel'sche Functionen S. 60 ff. (1866).

$$(12) \quad \mathcal{A} \Sigma c_i x_i = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & 0 \\ B_1 & B_2 & B_3 & 0 \\ C_1 & C_2 & C_3 & 0 \\ c_1 & c_2 & c_3 & \Sigma c_i x_i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & -aA \\ B_1 & B_2 & B_3 & -bB \\ C_1 & C_2 & C_3 & -cC \\ c_1 & c_2 & c_3 & 0 \end{vmatrix}.$$

Hieraus folgt, dass in einem Punkt  $x$ , für den  $A, B, C$  verschwinden, auch  $\mathcal{A} = 0$  wird. Ferner erhält man für einen solchen Punkt durch Differentiation von (12) nach  $x_k$ , wenn zugleich  $b=c$  ist,

$$(13) \quad \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial x_k} \Sigma c_i x_i = (a-b) \frac{\partial A}{\partial x_k} \Sigma \pm B_1 C_2 C_3 \quad (k=1, 2, 3).$$

Ist nun  $a=b$ , so folgt  $\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial x_k} = 0$ , d. h.  $\mathcal{A} = 0$  hat in dem gemeinsamen Punkt einen Doppelpunkt, womit (IV) bewiesen ist. Ist aber  $a \geq b$ , so folgt, dass sich  $\mathcal{A} = 0$  und  $A = 0$  in dem betrachteten Punkt berühren. Ist der Punkt zugleich Doppelpunkt von  $A = 0$ , so ist er nach (13) auch Doppelpunkt von  $\mathcal{A} = 0$ . Unter dieser Voraussetzung, d. h. wenn  $\frac{\partial A}{\partial x_k} = 0$  und  $\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial x_k} = 0$  ( $k=1, 2, 3$ ) ist, erhält man aus (13) durch Differentiation nach  $x_l$

$$(14) \quad \frac{\partial^2 \mathcal{A}}{\partial x_k \partial x_l} \Sigma c_i x_i = (a-b) \frac{\partial^2 A}{\partial x_k \partial x_l} \Sigma \pm B_1 C_2 C_3,$$

d. h. die Tangenten des Doppelpunktes von  $\mathcal{A} = 0$  fallen mit den Tangenten des Doppelpunktes von  $A = 0$  zusammen, womit (V) bewiesen ist.

Die Sätze (IV) und (V) sind gleichbedeutend mit dem folgenden:  
(VI) Die Functional-determinante von drei Functionen  $A, B, C$  verschwindet in 1. Ordnung für einen gemeinsamen Nullpunkt dieser drei Functionen; sie verschwindet in 2. Ordnung in einem solchen Punkt, wenn  $B$  und  $C$  von gleichem Grade sind und in 3. Ordnung, wenn der Punkt ausserdem ein Doppelpunkt von  $A = 0$  ist.

Ist nämlich  $x$  der betrachtete Punkt und  $\xi$  ein beliebiger anderer Punkt, sind also  $x_i + \lambda \xi_i$  die Coordinaten eines Punktes der Verbindungslinie von  $x$  und  $\xi$ , so sind die den Schnittpunkten der Geraden  $x, \xi$  mit  $\mathcal{A} = 0$  und  $A = 0$  entsprechenden Parameter  $\lambda$  zu bestimmen aus den Gleichungen

$$(15) \quad \begin{cases} \mathcal{A} + \lambda \Sigma \xi_k \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial x_k} + \frac{\lambda^2}{1 \cdot 2} \Sigma \xi_k \xi_l \frac{\partial^2 \mathcal{A}}{\partial x_k \partial x_l} + \dots = 0 \\ A + \lambda \Sigma \xi_k \frac{\partial A}{\partial x_k} + \frac{\lambda^2}{1 \cdot 2} \Sigma \xi_k \xi_l \frac{\partial^2 A}{\partial x_k \partial x_l} + \dots = 0 \end{cases} \quad (k, l=1, 2, 3).$$

Ist nun  $x$  ein Schnittpunkt der drei Curven  $A=0$ ,  $B=0$ ,  $C=0$ , so ist für diesen Punkt nach (12) auch  $\mathcal{A}=0$ . Sind  $B$  und  $C$  von gleichem Grade, so ist in dem Punkt  $x$  nach (13)  $\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial x_k}$  proportional mit  $\frac{\partial A}{\partial x_k}$ . Daher kann man das Glied 1. Ordnung in  $\lambda$  in der ersten Gleichung (15) mit Hilfe der zweiten Gleichung zerstören. Die erste Gleichung beginnt also mit  $\lambda^2$ , d. h.  $\mathcal{A}$  verschwindet in dem Punkt  $x$  in zweiter Ordnung. Ist ausserdem  $x$  Doppelpunkt von  $A=0$ , sind also die Grössen  $\frac{\partial A}{\partial x_k}=0$ , so sind nach (13) auch die Grössen  $\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial x_k}=0$  und es sind nach (14) die Grössen  $\frac{\partial^2 \mathcal{A}}{\partial x_k \partial x_l}$  proportional mit  $\frac{\partial^2 A}{\partial x_k \partial x_l}$ . Man kann daher in der ersten Gleichung (15) mit Hilfe der zweiten Gleichung das Glied in  $\lambda^2$  zum Verschwinden bringen. Die erste Gleichung (15) beginnt dann mit  $\lambda^3$ , d. h.  $\mathcal{A}$  verschwindet in dem Punkt  $x$  in dritter Ordnung. Da  $A$  in zweiter Ordnung verschwindet, so absorbiert der Doppelpunkt 6 Schnittpunkte von  $\mathcal{A}=0$  und  $A=0$ .

## § 22. Die invariante Zahl $p$ und die Klassenmoduln.

Wir wenden uns zur Untersuchung der Constanten, die bei der rationalen, eindeutigen Transformation invariant sind und geben zunächst einen Beweis für die Erhaltung des Geschlechtes  $p$ , d. h. für den Satz:

(I) Für zwei Curven  $F(x)=0$  und  $G(y)=0$ , die sich Punkt für Punkt eindeutig entsprechen, hat das Geschlecht  $p$  denselben Werth.

Ein erster Beweis<sup>1)</sup> dieses Satzes, der sich an die Gleichungen (1—4) § 21 anschliesst, ergibt sich aus der Beziehung zwischen den zu den Gleichungen  $F(x, y)=0$  und  $F_1(x_1, y_1)=0$  gehörigen Verzweigungsflächen. Die Gleichung  $F(x, y)=0$  gibt Anlass zu zwei solchen Flächen, nämlich der in § 2 betrachteten,  $n$ -blättrig über der  $x$ -Ebene ausgebreiteten Fläche, welche die Verzweigung von  $y$  als Function der Variablen  $x$  darstellt und hier der Unterscheidung halber mit  $T_x$  bezeichnet sei, und einer  $n$ -blättrig über der  $y$ -Ebene ausgebreiteten Fläche  $T_y$ , welche die Verzweigung von  $x$  als Function der Variablen  $y$  darstellt und in ähnlicher Weise wie  $T_x$  zu con-

1) Riemann, Ges. W. S. 112.

struiren ist. Die beiden Flächen  $T_x$  und  $T_y$  sind eindeutig auf einander bezogen; entsprechenden Punkten beider Flächen kommt dasselbe Werthepaar  $(x, y)$  zu. Die eindeutige Transformation, welche die beiden Flächen  $T_x$  und  $T_y$  in einander überführt, besteht in der Vertauschung von  $x$  und  $y$ . Dabei geht ein einfacher Verzweigungspunkt (1. Art)  $(x_0, y_0)$  von  $T_x$ , da in ihm  $y - y_0$  proportional mit  $(x - x_0)^{\frac{1}{2}}$  ist, über in einen einfachen Punkt  $(x_0, y_0)$  von  $T_y$  und ein einfacher Verzweigungspunkt (1. Art)  $(x_1, y_1)$  von  $T_y$ , da in ihm  $x - x_1$  proportional mit  $(y - y_1)^{\frac{1}{2}}$  ist, über in einen einfachen Punkt  $(x_1, y_1)$  von  $T_x$ . Einem Doppelpunkt von  $T_x$  dagegen entspricht ein Doppelpunkt von  $T_y$  und umgekehrt, da die Gleichungen zur Bestimmung der Doppelpunkte ( $F'_x = 0, F'_y = 0$ ) für beide Flächen dieselben sind. Der Punkt  $(x = \infty, y = \infty)$  ist für beide Flächen ein  $n$ -facher Punkt 1. Art ohne Verzweigung. Die eindeutige Beziehung zwischen den Flächen  $T_x$  und  $T_y$  kann als eine Abbildung aufgefasst werden, die bekanntlich conform, d. h. in den kleinsten Theilen ähnlich ist. Die Aehnlichkeit hört auf in den Punkten, für welche  $dy : dx = -F'_x : F'_y$  entweder 0 oder  $\infty$  oder unbestimmt ist. Es sind dies nach dem Obigen die Verzweigungspunkte von  $T_x$  und  $T_y$ , während in den Doppelpunkten und im Unendlichen die Conformität für die einzelnen Blätter gewahrt bleibt.

Verbindet man nun die Gleichung  $F(x, y) = 0$  zuerst mit der Function  $x_1 = \eta_1(x, y) : \eta_3(x, y)$ , die nach (1) § 21 von der Ordnung  $n_1$  ist, also in  $T_x$  und  $T_y$  jeden Werth  $n_1$ -mal annimmt, so erhält man durch Elimination von  $y$  eine Gleichung zwischen  $(x_1, x)$ , die nach § 6 in  $x_1$  vom Grade  $n$ , in  $x$  vom Grade  $n_1$  ist, und durch Elimination von  $x$  eine Gleichung zwischen  $(x_1, y)$ , die in  $x_1$  vom Grade  $n$  und in  $y$  vom Grade  $n_1$  ist. Zu der Function  $x_1 = \eta_1(x, y) : \eta_3(x, y)$  gehört daher eine Fläche  $T_{x_1}$ , die  $n_1$ -blättrig über der  $x_1$ -Ebene ausgebreitet ist und eine conforme Abbildung sowohl von  $T_x$  wie von  $T_y$  darstellt. Je zwei der drei Grössen  $x, y, x_1$  sind eindeutig in der zu der dritten Grösse gehörigen Verzweigungsfläche und jede der drei Grössen ist eine rationale Function der beiden andern. Nimmt man weiter die Function  $y_1 = \eta_2(x, y) : \eta_3(x, y)$  hinzu, die ebenfalls von der Ordnung  $n_1$  ist, also in  $T_x, T_y, T_{x_1}$  jeden Werth  $n_1$ -mal annimmt, so besteht zwischen  $x_1$  und  $y_1$  eine Gleichung  $F_1(x_1, y_1) = 0$  vom Grade  $n_1$  sowohl in  $x_1$  wie in  $y_1$ . Dies ist die transformirte Gleichung (3) § 21. Zu der Function  $y_1$  gehört eine Fläche  $T_{y_1}$ , die  $n_1$ -blättrig über der  $y_1$ -Ebene ausgebreitet ist. Die vier Flächen  $T_x, T_y, T_{x_1}, T_{y_1}$  sind untereinander conform und die Functionen  $x$

und  $y$  sind eindeutig in den Flächen  $T_{x_1}$  und  $T_{y_1}$  oder rational in  $(x_1, y_1)$ .

Aus dieser Betrachtung folgt unmittelbar der Satz I. Denn da jede der beiden Flächen  $T_x$  und  $T_{x_1}$  durch eine Anzahl von Querschnitten in eine einfach zusammenhängende verwandelt wird, so folgt aus der eindeutigen Beziehung zwischen beiden Flächen, dass die Zahl der Querschnitte  $2p$  für beide dieselbe sein muss. (q. e. d.)

Ein zweiter Beweis<sup>1)</sup> des Satzes I ist rein algebraisch. Ist  $r$  die Zahl der Doppelpunkte von  $F=0$ ,  $r_1$  die der Doppelpunkte von  $G=0$ , so ist die Behauptung (vgl. (6) § 5)

$$(n-1)(n-2)-2r=(n_1-1)(n_1-2)-2r_1. \quad (1)$$

Der Beweis schliesst sich an die Gleichung (7) § 21 an, nämlich

$$v^{n_1} G(\overline{y_1, y_2, y_3}) = G(\overline{\eta_1, \eta_2, \eta_3}) = F(\overline{x_1, x_2, x_3}) \mathfrak{L}(\overline{x_1, x_2, x_3}) \quad (2)$$

und beruht auf folgendem Gedanken. Die Schnittpunkte der in (2) auftretenden Curve  $\mathfrak{L}=0$  mit  $F=0$  zerfallen ihrer Natur nach in drei Gruppen. Bestimmt man die Zahl der Punkte in jeder Gruppe und setzt die Summe gleich der Gesamtzahl der Schnittpunkte, nämlich gleich

$$n(n_1\sigma - n), \quad (2a)$$

so ergibt sich die Gleichung (1).

Aus (2) folgt durch Differenzieren nach  $x_i$  für Punkte von  $F=0$ :

$$\mathfrak{L} \frac{\partial F}{\partial x_i} = \frac{\partial G}{\partial \eta_1} \frac{\partial \eta_1}{\partial x_i} + \frac{\partial G}{\partial \eta_2} \frac{\partial \eta_2}{\partial x_i} + \frac{\partial G}{\partial \eta_3} \frac{\partial \eta_3}{\partial x_i} \quad (3)$$

und durch Differenzieren nach  $y_i$ , da  $\frac{\partial \eta_i}{\partial y_i} = v$ ,  $\frac{\partial \eta_k}{\partial y_i} = 0$ , für Punkte von  $G=0$ :

$$\frac{\partial G}{\partial \eta_i} = v^{n_1-1} \frac{\partial G}{\partial y_i}. \quad (4)$$

Die drei Gruppen, in welche die Schnittpunkte von  $\mathfrak{L}=0$  mit  $F=0$  zerfallen, sind nun folgende:

- 1) Nach (2) ist  $\mathfrak{L}=0$ , sobald die drei  $\eta_i=0$  sind, d. h. in den Punkten  $\delta$  und  $\varepsilon$  und es hat  $\mathfrak{L}=0$  in jedem der  $r$  Doppelpunkte  $\delta$  von  $F=0$  einen  $n_1-2$ -fachen Punkt, in jedem der  $s$  einfachen Punkte  $\varepsilon$  von  $F=0$  einen  $n_1-1$ -fachen Punkt, wie sich daraus ergibt, dass die linke Seite in (2), nämlich  $G(\eta_1, \eta_2, \eta_3)$  in jedem der Punkte  $\delta$  und  $\varepsilon$   $n_1$ -fach verschwindet, während auf

1) Clebsch-Gordan, Abelsche Functionen S. 54.

der rechten Seite  $F$  in jedem der Punkte  $\delta$  2-fach, in jedem der Punkte  $\varepsilon$  einfach verschwindet. Die Zahl derjenigen Schnittpunkte von  $\mathfrak{L} = 0$  mit  $F = 0$ , die in die Punkte  $\delta$  und  $\varepsilon$  fallen, ist daher

$$(5) \quad = 2r(n_1 - 2) + s(n_1 - 1).$$

- 2) Nach (3) ist  $\mathfrak{L} = 0$  in den Punkten von  $F = 0$ , für die  $\frac{\partial G}{\partial \eta_i} = 0$  ( $i = 1, 2, 3$ ) oder nach (4) in solchen Punkten, für welche  $\nu = 0$  und für welche  $\frac{\partial G}{\partial y_i} = 0$  ( $i = 1, 2, 3$ ) ist. Den letzteren Punkten ( $\frac{\partial G}{\partial y_i} = 0$ ) entsprechen nach (II) § 21 die Doppelpunkte von  $F = 0$ ; diese sind bereits in Nr. 1 gezählt. Die ersteren Punkte ( $\nu = 0$ ) bestehen aus denjenigen  $r_1$  Punktepaaren oder  $2r_1$  Punkten auf  $F = 0$ , welche in Doppelpunkte von  $G = 0$  übergehen; die Zahl derselben ist also

$$(6) \quad = 2r_1.$$

- 3) Nach (3) ist für gewisse Schnittpunkte von  $\mathfrak{L} = 0$  mit  $F = 0$  auch die Functionaldeterminante  $H$  der drei Functionen  $\eta_i$  Null, also

$$(7) \quad H = \sum \pm \frac{\partial \eta_1}{\partial x_1} \frac{\partial \eta_2}{\partial x_2} \frac{\partial \eta_3}{\partial x_3} = 0.$$

Da der Grad dieser Gleichung in den  $x_i$  gleich  $3(\sigma - 1)$ , so ist die Zahl der Schnittpunkte von  $H = 0$  mit  $F = 0$  gleich  $3n(\sigma - 1)$ . Unter ihnen befinden sich auch die Punkte  $\delta$  und  $\varepsilon$ , die bereits in Nr. 1 gezählt und daher abzurechnen sind. Nun hat die Curve  $H = 0$  nach Hilfssatz IV § 21 in jedem der  $r$  Doppelpunkte  $\delta$  und ebenso in jedem der  $s$  einfachen Punkte  $\varepsilon$  von  $F = 0$  einen Doppelpunkt. Von den Schnittpunkten von  $H = 0$  mit  $F = 0$  fallen also  $4r + 2s$  in die Punkte  $\delta$  und  $\varepsilon$ . Daher ist die Zahl der noch übrigen Schnittpunkte

$$(8) \quad = 3n(\sigma - 1) - 4r - 2s.$$

Da nun die Zahl (2a) sich aus den Zahlen (5), (6) und (8) zusammensetzt, so hat man die Gleichung

$$n(n_1\sigma - n) = 2r(n_1 - 2) + s(n_1 - 1) + 2r_1 + 3n(\sigma - 1) - 4r - 2s,$$

die mit Hilfe von (10) § 21 übergeht in

$$n_1^2 - 3n_1 - 2r_1 = n^2 - 3n - 2r,$$

d. h. in die Gleichung (1). (q. e. d.)



Es sind ferner die Moduln einer Klasse von algebraischen Gleichungen zu untersuchen, d. h. diejenigen Combinationen der Coefficienten einer Gleichung  $F(x, y) = 0$  der Klasse, die eindeutigen Transformationen gegenüber invariant sind. Hier gilt der Satz:

(II) Eine Klasse von algebraischen Gleichungen besitzt  $3p - 3$  Moduln<sup>1)</sup>.

Ausgenommen ist der Fall der elliptischen Functionen ( $p = 1$ ), für welchen die Zahl der Moduln gleich 1 ist.

Ein erster Beweis dieses Satzes ist folgender. Nach § 21 sei die ursprüngliche Gleichung  $F(x, y) = 0$  vom Grade  $n$  durch die Substitution  $x_1 = \eta_1 : \eta_3$ ;  $y_1 = \eta_2 : \eta_3$  in eine Gleichung  $F_1(x_1, y_1) = 0$  vom Grade  $n_1$  übergeführt. Beide Gleichungen haben dasselbe Geschlecht  $p$ . Daher ist die Zahl  $r_1$  der Doppelpunkte von  $F_1 = 0$   $r_1 = \frac{1}{2}(n_1 - 1)(n_1 - 2) - p$  und die Zahl der nicht homogenen Coefficienten in  $F_1 = 0$

$$\frac{1}{2}n_1(n_1 + 3) - \frac{1}{2}(n_1 - 1)(n_1 - 2) + p = 3n_1 + p - 1.$$

Diesen Coefficienten lassen sich durch passende Bestimmung der Coefficienten in den transformirenden Gleichungen zum Theil beliebige Werthe geben. Die übrigen Coefficienten von  $F_1$ , die numerisch feste Werthe haben, sind die Moduln. Die transformirenden Functionen  $x_1 = \eta_1 : \eta_3$  und  $y_1 = \eta_2 : \eta_3$  aber sind von der Ordnung  $n_1$  und enthalten im Ganzen  $3n_1 - 2p + 2$  freie oder willkürliche Constanten, nämlich die  $n_1$  Coordinaten der gemeinsamen  $\infty^1$  Punkte von  $x_1$  und  $y_1$  und  $n_1 - p + 1$  homogene Coefficienten im Zähler jeder dieser Functionen (§ 12 Satz Ib). Die Zahl der Moduln ist daher

$$3n_1 + p - 1 - (3n_1 - 2p + 2) = 3p - 3.$$

Dasselbe ergibt sich so. Man verbinde  $F(x, y) = 0$  nur mit der ersten Function  $x_1 = \eta_1 : \eta_3$  von der Ordnung  $n_1$ . Die Elimination von  $y$  gibt nach dem Obigen eine Gleichung zwischen  $x_1$  und  $x$  von Grade  $n$  in  $x_1$  und  $n_1$  in  $x$ . Betrachtet man  $x_1$  als die unabhängige Variable, so sind  $x$  und  $y$  eindeutige Functionen in der über der  $x_1$ -Ebene  $n_1$ -blättrig ausgebreiteten Fläche  $T_{x_1}$ . Nun ist die Zahl der einfachen Verzweigungspunkte in  $T_{x_1}$  gleich  $2n_1 + 2p - 2$  (§ 2, Gl. 8). Die Function  $x_1 = \eta_1 : \eta_3$  aber führt  $2n_1 - p + 1$  willkürliche

1) Riemann, Ges. W. S. 113. Ausser dem obigen ersten, algebraischen Beweis dieses Satzes gibt Riemann noch einen zweiten, transcendenten Beweis l. c. S. 114.

Constanten mit sich. Daher ist die Zahl der einfachen Verzweigungspunkte in  $T_{x_1}$ , denen sich durch diese Transformation beliebige Lagen geben lassen, gleich  $2n_1 - p + 1$  und die Zahl der festen Verzweigungspunkte in  $T_{x_1}$  oder die Zahl der Klassenmoduln, wie oben,

$$= (2n_1 + 2p - 2) - (2n_1 - p + 1) = 3p - 3.$$

Die vorstehende Bestimmung der Anzahl der Moduln einer Klasse vom Geschlecht  $p$  setzt voraus, was nur für  $p > 1$  zutrifft, dass es in  $T_{x_1}$   $2n_1 - p + 1$  einfache Verzweigungspunkte gibt, deren Coordinaten von einander unabhängige Functionen der willkürlichen Constanten in der Function  $x_1$  sind. Der directe Nachweis für diese Unabhängigkeit ist indess schwierig; wir geben daher noch einen anderen Beweis des Satzes II.

Der zweite Beweis<sup>1)</sup> macht Gebrauch davon, dass bei der eindeutigen Transformation die Quotienten der  $\Phi$ -Functionen oder die Schnittpunktsysteme der  $\Phi$ -Curven erhalten bleiben (§ 23).

Sei wie früher in homogener Form  $F(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \overline{x_3}) = 0$  die ursprüngliche,  $G(\overline{y_1}, \overline{y_2}, \overline{y_3}) = 0$  die transformirte Curve einer Klasse vom Geschlecht  $p$ . Man bilde adjungirte Curven von  $F = 0$  des  $n - 3^{\text{ten}}$  Grades, die  $F = 0$  in einem Punkte  $p - 1$ -punktig berühren (d. h. in  $p$  zusammenfallenden Punkten schneiden). Solche Berührungscurven hängen offenbar nur von den Coefficienten von  $F = 0$  ab und existiren, sobald  $p > 1$  ist, in endlicher Zahl, da es andernfalls  $p + 1$  linear unabhängige  $\Phi$ -Curven geben müsste. (Die Zahl der Lösungen ist  $=(p-1)p(p+1)$ .) Sei  $\Phi_1$  eine dieser Curven und  $\xi_i$  ( $i=1, \dots, p-2$ ) die  $p - 2$  Punkte, in welchen dieselbe  $F = 0$  ausser den Doppelpunkten noch schneidet. Durch die  $p - 2$  Punkte  $\xi_i$  kann man nun ein Büschel von adjungirten Curven  $n - 3^{\text{ten}}$  Grades legen,  $\Phi_1 + k\Phi$ , mit dem Parameter  $k$ . In diesem Büschel existiren  $4p - 2$  Curven, die  $F = 0$  in 1 Punkt berühren. Denn die Berührungspunkte der Büschelcurven sind die Schnittpunkte, welche  $F = 0$  mit der Jacobischen Curve der drei Functionen  $\Phi, \Phi_1, F'$ , d. h. mit der Curve

$$\mathcal{A} = \sum \pm \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_2} \frac{\partial F'}{\partial x_3} = 0$$

besitzt, mit Ausnahme derjenigen unter diesen Schnittpunkten, die in feste Punkte von  $F = 0$  fallen. Die Curve  $\mathcal{A} = 0$  ist vom Grade  $n - 4 + n - 4 + n - 1 = 3(n - 3)$ , hat also mit  $F = 0$   $3n(n - 3)$

1) Brill u. Nöther, Mathem. Ann. Bd. VII. S. 302. Denselben Weg hat schon früher in Vorlesungen Herr Weierstrass eingeschlagen.

Schnittpunkte. Von diesen fallen nach dem Hilfssatze (VI § 21) 6 in jeden der  $r$  Doppelpunkte von  $F=0$  und 2 in jeden der  $p-2$  Punkte  $\xi_i$ . Daher ist die Zahl der mit dem Parameter  $k$  veränderlichen Schnittpunkte

$$3n(n-3) - 2(p-2) - 6r = 4p - 2.$$

Von den  $4p-2$  Berührungscurven des Büschels  $\Phi_1 + k\Phi = 0$  fallen nun  $p-1$  mit der Curve  $\Phi_1 = 0$  zusammen. An die übrigen  $3p-1$  einfach berührenden Curven lege man in einem der Basispunkte des Büschels, etwa in  $\xi_i$ , die  $3p-1$  Tangenten  $t$ , die mit der Tangente von  $\Phi_1 = 0$  in  $\xi_i$  eine binäre Form der Ordnung  $3p$  bestimmen. Die aus den  $3p$  Parametern  $k$  dieses Tangentenbüschels  $t$  gebildeten  $3p-3$  Doppelverhältnisse  $\lambda$ , welche (irrationale) Functionen der Coefficienten von  $F=0$  allein und im Allgemeinen von einander unabhängig sind (s. den Schluss dieses §), bleiben nun bei eindeutiger Transformation unverändert und können daher als die  $3p-3$  Klassenmoduln angesehen werden. In der That, die eindeutige Transformation führt jede Berührungscurve von  $F=0$  in eine ebenso berührende Curve von  $G=0$  über. Daher hat man, entsprechend den  $3p$  Büscheltangenten  $t$  durch den Punkt  $\xi_i$  auf  $F=0$ ,  $3p$  Büscheltangenten  $\tau$  durch einen Punkt  $\eta_i$  auf  $G=0$ . Die Büschel  $t$  und  $\tau$  sind eindeutig auf einander bezogen und folglich perspectivisch, da im binären Gebiet jede eindeutige Transformation linear ist. Die  $3p-3$  Doppelverhältnisse  $\lambda$  des Büschels  $t$  von  $F=0$  sind daher gleich den entsprechend gebildeten Doppelverhältnissen des Büschels  $\tau$  von  $G=0$ . (q. e. d.)

Der Satz II lässt sich umkehren in folgender Weise<sup>1)</sup>:

(III) Durch die Werthe der  $3p-3$  Moduln  $\lambda$  ist eine Klasse von algebraischen Gleichungen vom Geschlecht  $p$  bestimmt und zwar in endlich vieldeutiger Weise, da die  $\lambda$  irrationale Functionen der Coefficienten von  $F=0$  sind.

Um aus den  $3p-3$  gegebenen Moduln  $\lambda$  eine zugehörige, algebraische Curve zu bilden, stellen wir eine Vorbetrachtung an. Aus

der allgemeinen Form  $F(\overbrace{x_1, x_2, x_3}^n) = 0$  erhält man durch eindeutige Transformation eine Curve  $G(y_1, y_2, y_3) = 0$  von derselben Allgemeinheit, aber von specieller Form in folgender Weise.

Man lege durch  $p-3$  der oben bestimmten  $p-2$  Punkte  $\xi_i$  von  $F=0$  eine  $\Phi$ -Curve, die von der Form ist  $l_1\Phi_1 + l_2\Phi_2 + l_3\Phi_3 = 0$  und bilde aus den 3 hier auftretenden Functionen  $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3$ , von

<sup>1)</sup> Brill u. Nöther, Math. Ann. Bd. 7, S. 303 (1873). Vgl. auch Cayley, Proc. of the London Math. Soc. Vol. I. 1865.

denen die erste die oben verwandte,  $p - 1$ -punktig berührende  $\Phi$ -Function sei, die Quotienten  $\Phi_1 : \Phi_3 = y_1 : y_3$  und  $\Phi_2 : \Phi_3 = y_2 : y_3$  von der Ordnung  $p + 1$  in den  $x_i$ . Benutzt man diese zur Transformation von  $F = 0$ , so hat die transformirte Curve  $G(y_1, y_2, y_3) = 0$  den Grad  $p + 1$  und  $\frac{1}{2}p(p - 3)$  Doppelpunkte; ausserdem aber die Eigenthümlichkeit, dass sie einen Punkt besitzt (der dem Berührungspunkt von  $\Phi_1 = 0$  mit  $F = 0$  entspricht), in welchem eine gerade Linie  $y_1 = 0$  (die der Curve  $\Phi_1 = 0$  entspricht)  $p - 1$ -punktig berührt. Diese Gerade  $y_1 = 0$  schneidet  $G = 0$  noch in einem Punkt  $P$ , von dem aus nach dem Obigen noch  $3p - 1$  Tangenten an die Curve  $G = 0$  gehen. Die  $3p - 3$  Doppelverhältnisse der so bestimmten  $3p$  Geraden sind für  $G = 0$  die oben angegebenen Moduln  $\lambda$ . Nach dieser Vorbetrachtung sei nun umgekehrt die soeben charakterisirte Curve  $G(y) = 0$  vom Grade  $p + 1$  gesucht und zu ihrer Bildung seien die Werthe von  $3p - 3$  Moduln  $\lambda$  von der dargelegten Bedeutung beliebig gegeben. Um  $G = 0$  zu finden, wähle man einen beliebigen Punkt  $P$  und ziehe durch ihn 3 beliebige und  $3p - 3$  weitere Gerade, welche mit den 3 ersten die  $3p - 3$  gegebenen Doppelverhältnisse bilden. Legt man nun einer Curve  $G = 0$  von dem Grad  $p + 1$  die Bedingungen auf,  $\frac{1}{2}p(p - 3)$  Doppelpunkte zu haben, durch den Punkt  $P$  zu gehen, die  $3p$  genannten Geraden zu berühren und zwar eine von ihnen  $p - 1$ -punktig, so ist die Zahl der noch willkürlichen Coefficienten von  $G = 0$  gleich

$$\frac{1}{2}(p + 1)(p + 4) - \frac{1}{2}p(p - 3) - (4p - 2) - 1 = 3.$$

Sei aber  $G' = 0$  die Gleichung einer beliebigen Curve, welche diesen Bedingungen genügt, und seien  $y_1 = 0$ ,  $y_2 = 0$  die Coordinaten des Punktes  $P$ , so werden unsere Bedingungen auch noch durch jede Curve  $G = 0$  erfüllt, welche aus  $G' = 0$  durch die lineare Transformation

$$\varrho z_1 = y_1 \quad \varrho z_2 = y_2 \quad \varrho z_3 = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \alpha_3 y_3$$

entsteht. Diese Curve  $G = 0$  enthält drei willkürliche Constanten. Daraus folgt, dass alle Curven, welche jenen Bedingungen genügen, aus einer endlichen Zahl von Curven  $G' = 0$  durch lineare Transformation müssen abgeleitet werden können. (q. e. d.)

Zugleich folgt aus diesem Beweise, dass die  $3p - 3$  Moduln  $\lambda$  von einander unabhängig sind, eine Frage, die beim zweiten Beweis des Satzes II noch offen geblieben war.

### § 23. Die invarianten Formen der Grundgleichung, der rationalen Functionen und der Abel'schen Integrale.

Wir wenden uns zur Untersuchung der Functionen von  $(x, y)$ , die bei eindeutiger Transformation von  $F(x, y) = 0$  invariant sind. Die Grundlage bildet der Satz:

(I) Bei der eindeutigen Transformation, die  $F(x, y) = 0$  in  $G(x_1, y_1) = 0$  überführt, geht der Quotient zweier adjungirter Functionen von  $F = 0$  des  $(n - 3)^{\text{ten}}$  Grades:  $\Phi(x, y) : \Phi_1(x, y)$  in den Quotienten zweier adjungirter Functionen von  $G = 0$  des  $(n_1 - 3)^{\text{ten}}$  Grades:  $\Psi(x_1, y_1) : \Psi_1(x_1, y_1)$  über.

Dieser Satz folgt unmittelbar aus dem Umstande, dass durch die eindeutige Transformation jedes Integral 1. Gattung in ein ebensolches Integral übergehen muss<sup>1)</sup>, dass also die Gleichungen bestehen

$$\frac{\Phi(x, y) dx}{F'(y)} = \frac{\Psi(x_1, y_1) dx_1}{G'(y_1)}, \quad \frac{\Phi_1(x, y) dx}{F'(y)} = \frac{\Psi_1(x_1, y_1) dx_1}{G'(y_1)},$$

woraus

$$\Phi(x, y) : \Phi_1(x, y) = \Psi(x_1, y_1) : \Psi_1(x_1, y_1). \quad (\text{q. e. d.}) \quad (1)$$

Um den Beweis rein algebraisch zu führen, benutzt man homogene Coordinaten (s. § 21) und zeigt, dass die Function  $\Psi(y_1, y_2, y_3) = \Psi(y)$  oder auch  $\Psi(\eta_1, \eta_2, \eta_3) = \Psi(\eta)$  mit der Function  $\Phi(x_1, x_2, x_3) = \Phi(x)$  übereinstimmt bis auf einen Factor, der nur von den früher eingeführten Functionen  $\mathfrak{L}$  (Gl. 7 § 21) und  $H$  (Gl. 7 § 22) abhängt. Es

besteht nämlich, wenn eine adjungirte Function  $\Psi(y)$  von  $G(y) = 0$  gegeben ist, eine identische Gleichung von der Form

$$H\Psi(\eta) = \mathfrak{L}\Phi(x) + CF(x) \quad (2)$$

und von der Art, dass  $\Phi(x)$  eine adjungirte Function des  $(n - 3)^{\text{ten}}$  Grades von  $F = 0$  und  $C$  eine ganze, rationale, homogene Function von  $(x_1, x_2, x_3)$  ist. Hieraus folgt aber, wenn man die Voraussetzung  $F(x) = 0$  oder  $G(y) = 0$  hinzufügt, die Gleichung

$$v^{n_1-3}\Psi(y) = \Psi(\eta) = \mathfrak{L}\Phi(x) : H. \quad (3)$$

Zum Beweise der Identität (2) ist der in § 8 historisch angeführte Satz (II) mit den in § 22 über die Schnittpunkte von  $F = 0$  mit  $\mathfrak{L} = 0$  und  $H = 0$  entwickelten Sätzen zu verbinden.

1) Riemann, Ges. W. S. 111; Clebsch und Gordan, Ab. F. S. 51 (vgl. Gl. 16 d. §). In expliciter Form wurde der Satz zuerst benutzt von Brill und Nöther, Math. Ann. Bd. VII S. 284 u. 285. Den obigen algebraischen Beweis gibt Nöther, Math. Ann. Bd. XVII S. 263 ff.

Nach (7) § 22 hat

$H = 0$  einen Doppelpunkt in jedem der  $r$  Punkte  $\delta$  und der  $s$  Punkte  $\varepsilon$  und

einen einfachen Punkt in gewissen  $3n(\sigma - 1) - 4r - 2s$  Punkten  $\xi$ , die nicht in die Punkte  $\delta$  und  $\varepsilon$  fallen. Ferner hat

$\Psi(\eta) = 0$  einen einfachen Punkt in jedem der  $2r_1$  Punkte  $\xi$  von  $F = 0$ , die bei der Transformation paarweise in einen Doppelpunkt von  $G = 0$  übergehen und

einen  $n_1 - 3$ -fachen Punkt in jedem der Punkte  $\delta$  und  $\varepsilon$ , endlich

einen einfachen Punkt in jedem von  $2p - 2$  weiteren Punkten  $\tau$  von  $F = 0$ .

Folglich hat

$H\Phi(\eta) = 0$  einen  $n_1 - 1$ -fachen Punkt in jedem der Punkte  $\delta$  und  $\varepsilon$  und einen einfachen Punkt in jedem der Punkte  $\xi$  und  $\zeta$ .

Dagegen hat nach den Abzählungen des § 22

$\mathfrak{L} = 0$  einen  $n_1 - 2$ -fachen Punkt in jedem der  $r$  Punkte  $\delta$  und einen  $n_1 - 1$ -fachen Punkt in jedem der  $s$  Punkte  $\varepsilon$ ; ferner einen einfachen Punkt in jedem der  $2r_1$  Punkte  $\xi$  und einen einfachen Punkt in jedem der Punkte  $\zeta$ .

Es geht also  $H\Psi(\eta) = 0$  durch jeden der einfachen Punkte  $\xi$  und  $\zeta$  von  $F = 0$ , die einfachen Punkte von  $\mathfrak{L} = 0$  sind, einfach; ferner durch jeden der  $s$  einfachen Punkte  $\varepsilon$  von  $F = 0$ , die  $n_1 - 1$ -fache Punkte von  $\mathfrak{L} = 0$  sind,  $n_1 - 1$ -fach; endlich durch jeden der  $r$  Doppelpunkte  $\delta$  von  $F = 0$ , die  $n_1 - 2$ -fache Punkte von  $\mathfrak{L} = 0$  sind,  $n_1 - 1$ -fach hindurch. Damit sind aber die Bedingungen erfüllt, unter denen nach § 8 Satz (II) eine Gleichung von der Form (2) besteht.

Nun ist der Grad von  $H$  gleich  $3(\sigma - 1)$ , der von  $\Psi(\eta)$  gleich  $\sigma(n_1 - 3)$ , der von  $\mathfrak{L}$  gleich  $n_1\sigma - n$ , daher nach (2) der Grad von  $\Phi(x)$  gleich  $n - 3$ . Ausserdem ist  $\Phi(x) = 0$  zu  $F = 0$  adjungirt. Denn in einem Doppelpunkt  $\delta$  von  $F = 0$  hat  $H\Psi(\eta) = 0$  einen  $n_1 - 1$ -fachen Punkt,  $\mathfrak{L} = 0$  nur einen  $n_1 - 2$ -fachen Punkt, also  $\Phi(x) = 0$  einen einfachen Punkt. (q. e. d.)

Der Satz (I) von der Erhaltung der  $\Phi$ -Quotienten bei eindeutiger Transformation führt zunächst dazu, der algebraischen Grundgleichung  $F(x, y) = 0$  eine invariante Form zu geben, d. h. eine Form, die sich bei weiterer eindeutiger Transformation nicht mehr ändert. Man erhält diese Form, indem man an Stelle der Variablen  $x$  und  $y$  zwei zu  $F = 0$  gehörige, linear unabhängige  $\Phi$ -Quotienten mit demselben Nenner einführt. Da auch die rationalen Functionen von

$(x, y)$  der niedersten Ordnung durch  $\Phi$ -Quotienten dargestellt werden (§ 12), so erhält man durch diese Transformation auch eine Normalform der Grundgleichung, die zugleich invariant und vom niedersten Grade ist.

Sind  $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3$  drei beliebige adjungirte Functionen  $n - 3^{\text{ten}}$  Grades von  $F = 0$ , zwischen denen keine identische Gleichung ersten oder höheren Grades besteht, und setzt man

$$z_1 : z_2 : z_3 = \Phi_1(x, y) : \Phi_2(x, y) : \Phi_3(x, y), \quad (4)$$

so geht  $F(x, y) = 0$ , da die  $\Phi$ -Quotienten im Allgemeinen von der Ordnung  $n_1 = 2p - 2$  sind, nach § 21 in eine homogene Gleichung zwischen  $z_1, z_2, z_3$  über von der Form

$$K(z_1, z_2, z_3) = 0^1 \quad (5)$$

und die Zahl  $r_1$  der Doppelpunkte dieser Curve, die sich nach (I) § 22 aus den Formeln  $r_1 = \frac{1}{2}(n_1 - 1)(n_1 - 2) - p$  und  $n_1 = 2p - 2$  bestimmt, wird

$$r_1 = 2(p - 1)(p - 3), \quad (6)$$

sodass für die transformirte Gleichung (5) sowohl der Grad, wie die Zahl der Doppelpunkte nur vom Geschlecht  $p$  abhängig sind.

Durch besondere Wahl der Functionen  $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3$  in (4) kann man den Grad der Gleichung  $K = 0$  (5) erniedrigen, zunächst in folgender Weise. Man wähle auf  $F = 0$   $p - 3$  beliebige Punkte. Für sie verschwinden noch 3 linear unabhängige  $\Phi$ -Functionen. Benutzt man die Quotienten derselben zur eindeutigen Transformation, so wird der Grad  $n_1$  der transformirten Curve  $K = 0$  nach (10) § 21, da hier  $\sigma = n - 3$ ,  $s = p - 3$  und  $n(n - 3) - 2r = 2p - 2$  ist,

$$n_1 = n(n - 3) - 2r - (p - 3) = p + 1;$$

zugleich wird

$$r_1 = \frac{1}{2}p(p - 3),$$

d. h.: Eine Curve  $F = 0$  vom Geschlecht  $p$  lässt sich in eine Curve  $K = 0$  vom Grad  $p + 1$  mit  $\frac{1}{2}p(p - 3)$  Doppelpunkten transformiren durch Quotienten von drei  $\Phi$ -Functionen, die durch  $p - 3$  beliebig auf  $F = 0$  gewählte Punkte gehen<sup>2)</sup>.

1) Riemann, Ges. W. S. 459.

2) Clebsch-Gordan, Ab. F. S. 65.

Diese Transformation ist unmöglich, wenn  $p = 0, 1, 2$  ist; ausserdem bilden nur die hyperelliptischen Curven eine Ausnahme, worauf wir nicht näher eingehen.

Um indess die Normalform niedersten Grades zu erhalten, hat man zur Transformation von  $F = 0$  zwei linear unabhängige  $\Phi$ -Quotienten von demselben Nenner und von möglichst niederer Ordnung zu verwenden. Nun wurde in § 12 Satz III die Aufgabe gelöst, den Quotienten zweier  $\Phi$ -Functionen zu bilden, der von möglichst niederer Ordnung ist, aber im Zähler noch drei homogene, lineare Coefficienten enthält, also von der Form ist  $(\lambda_1 \Phi_1 + \lambda_2 \Phi_2 + \lambda_3 \Phi_3) : \Phi_3$ . Verwendet man die durch eine solche Bestimmung gewonnenen Functionen  $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3$  zur Transformation (4), so erhält man die Normalform niedersten Grades. Die niederste Ordnung  $n_1$  solcher Quotienten ergibt sich aus der Tabelle (7) § 11, wenn man  $q_2 = 3$  setzt. Es wird  $n_1 = p - q_1 + 2$ , also für  $p = 3q_1, 3q_1 + 1, 3q_1 + 2$  bez.  $n_1 = 2q_1 + 2, 2q_1 + 3, 2q_1 + 4$ . Die Zahl  $r_1$  der Doppelpunkte der transformirten Gleichung  $K = 0$  bestimmt sich aus  $r_1 = \frac{1}{2}(n_1 - 1)(n_1 - 2) - p$ . Daher hat man den Satz:

(II) Eine Curve  $F(x, y) = 0$  vom Grade  $n$  und vom Geschlecht  $p$  lässt sich stets durch Quotienten von drei  $\Phi$ -Functionen  $z_1, z_2, z_3$  in eine Normalform niedersten Grades verwandeln, die, wenn  $p \geq 3, q_1 \geq 1$ , lautet<sup>1)</sup>:

$$(7) \quad \begin{cases} \text{für } p = 3q_1 & K(\frac{z_1 + z_2}{z_1, z_2, z_3}) = 0 & r_1 = 2q_1(q_1 - 1) \\ \text{„ } p = 3q_1 + 1 & K(\frac{z_1 + z_3}{z_1, z_1, z_3}) = 0 & r_1 = 2q_1^2 \\ \text{„ } p = 3q_1 + 2 & K(\frac{z_1 + z_4}{z_1, z_2, z_3}) = 0 & r_1 = 2q_1^2 + 2q_1 + 1. \end{cases}$$

Auch diese Transformation beginnt erst mit dem Geschlecht  $p \geq 3$ , da nur für solche Werthe von  $p$  drei linear unabhängige  $\Phi$ -Functionen existiren. In den Fällen  $p = 0, 1, 2$  hat man aus allgemeinen, adjungirten Functionen zwei linear unabhängige Quotienten mit demselben Nenner und von möglichst niederer Ordnung zu bilden und zur Transformation zu verwenden. Die niederste Ordnung  $n_1$  einer Function, die im Zähler noch drei lineare, homogene Coefficienten enthält, bestimmt sich nach (Ib § 12) aus  $n_1 - p + 1 = 3$ . Daher hat man für  $p = 0, 1, 2$  als niedersten Werth von  $n_1$  bez. 2, 3, 4 und

1) Die Gleichungen (7) wurden zuerst von Riemann (Ges. W. S. 116) in anderer Form angegeben; die obige Form und Herleitung findet sich bei Brill-Nöther, Math. Ann. Bd. VII S. 299 (1873).



als zugehörigen Werth von  $r_1$  bez. 0, 0, 1. Hieraus folgt, dass die Gleichungen (7) auch für  $q_1 = 0$  oder für  $p = 0, 1, 2$  gelten; nur mit dem Unterschied, dass alsdann die Transformation nicht mehr durch  $\Phi$ -Quotienten geleistet wird und die transformirte Gleichung nicht mehr invariant ist.

Es ist klar, dass die rationalen Functionen von  $(x, y)$  und ihre Integrale bei eindeutiger Transformation von  $F(x, y) = 0$  in eben solche Functionen und Integrale übergehen mit entsprechenden Unstetigkeitspunkten<sup>1)</sup>. Durch Einführung von  $\Phi$ -Quotienten an Stelle der Variablen  $(x, y)$  erhalten nun, wie die Grundgleichung  $F(x, y) = 0$  selber, auch die zu ihr gehörigen, rationalen Functionen und Abel'schen Integrale eine Form, die der eindeutigen Transformation gegenüber absolut invariant ist.

Eine zu der Gleichung  $F(x, y) = 0$  gehörige, rationale Function  $M_1(x, y) : M(x, y)$  führt man zunächst durch die Substitution  $x = x_1 : x_3$ ;  $y = x_2 : x_3$  in eine homogene Form der 0<sup>ten</sup> Dimension in  $(x_1, x_2, x_3)$  über:  $M_1(x_1, x_2, x_3) : M(x_1, x_2, x_3)$  oder abgekürzt  $M_1(x) : M(x)$ , welche zu der homogenen Gleichung  $F(x_1, x_2, x_3) = 0$  oder  $F(x) = 0$  gehört. Wendet man nun die eindeutige Transformation an, die  $F(x) = 0$  in  $G(y) = 0$  überführt (§ 21), so geht  $M_1(x) : M(x)$  über in eine ähnliche Function der 0<sup>ten</sup> Dimension in  $(y_1, y_2, y_3)$ :  $N_1(y) : N(y)$ . Führt man aber an Stelle von  $(x_1, x_2, x_3)$  drei linear unabhängige  $\Phi$ -Functionen ein mittels der Gleichungen (4), so geht  $M_1(x) : M(x)$  in eine zu der invarianten Grundgleichung  $K(z) = 0$  gehörige rationale Function der 0<sup>ten</sup> Dimension in  $(z_1, z_2, z_3)$ :  $P_1(z) : P(z)$  über, die jeder weiteren, eindeutigen Transformation gegenüber invariant ist, weil bei einer solchen die Verhältnisse der Grössen  $z_1, z_2, z_3$  nach (I) ungeändert bleiben. Daher der Satz:

(III) Eine zu  $F(x, y) = 0$  gehörige, rationale Function  $M_1(x, y) : M(x, y)$  wird invariant für eindeutige Transformation, sobald sie durch eine Substitution der Form (4) als homogene, rationale Function der 0<sup>ten</sup> Dimension in drei zu  $F = 0$  gehörigen  $\Phi$ -Functionen  $z_1, z_2, z_3$  dargestellt ist.

Wie der rationalen Function gibt man auch dem zu  $F(x, y) = 0$  gehörigen Abel'schen Integral für die eindeutige Transformation zweckmässig eine homogene Form. Unter der Voraussetzung, dass kein Unstetigkeitspunkt des Integrals in einen der Punkte  $(x = \infty, y = \infty)$  falle, hat das allgemeine Abel'sche Differential nach (2a) § 17 die Form

1) Riemann, Ges. W. S. 111.

$$(8) \quad dU = \frac{M_1(x, y)}{M(x, y)} \cdot \frac{\Phi(x, y) dx}{F''(y)} = - \frac{M_1(x, y)}{M(x, y)} \cdot \frac{\Phi(x, y) dy}{F''(x)},$$

wo  $M_1$  und  $M$  ganze, rationale Functionen von gleichem Grade in  $(x, y)$  sind und  $\Phi(x, y)$  eine beliebige adjungirte Function  $n - 3^{\text{ten}}$  Grades von  $F' = 0$  ist. Auch das Differential 1. Gattung ist in der Form (8) mitenthalten, sobald man  $M_1 : M$  gleich einer Constanten setzt.

Macht man die Substitution  $x = x_1 : x_3$ ,  $y = x_2 : x_3$ , wodurch  $F(x, y) = x_3^{-n} F(x)$   $F'(x) = x_3^{-n+1} F'(x_1)$   $F'(y) = x_3^{-n+1} F'(x_2)$

$$M_1(x, y) : M(x, y) = M_1(x) : M(x) \quad \Phi(x, y) = x_3^{-n+3} \Phi(x)$$

und

$$dx = \frac{x_3 dx_1 - x_1 dx_3}{x_3^2} \quad dy = \frac{x_3 dx_2 - x_2 dx_3}{x_3^2}$$

wird, so erhält man aus (8)

$$(9) \quad dU = \frac{M_1(x) \Phi(x)}{M(x)} \frac{x_3 dx_1 - x_1 dx_3}{F''(x_2)} = \frac{M_1(x) \Phi(x)}{M(x)} \frac{x_2 dx_3 - x_3 dx_2}{F''(x_1)}.$$

Nun folgt aus

$$F'(x_1)x_1 + F'(x_2)x_2 + F'(x_3)x_3 = 0$$

$$F'(x_1)dx_1 + F'(x_2)dx_2 + F'(x_3)dx_3 = 0$$

die Proportion

$$x_2 dx_3 - x_3 dx_2 : x_3 dx_1 - x_1 dx_3 : x_1 dx_2 - x_2 dx_1 = F'(x_1) : F'(x_2) : F'(x_3).$$

Sind daher  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  drei beliebige Constanten, so geht (9) über in

$$(10) \quad dU = \frac{M_1(x) \Phi(x)}{M(x)} \cdot \frac{\sum \pm \alpha_i x_i dx_i}{\sum \alpha_i F'(x_i)}.$$

Dies ist die homogene Form des allgemeinen Abel'schen Differentials<sup>1)</sup>; sie enthält nur die Verhältnisse der drei Variabeln  $x_1, x_2, x_3$  und ist dem Werth nach unabhängig von den Constanten  $\alpha_i$ .

Verwandelt sich nun die Gleichung  $F(x) = 0$  durch eindeutige Transformation in  $G(y) = 0$  und  $M_1(x) : M(x)$  in  $N_1(y) : N(y)$ , so geht das Differential (10) in eine ähnliche Form in den  $y_i$  über. In der That kann man die Factoren in (10) in folgender Weise einzeln transformiren<sup>2)</sup>.

Nach (3) ist, wenn man  $\sigma \Phi(x)$  für  $\Phi(x)$  setzt (wo  $\sigma$  der Grad der Functionen  $\eta_i$  in  $(x_1, x_2, x_3)$  ist, vgl. (5) § 21),

$$(11) \quad \frac{M_1(x)}{M(x)} \Phi(x) = \frac{v^{n_1-3}}{\sigma} \frac{N_1(y)}{N(y)} \Psi(y).$$

1) Aronhold, Monatsber. der Berl. Academie 1861.

2) Clebsch u. Gordan, Ab. F. S. 50 (1866).

Ferner ist, wenn  $F(x) = 0$  und  $G(y) = 0$ , nach (7) § 21:

$$\mathfrak{L} F'(x_i) = v^{n_i-1} \sum_k G'(y_k) \frac{\partial \eta_k}{\partial x_i} \quad (i, k = 1, 2, 3),$$

folglich

$$\mathfrak{L} \sum_i \alpha_i F'(x_i) = v^{n_i-1} \sum_k \beta_k G'(y_k), \quad (12)$$

wenn

$$\beta_k = \sum_i \alpha_i \frac{\partial \eta_k}{\partial x_i} \quad (13)$$

gesetzt wird. Endlich ist nach (7) § 22:

$$H \Sigma \pm \alpha_1 x_2 dx_3 = \sigma \Sigma \pm \beta_1 \eta_2 d\eta_3 = \sigma v^2 \Sigma \pm \beta_1 y_2 dy_3. \quad (14)$$

Aus (12) und (14) folgt:

$$\frac{H \sum_i \pm \alpha_1 x_2 dx_3}{\mathfrak{L} \sum_i \alpha_i F'(x_i)} = \frac{\sigma \sum \pm \beta_1 y_2 dy_3}{v^{n_i-3} \sum_k \beta_k G'(y_k)} \quad (15)$$

und durch Multiplication mit (11):

$$dU = \Phi(x) \frac{M_1(x)}{M(x)} \frac{\sum \pm \alpha_1 x_2 dx_3}{\sum_i \alpha_i F'(x_i)} = \Psi(y) \frac{N_1(y)}{N(y)} \frac{\sum \pm \beta_1 y_2 dy_3}{\sum_k \beta_k G'(y_k)}. \quad (16)$$

Hier ist der Ausdruck rechts von ähnlicher Bildung wie der Ausdruck links; denn die Grössen  $\beta_k$  sind nach (13) ebenso willkürlich wie die Grössen  $\alpha_i$ . Zugleich ist ersichtlich, indem man  $M_1(x):M(x)$ , also auch  $N_1(y):N(y)$  gleich einer Constanten setzt, dass ein Integral 1. Gattung durch die Transformation wieder in ein solches Integral übergeht.

Man erhält eine völlig invariante Form für das Abel'sche Differential, wenn man an Stelle von  $(x_1, x_2, x_3)$  drei linear unabhängige

$\Phi$ -Functionen einführt mittels der Gleichungen (4). Dann geht  $F(x) = 0$

über in die invariante Gleichung  $K(z) = 0$  und gleichzeitig das Differential  $dU$  nach (16) in die Form

$$X(z) \frac{P_1(z)}{P(z)} \frac{\sum \pm \gamma_1 z_2 dz_3}{\sum_i \gamma_i K'(z_i)}, \quad (17)$$

wo  $X(z)$  eine adjungirte Function des  $n_1 - 3^{\text{ten}}$  Grades von  $K(z) = 0$  ist. Die Form (17) ist aber jeder weiteren, eindeutigen Transformation gegenüber invariant, weil bei einer solchen die Verhältnisse der Grössen  $z_1, z_2, z_3$  nach (!) ungeändert bleiben. Daher der Satz:

- (IV) Ein zu  $F(x, y) = 0$  gehöriges Abel'sches Differential wird invariant für eindeutige Transformation, sobald es durch eine Substitution der Form (4) homogen in drei zu  $F = 0$  gehörigen  $\Phi$ -Functionen  $z_1, z_2, z_3$  dargestellt ist.

#### § 24. Allgemeinste Form der Grundgleichung und der Abel'schen Integrale.

Die bisherigen Untersuchungen gründeten sich ausschliesslich auf eine einzige homogene Gleichung  $F(x_1, x_2, x_3) = 0$  zwischen 3 Variabeln oder geometrisch auf eine ebene Curve. Man kann diese Grundlage erweitern, indem man die Gleichung  $F = 0$  ersetzt durch 2 homogene Gleichungen zwischen 4 Variabeln, die geometrisch eine Curve im Raum von 3 Dimensionen oder allgemein durch  $\varrho - 1$  homogene Gleichungen zwischen  $\varrho + 1$  Variabeln, die geometrisch eine Curve im Raum von  $\varrho$  Dimensionen darstellen. Diese Auffassung der Theorie der rationalen Functionen und ihrer Integrale, die von Clebsch<sup>1)</sup> herührt, ist von geometrischem Interesse und soll daher kurz behandelt werden.

Sei zunächst eine Raumcurve gegeben, also zwei Gleichungen

$$(1) \quad u_1 = 0 \quad u_2 = 0,$$

homogen in den Variabeln  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$  und bez. vom Grad  $n_1$  und  $n_2$ . Die Curve (1) soll nicht zerfallen und keine singulären Punkte besitzen. Ihr Grad, d. h. die Zahl ihrer Schnittpunkte mit einer beliebigen Ebene im Raum

$$(2) \quad a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4 = 0$$

ist bekanntlich  $= n_1 n_2$ . Verbindet man (1) mit den Gleichungen

$$(3) \quad \begin{cases} (a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4) + x(\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \beta_4 x_4) = 0 \\ (\gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \gamma_3 x_3 + \gamma_4 x_4) + y(\delta_1 x_1 + \delta_2 x_2 + \delta_3 x_3 + \delta_4 x_4) = 0, \end{cases}$$

in denen  $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i$  beliebige Constante,  $x$  und  $y$  variable Grössen sind, und eliminirt die  $x_i$ , so erhält man eine Gleichung in  $(x, y)$  von einem gewissen Grade  $n$

$$(4) \quad F(x, y) = 0.$$

Es ist dies eine der Raumcurve (1) entsprechende ebene Curve. Die Gleichungen (3) stellen zwei Ebenenbüschel mit beliebigen festen Axen dar, deren Parameter  $x$  und  $y$  durch die Gleichung (4) einander so zugeordnet sind, dass die ihnen entsprechenden Ebenen der Büschel (3) sich auf der Curve (1) schneiden.

1) Clebsch, Journ. für Math. Bd. 63. S. 218 ff. (1863).

Die Beziehung zwischen den Punkten der Raumcurve (1) und der ebenen Curve (4) ist eindeutig unter der Voraussetzung, dass sich im Laufe der Elimination der  $x_i$ , die auf (4) führt, Gleichungen der Form

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = \Theta_1 : \Theta_2 : \Theta_3 : \Theta_4 \quad (5)$$

ergeben, wo die  $\Theta_i$  ganze, rationale Functionen von  $(x, y)$  sind von einem gewissen Grad  $\mu$ . Alsdann nämlich entspricht jedem Punkt  $(x_i)$  der Raumcurve (1) nach (3) nur ein Punkt  $(x, y)$  von  $F = 0$  und umgekehrt jedem Punkt  $(x, y)$  von  $F = 0$  nach (5) nur ein Punkt  $(x_i)$  der Raumcurve (1). Den Schnittpunkten von (1) mit der Ebene (2) entsprechen dabei eindeutig die Schnittpunkte der Curve  $F(x, y) = 0$  mit der Curve

$$a_1 \Theta_1 + a_2 \Theta_2 + a_3 \Theta_3 + a_4 \Theta_4 = 0. \quad (6)$$

Haben die Curven  $\Theta_i = 0$  unter sich und mit  $F = 0$   $\nu$  einfache, feste Punkte gemein, so ist die Zahl der beweglichen Schnittpunkte von (4) und (6) gleich  $n\mu - \nu$ . Diese Zahl muss gleich dem Grad der Curve (1) sein, daher besteht zwischen den Zahlen  $n_1, n_2$  und  $n, \mu, \nu$  die Relation  $n_1 n_2 = n\mu - \nu$ .

Das Geschlecht  $p$  der ebenen Curve (4) heisst gleichzeitig das Geschlecht der Raumcurve (1) und ist, durch  $n_1$  und  $n_2$  ausgedrückt<sup>1)</sup>,  $= \frac{1}{2} n_1 n_2 (n_1 + n_2 - 4) + 1$ , eine Zahl, die für  $n_2 = 1$ ,  $n_1 = n$  übergeht in den Ausdruck  $\frac{1}{2} (n-1)(n-2)$ , der das Geschlecht einer ebenen Curve vom Grade  $n$  ohne singuläre Punkte darstellt. Ebenso wie  $p$  die Anzahl der zur ebenen Curve (4) gehörigen, linear unabhängigen Functionen  $\Phi$  vom Grade  $n-3$  angibt, ist  $p$  auch die Zahl der zu der Raumcurve (1) gehörigen, linear unabhängigen Functionen  $\bar{\Phi}$  vom Grade  $n_1 + n_2 - 4$ . Denn sind  $U_2$  und  $U_1$  zwei Functionen bez. vom  $n_1 - 4^{\text{ten}}$  und  $n_2 - 4^{\text{ten}}$  Grade in den  $x_i$ , so kann man  $\bar{\Phi}$  ersetzen durch  $\bar{\Phi} + U_1 u_1 + U_2 u_2$  und die Constanten in  $U_1$  und  $U_2$  so bestimmen, dass ebensoviele Coefficienten in  $\bar{\Phi}$  numerisch feste Werthe annehmen. Daher ist die Zahl der in  $\bar{\Phi}$  enthaltenen, willkürlichen Coefficienten

$$\frac{1}{2} (n_1 + n_2 - 1)(n_1 + n_2 - 2)(n_1 + n_2 - 3) - (n_1 - 1)(n_1 - 2)(n_1 - 3) - (n_2 - 1)(n_2 - 2)(n_2 - 3) \mid \\ = \frac{1}{2} n_1 n_2 (n_1 + n_2 - 4) + 1 = p. \quad (6a)$$

Die angegebenen Bildungen lassen sich unmittelbar auf eine Curve im Raum  $R_q$  von  $q$  Dimensionen ausdehnen. Seien  $q+1$  Variable  $x_1, x_2, \dots, x_{q+1}$  verbunden durch  $q-1$  homogene Gleichungen

1) Clebsch, l. c. S. 220.

$$(7) \quad u_1 = 0 \quad u_2 = 0 \dots u_{q-1} = 0,$$

bez. vom Grade  $n_1, n_2, \dots, n_{q-1}$ . Fügt man die Gleichungen zweier Ebenenbüschel im Raum  $R_q$  mit festen Axen und variablen Parametern  $x, y$  hinzu, so führt die Elimination von  $x_1, \dots, x_{q+1}$  auf eine Gleichung zwischen den Parametern  $F(x, y) = 0$  und bei bestimmten Voraussetzungen hat man gleichzeitig

$$(8) \quad x_1 : x_2 : \dots : x_{q+1} = \Theta_1 : \Theta_2 : \dots : \Theta_{q+1},$$

wo die  $\Theta_i$  ganze, rationale Functionen in  $(x, y)$  sind. Damit ist eine eindeutige Beziehung zwischen der Raumcurve (7) oder (8) und der ebenen Curve  $F = 0$  hergestellt. Das Geschlecht der Curve (7) ist dasselbe, wie das von  $F = 0$  und drückt sich durch die  $n_i$  aus in der Form

$$(9) \quad p = \frac{1}{2} n_1 n_2 \dots n_{q-1} (n_1 + n_2 + \dots + n_{q-1} - q - 1) + 1.$$

Diese Zahl gibt zugleich die Anzahl der zu der Raumcurve (7) gehörigen, linear unabhängigen Functionen vom Grade  $n_1 + n_2 + \dots + n_{q-1} - q - 1$  an.

Es ist nun im Allgemeinen vortheilhafter, nicht von einer beliebigen Curve in einem Raum von höherer Dimension auszugehen und aus ihr die äquivalente, ebene Curve abzuleiten, sondern umgekehrt, von der ebenen Curve  $F(x, y) = 0$  ausgehend, die möglichen, äquivalenten Darstellungen der Raumcurven zu untersuchen. Dabei kommen die früher entwickelten Sätze über die zu  $F(x, y) = 0$  gehörigen, rationalen Functionen von  $(x, y)$  zur Verwendung.

Man bilde zu der Gleichung  $F(x, y) = 0$  vom Grad  $n$  und vom Geschlecht  $p$  eine Reihe von rationalen Functionen in  $(x, y)$  von derselben Ordnung  $m$  und mit beliebigen  $\infty^1$  Punkten. Der gemeinsame Nenner dieser Functionen sei  $\Theta_0$ , die Zähler  $\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_{q+1}$ . Dieselben seien  $F = 0$  adjungirt, von gleichem Grad und linear unabhängig, wozu erforderlich ist, dass  $q \leq m - p$ , da es  $m - p + 1$  linear unabhängige Functionen der Ordnung  $m$  mit willkürlichen  $\infty^1$  Punkten gibt (§ 12 Satz 1b). Setzt man nun

$$(10) \quad x_1 : x_2 : \dots : x_{q+1} = \Theta_1 : \Theta_2 : \dots : \Theta_{q+1},$$

so ist damit eine Curve im Raum  $R_q$  definirt, deren Grad  $= m$  ist, da  $F = 0$  von jeder Curve

$$a_1 \Theta_1 + a_2 \Theta_2 + \dots + a_{q+1} \Theta_{q+1} = 0$$

in  $m$  beweglichen Punkten geschnitten wird. Durch Elimination von  $(x, y)$  aus  $F = 0$  und den Gleichungen (10) erhält man eine zweite Form für diese Raumcurve, nämlich  $q - 1$  Gleichungen zwischen den Variablen  $x_1, \dots, x_{q+1}$

$$u_1 = 0 \quad u_2 = 0 \quad \dots \quad u_{q-1} = 0 \quad (11)$$

und es ergeben sich gleichzeitig im Allgemeinen  $x$  und  $y$  als rationale Functionen der durch die Gleichungen (11) verbundenen Variablen  $x_1, \dots, x_{q+1}$ . Doch kann auch der Fall eintreten, dass die durch (11) definirte Raumcurve zerfällt. Sie ist dann nicht eindeutig auf  $F=0$  bezogen; es müssen vielmehr noch weitere Gleichungen in  $x_1, \dots, x_{q+1}$  hinzutreten, um denjenigen Theil der Raumcurve (11) abzusondern, der sich eindeutig auf  $F=0$  beziehen lässt. Hiernach hat man den Satz:

(I) Jeder ebenen Curve  $F(x, y) = 0$  vom Geschlecht  $p$  entsprechen im Allgemeinen eindeutig gewisse Curven im Raum  $R_q$  vom Grade  $m$ , wobei  $q \geq m - p$  ist. Alle diese Curven besitzen dasselbe Geschlecht  $p$  und dieselben  $3p - 3$  Moduln wie  $F = 0$ .

Besonderes Interesse gewinnt diese Behandlung, wenn man mit den zu  $F=0$  gehörigen, adjungirten Functionen  $\Phi$  operirt, deren Quotienten von der Ordnung  $m = 2p - 2$  sind. Um nur den allgemeinen Fall zu betrachten, setzen wir ( $p \geq 3$ ):

$$x_1 : \dots : x_p = \Phi_1 : \dots : \Phi_p, \quad (12)$$

wo die  $\Phi_i$   $p$  zu  $F=0$  gehörige, linear unabhängige  $\Phi$ -Functionen sind. Die Gleichungen (12) stellen eine Curve im Raum  $R_{p-1}$  vom Grade  $2p - 2$  dar. Durch Elimination von  $(x, y)$  erhält man  $p - 2$  Gleichungen zwischen  $(x_1, \dots, x_p)$

$$u_1 = 0, \dots, u_{p-2} = 0, \quad (13)$$

die im Allgemeinen ebenfalls die Raumcurve darstellen, zu denen aber unter Umständen noch weitere Gleichungen zwischen  $(x_1, \dots, x_p)$  hinzuzufügen sind.

Das Eigenthümliche der Darstellung (12) beruht nun in dem Satz<sup>1)</sup>:

(II) Legt man an Stelle von  $F(x, y) = 0$  die Raumcurve (13) zu Grunde, so verwandeln sich die eindeutigen Transformationen der Variablen  $(x, y)$  in lineare Transformationen der Variablen  $(x_1, x_2, \dots, x_p)$  und folglich die  $3p - 3$  Klassenmoduln von  $F=0$  in die simultanen Invarianten der Gleichungen (13) im Sinne der gemeinen Invariantentheorie.

In der That: die eindeutige Transformation von  $F=0$  führt nach (I) § 23 jeden Quotienten zweier  $\Phi$ -Functionen wieder in einen

1) Weber, Math. Ann. Bd. XIII S. 45 (1877).

solchen Quotienten über, sie führt also, abgesehen von einem Proportionalitätsfactor,

$$\Phi_i \text{ über in } a_{i1}\Phi_1 + \cdots + a_{ip}\Phi_p,$$

wo die  $a_{ik}$  beliebige, constante Grössen sind. An Stelle der  $p - 2$  Gleichungen (13)  $u_i = 0$  treten also  $p - 2$  neue Gleichungen  $v_i = 0$ , die aus  $u_i = 0$  hervorgehen, indem man

$$(14) \quad x_i \text{ durch } a_{i1}x_1 + \cdots + a_{ip}x_p$$

ersetzt oder indem man auf die Gleichungen  $u_i = 0$  eine beliebige lineare Substitution anwendet.

Den Moduln von  $F = 0$  entsprechen solche aus den Coefficienten der Gleichungen (13) gebildete Combinationen, welche durch die lineare Substitution (14) nicht geändert werden, das sind aber die gewöhnlichen, simultanen Invarianten der Gleichungen (13). (q. e. d.)

Die Zahl der unabhängigen Combinationen von Coefficienten des Systems (13) sei  $P$ ; da man  $p^2 - 1$  derselben durch passende Bestimmung der Coefficienten in der linearen Substitution (14) beliebige, numerische Werthe geben kann, so hat der Rest von  $P - (p^2 - 1)$  Combinationen feste, unveränderliche Werthe. Daher ist  $P - p^2 + 1$  die Zahl der Moduln.

Man kann dies in doppelter Weise verwerthen. Nimmt man die Zahl der Moduln als bekannt an,  $= 3p - 3$ , so kann man  $P$  bestimmen; es wird

$$(15) \quad P = p^2 + 3p - 4 = (p - 1)(p + 4).$$

Nimmt man die Zahl  $3p - 3$  der Moduln nicht als bekannt an, so erhält man eine neue Herleitung derselben durch directe Bestimmung von  $P$ . Diese Bestimmung stösst allerdings für höhere Werthe von  $p$  auf Schwierigkeiten; man kann sie aber durch folgende Ueberlegung ersetzen<sup>1)</sup>. Projicirt man die Curve (13) von einem ihrer Punkte auf den nächst niederen Raum  $R_{p-2}$ , so erniedrigt sich offenbar der Grad der Curve um 1; gleichzeitig wächst aber die Constantenzahl der Curve um 1, weil das Projectionscentrum in unendlich viele Punkte der Curve gelegt werden kann. Man projicire nun die erhaltene Curve des Raumes  $R_{p-2}$  wieder von einem ihrer Punkte auf den folgenden Raum  $R_{p-3}$  u. s. f., bis man die Projection  $F(x_1, x_2, x_3) = 0$  im Raum  $R_3$  hat. Für diese Curve lässt sich leicht die Zahl der Moduln berechnen. Da der Grad der ursprünglichen Curve (13) gleich  $2p - 2$  war und  $p - 3$  Projectionen vorgenommen wurden, so ist der Grad von  $F = 0$   $2p - 2 - (p - 3) = p + 1$ ,

1) Klein, Vorl. üb. d. Theorie d. ellipt. Modulfunctionen. Hrsgb. v. Fricke. Leipzig. Teubner 1890. S. 566 u. in Vorlesungen. 1880/81.



und da das Geschlecht  $p$  erhalten bleibt, so ist die Zahl  $r$  der Doppelpunkte von  $F=0$   $r = \frac{1}{2}p(p-1) - p = \frac{1}{2}p(p-3)$ . Die Zahl der nicht homogenen Constanten in  $F$  beträgt zunächst  $\frac{1}{2}(p+1)(p+4)$ . Von dieser Zahl sind abziehen die Zahl  $r$  und die Zahl 8; die erstere weil  $F=0$   $r$  Doppelpunkte hat, die letztere, weil eine lineare Transformation der Coordinaten  $(x_1, x_2, x_3)$  8 Constanten mit sich führt, die man so bestimmen kann, dass 8 Constanten in  $F=0$  beliebige, numerische Werthe erhalten. Dagegen ist zuzufügen die Zahl  $p-3$ , weil bei jeder der  $p-3$  Projectionen 1 Constante hinzutritt. Daher ist die Zahl der Moduln

$$= \frac{1}{2}(p+1)(p+4) - \frac{1}{2}p(p-3) - 8 + p - 3 = 3p - 3. -$$

Man kann das System der Gleichungen (13) direct bilden, indem man die Gesamtheit der zwischen den  $p$  linear unabhängigen  $\Phi$ -Functionen von  $F=0$  bestehenden, algebraischen Gleichungen höheren Grades aufstellt und aus denselben diejenigen aussondert, welche im Stande sind, eine Klasse von algebraischen Gleichungen vom Geschlecht  $p$  zu definiren<sup>1)</sup>.

Nach § 12 Satz Ib besteht zwischen je  $m-p+2$  rationalen Functionen in  $(x, y)$ , die von der Ordnung  $m$  sind und die nämlichen, willkürlich gewählten  $m \infty^1$  Punkte besitzen, mindestens eine homogene Gleichung. Bildet man nun ganze, homogene Functionen  $F_0, F_1, F_2 \dots$  vom Grade  $\mu$  in den  $p$  Functionen  $\Phi_i$  und dividirt  $F_1, F_2, \dots$  durch  $F_0$ , so hat man, da jedes  $\Phi_i$   $2p-2$   $0^1$  Punkte hat, rationale Functionen von der Ordnung  $m=2\mu(p-1)$  mit denselben  $\infty^1$  Punkten. Es besteht also zwischen je  $m-p+2=(2\mu-1)(p-1)+1$  der Functionen  $F_1, F_2, \dots$  mindestens eine lineare, homogene Gleichung. Nimmt man für diese Functionen die  $\mu^{\text{ten}}$  Potenzen und die  $\mu$ -gliedrigen Producte der  $p$  Functionen  $\Phi_i$ , so lässt sich zeigen<sup>2)</sup>, dass sich unter diesen stets  $(2\mu-1)(p-1)$  befinden, die linear unabhängig sind. Da die Zahl dieser Functionen

$$P_\mu = \frac{p \cdot p + 1 \dots p + \mu - 1}{1 \cdot 2 \dots \mu},$$

so folgt der Satz:

(III) Die Zahl der von einander unabhängigen, homogenen Gleichungen vom  $\mu^{\text{ten}}$  ( $> 1$ ) Grade zwischen den  $p$   $\Phi$ -Functionen ist

$$P_\mu - (2\mu - 1)(p - 1). \quad (16)$$

1) Weber, Math. Ann. Bd. XIII S. 43 ff. (1877).

2) Nöther, Math. Ann. Bd. XVII S. 272 (1880).

Diese algebraischen Gleichungen höheren Grades zwischen den  $p$  linear unabhängigen Functionen  $\Phi_i$  sind nur eine identische Folge der einen Grundgleichung  $F=0$ , d. h. sie werden identisch befriedigt, wenn man in sie die  $\Phi_i$  als Functionen von  $(x, y)$  einträgt. Umgekehrt sind mehrere dieser Gleichungen und zwar im Allgemeinen  $p-2$  derselben (die obigen Gleichungen (13)) im Stande, die Gleichung  $F=0$  oder eine zu derselben Klasse gehörige Gleichung zu vertreten. Man erhält diese Gleichung  $F=0$  etwa, indem man zu den  $p-2$  Gleichungen zwischen den  $\Phi_i$  die Gleichungen

$$\sum_i (\alpha_i \Phi_i) + x \sum_i (\beta_i \Phi_i) = 0, \quad \sum_i (\gamma_i \Phi_i) + y \sum_i (\delta_i \Phi_i) = 0 \quad (i=1, \dots, p)$$

hinzufügt und die  $p-1$  Verhältnisse der  $\Phi_i$  eliminirt. Doch ist in jedem Fall zu prüfen, ob wirklich  $p-2$  Gleichungen zwischen den  $\Phi_i$  ausreichen, um eine Klasse von algebraischen Gleichungen vom Geschlecht  $p$  zu definiren.

Man kann die für die Grundgleichung  $F(x, y) = 0$  und ihre Schnittpuncten früher entwickelten Sätze, besonders den Riemann-Roch'schen Satz, ohne Schwierigkeit auf die mit  $F=0$  in eindeutiger Beziehung stehenden Raumcurven übertragen. Statt dies auszuführen, gehen wir noch kurz auf die zu diesen Raumcurven gehörigen Abel'schen Integrale ein<sup>1)</sup>. Die Bildung derselben geschieht in der nämlichen Weise wie in § 23.

Sei zuerst eine Curve im Raum  $R_3$  gegeben als der vollständige Durchschnitt der Flächen  $u'=0$ ,  $u''=0$  vom Grade  $n_1$  und  $n_2$  in den Variablen  $(x_1, \dots, x_4)$ . Dann ist, wenn  $\frac{\partial u'}{\partial x_i} = u'_i$  gesetzt wird,

$$\begin{aligned} u'_1 x_1 + u'_2 x_2 + u'_3 x_3 + u'_4 x_4 &= 0, & u'_1 dx_1 + u'_2 dx_2 + u'_3 dx_3 + u'_4 dx_4 &= 0 \\ u''_1 x_1 + u''_2 x_2 + u''_3 x_3 + u''_4 x_4 &= 0, & u''_1 dx_1 + u''_2 dx_2 + u''_3 dx_3 + u''_4 dx_4 &= 0 \end{aligned}$$

Hieraus ergeben sich 6 Gleichungen der Form

$$x_i dx_k - x_k dx_i = (u'_i u''_m - u''_i u'_m) d\mu,$$

wo  $d\mu$  ein Proportionalitätsfactor ist und  $iklm$  zu ersetzen sind der Reihe nach durch 1 2 3 4; 1 3 4 2; 1 4 2 3; 2 3 1 4; 3 4 1 2; 4 2 1 3. Bildet man nun den Differentialausdruck:

$$(17) \quad \frac{F(x)}{N(x)} \cdot \frac{M(x)}{N(x)} \cdot \frac{\sum \pm a'_i a''_i x_i dx_i}{\sum a'_i u'_i \sum a''_i u''_i - \sum a'_i u''_i \sum a''_i u'_i},$$

so ist derselbe von den ganz beliebig wählbaren Grössen  $a'_i, a''_i$  ( $i=1, \dots, 4$ ) unabhängig. Er ist ferner nur von den Verhältnissen der  $x_i$  ab-

1) Clebsch, Journ. für Math. Bd. 63. S. 221 (1863).

hängig, wenn man unter  $\mathbb{P}(x)$  eine homogene, rationale, ganze Function der  $x_i$  vom Grade  $(n_1 + n_2 - 4)$  versteht und unter  $M(x)$  und  $N(x)$  homogene, ganze, rationale Functionen von beliebigem, aber gleich hohem Grade.

Unter diesen Voraussetzungen stellt (17) das allgemeine Abel'sche Differential dar, bezogen auf die Raumeurve  $u' = 0$ ,  $u'' = 0$ . Denn führt man mittels der Gleichungen (5) an Stelle der  $x_i$  die beiden durch die Gleichung  $F(x, y) = 0$  verbundenen Variablen  $(x, y)$  ein, so kommt das Differential (17) auch der Form nach auf das allgemeine zu  $F(x, y) = 0$  gehörige Abel'sche Differential zurück. Ist  $M(x) : N(x)$  eine Constante, so ist (17) ein Differential 1. Gattung; nach (6a) existiren  $p = \frac{1}{2} n_1 n_2 (n_1 + n_2 - 4) + 1$  linear unabhängige Differentiale 1. Gattung.

Für die zu der Raumeurve  $u' = 0$ ,  $u'' = 0$  gehörigen Integrale (17) gelten nun ganz analoge Sätze wie für die zu  $F(x, y) = 0$  gehörigen Integrale. So lautet z. B. das Abel'sche Theorem für dieselben:

(IV) Die Summen der Integrale von (17), ausgedehnt über alle Schnittpunkte der Curve  $u' = 0$ ,  $u'' = 0$  mit einer Fläche  $v = 0$ , ist gleich einer rational-logarithmischen Function der Coefficienten von  $v = 0$  und gleich einer Constanten, wenn (17) ein Differential erster Gattung ist.

Die vorstehende Betrachtung lässt sich unmittelbar auf eine Curve im Raume von  $q$  Dimensionen ausdehnen. Sind  $q + 1$  Variable  $x_1, \dots, x_{q+1}$  verbunden durch  $q - 1$  homogene Gleichungen

$$u_1 = 0 \quad u_2 = 0 \quad \dots \quad u_{q-1} = 0 \quad (18)$$

bez. vom Grade  $n_1, n_2, \dots, n_{q-1}$  und wählt man ganz beliebig  $(q - 1)(q + 1)$  Grössen

$$a_1^i, a_2^i, \dots, a_{q+1}^i \quad (i = 1, \dots, q - 1);$$

setzt man ferner

$$a_1^i \frac{\partial u_k}{\partial x_1} + \dots + a_{q+1}^i \frac{\partial u_k}{\partial x_{q+1}} = A_k^i \quad (i, k = 1, \dots, q - 1)$$

und versteht unter  $\mathbb{P}(x)$  eine homogene, ganze, rationale Function in den  $x_i$  vom Grade  $(n_1 + \dots + n_{q-1} - q - 1)$ , unter  $M(x)$  und  $N(x)$  homogene, ganze, rationale Functionen der  $x_i$  von gleichem Grade, so ist das allgemeine zu den Gleichungen (18) gehörige Abel'sche Integral, analog (17), von der Form

$$(19) \quad \int \Phi(x) \cdot \frac{M(x)}{N(x)} \cdot \frac{\sum \pm a_1^1 a_2^2 \cdots a_q^{e-1} x_q dx_{q+1}}{\sum \pm A_1^1 A_2^2 \cdots A_q^{e-1}}$$

und das zugehörige Abel'sche Theorem lautet:

(V) Die Summe der Integrale (19), ausgedehnt über alle Werthsysteme, welche die Gleichungen (18) mit einer  $q^{\text{ten}}$  Gleichung  $u_q = 0$  gemein haben, ist eine rational-logarithmische Function der Coefficienten von  $u_q$  und eine Constante, wenn (19) ein Integral 1. Gattung, also  $M(x):N(x)$  eine Constante ist.

Wegen der geometrischen Folgerungen, die sich aus dem Satze (IV) ziehen lassen, sei auf die Litteratur verwiesen<sup>1)</sup>.

---

1) Clebsch, Journal für Math. Bd. 63. S. 222 ff. (1863).

## Zweiter Theil.

### Das Jacobi'sche Umkehrproblem.

#### Einleitung.

Der zweite Theil der Theorie der Abel'schen Functionen und Integrale enthält die Lösung des Umkehrproblems. Wir schicken auch hier eine kurze Uebersicht über den entsprechenden Theil der Theorie der elliptischen Functionen voraus<sup>1)</sup>.

Setzt man das elliptische Integral 1. Gattung gleich einer complexen Variabeln  $u$ , also (s. S. 3)

$$-\int_{\infty}^x \frac{dx}{\sqrt{Rx}} = u, \quad (1)$$

so besteht das Umkehrproblem darin, die Functionen  $\sqrt{x-c_i}$ ,  $x=p(u)$ ,  $y=\sqrt{Rx}=-p'(u)$ , und allgemein eine beliebige, rationale Function von  $(x, \sqrt{Rx})$  als Function des Argumentes  $u$  darzustellen. Alle diese Functionen heissen elliptische Functionen von  $u$  und sind charakterisirt durch folgende Eigenschaften:

Sie sind eindeutig und im Allgemeinen, d. h. mit Ausnahme einzelner Punkte der  $u$ -Ebene, stetig und an keiner Stelle im Endlichen wesentlich singular.

Sie sind doppeltperiodisch, d. h. sie besitzen zwei Perioden, die sehr einfach mit den Periodicitätsmoduln des elliptischen Integrals (1) zusammenhängen.

Die erste Aufgabe ist die Herleitung der sog. Thetafunctionen, durch welche sich alle elliptischen Functionen analytisch darstellen lassen.

---

1) Vgl. Weierstrass-Schwarz, Formeln und Lehrsätze etc. 2. A. 1893. S. 40 ff. Die Bezeichnung der Thetafunctionen ist der Symmetrie halber etwas abgeändert.

Die einfachsten elliptischen Functionen sind die drei Wurzelfunctionen  $\sqrt{x - c_i}$  ( $i = 1, 2, 3$ ). Zur Darstellung derselben als Functionen von  $u$  genügt die Kenntniss ihrer Perioden und ihrer  $0^1$  und  $\infty^1$  Punkte. Mittels dieser Elemente erhält man die Functionen  $\sqrt{x - c_i}$  zuerst als Quotienten von doppelt unendlichen Producten mit gemeinsamem Nenner. Diese Producte lassen sich durch Einführung der Exponentialfunction in einfach unendliche Producte und diese weiter in einfach unendliche Summen verwandeln, welche die Thetafunctionen vorstellen.

Haben die Querschnitte  $a$  und  $b$  der Verzweigungsfläche  $T$  die früher angegebene Lage, sind ferner  $2\omega$  und  $2\omega'$  die Periodicitätsmoduln des Integrals (1) an den Querschnitten  $a$  und  $b$  und setzt man zur Abkürzung

$$(2) \quad u = 2\omega v, \quad \tau = \frac{\omega'}{\omega}, \quad h = e^{\tau\pi i}, \quad H_0^2 = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - h^{2n}),$$

so ist die Productform der vier Thetafunctionen (wenn  $n$  alle ganzen Zahlen von 1 bis  $\infty$  durchläuft):

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} \Theta(u) &= \vartheta(v) = 2h^{\frac{1}{4}} H_0 \sin \pi v \prod_n (1 - 2h^{2n} \cos 2\pi v + h^{4n}), \\ \Theta_1(u) &= \vartheta_1(v) = 2h^{\frac{1}{4}} H_0 \cos \pi v \prod_n (1 + 2h^{2n} \cos 2\pi v + h^{4n}), \\ \Theta_2(u) &= \vartheta_2(v) = H_0 \prod_n (1 + 2h^{2n-1} \cos 2\pi v + h^{4n-2}), \\ \Theta_3(u) &= \vartheta_3(v) = H_0 \prod_n (1 - 2h^{2n-1} \cos 2\pi v + h^{4n-2}). \end{aligned} \right.$$

Von diesen Functionen ist die erste eine ungerade, die drei andern sind gerade Functionen von  $u$  oder  $v$ . Verwandelt man die Producte in Summen, so erhält man (wenn  $n$  alle ganzen Zahlen von  $-\infty$  bis  $+\infty$  durchläuft):

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} \Theta(u) &= \vartheta(v) = \sum_n e^{\pi i \left\{ \tau \left( n + \frac{1}{2} \right)^2 + 2 \left( v + \frac{1}{2} \right) \left( n + \frac{1}{2} \right) \right\}}, \\ \Theta_1(u) &= \vartheta_1(v) = \sum_n e^{\pi i \left\{ \tau \left( n + \frac{1}{2} \right)^2 + 2v \left( n + \frac{1}{2} \right) \right\}}, \\ \Theta_2(u) &= \vartheta_2(v) = \sum_n e^{\pi i \left\{ \tau n^2 + 2nv \right\}}, \\ \Theta_3(u) &= \vartheta_3(v) = \sum_n e^{\pi i \left\{ \tau n^2 + 2 \left( v + \frac{1}{2} \right) n \right\}}. \end{aligned} \right.$$

Die Thetafunctionen haben folgende, charakteristische Eigenschaften:

Sie sind eindeutig und für alle endlichen Werthe von  $u$  stetig.

Sie besitzen gewisse periodische Eigenschaften derart, dass sie sich, bei Vermehrung von  $u$  um einen der Periodicitätsmoduln des Integrales (1), nur um Exponentialfactoren gewisser Art ändern.

Die vorstehenden Formeln finden ihre Verallgemeinerung im Abschnitt V; die Darstellungen (4) in den Gleichungen (37) § 26. In der Theorie der Abel'schen Functionen muss man jedoch den angegebenen Weg zur Herleitung der Thetafunctionen verlassen, da analoge Productentwicklungen wie (3) für Functionen mit mehreren Variablen nicht existiren. Wir leiten daher die Thetafunctionen von  $p$  Variablen im Abschnitt V auf einem anderen Wege ab, der für die elliptischen Functionen ( $p=1$ ) bereits von Liouville und Hermite angegeben wurde, nämlich auf functionentheoretischem Wege aus den Eigenschaften der  $2p$ -fach periodischen Functionen von  $p$  Variablen.

Die zweite Aufgabe betrifft die Lösung des Umkehrproblems. Die Darstellung der Wurzelfunctionen  $\sqrt{x-e_i}$  durch die Variablen  $u$  ist enthalten in den Gleichungen ( $i=1, 2, 3$ ):

$$\sqrt{x-e_i} = C_i \frac{\Theta_i(u)}{\Theta(u)} = C_i \frac{\vartheta_i(v)}{\vartheta(v)}, \quad (5)$$

wo  $C_1, C_2, C_3$  von  $u$  unabhängige Constanten sind. Setzt man in (5)  $x = \infty, e_1, e_2, e_3$  und zur Abkürzung ( $i=1, 2, 3$ ):

$$\left. \begin{aligned} \Theta_i(0) = \vartheta_i(0) = \Theta_i = \vartheta_i \\ \left( \frac{\partial \Theta(u)}{\partial u} \right)_{u=0} = \Theta'; \quad \left( \frac{\partial \vartheta(v)}{\partial v} \right)_{v=0} = \vartheta', \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

so erhält man

$$\left. \begin{aligned} C_1 = \frac{\Theta'}{\Theta_1} = \sqrt{e_1 - e_2} \frac{\Theta_2}{\Theta_3} = \sqrt{e_1 - e_3} \frac{\Theta_3}{\Theta_2} = \sqrt[4]{e_1 - e_2 \cdot e_1 - e_3}, \\ C_2 = \frac{\Theta'}{\Theta_2} = \sqrt{e_1 - e_2} \frac{\Theta_1}{\Theta_3} = \sqrt{e_2 - e_3} \frac{\Theta_3}{\Theta_1} = \sqrt[4]{e_1 - e_2 \cdot e_2 - e_3}, \\ C_3 = \frac{\Theta'}{\Theta_3} = \sqrt{e_1 - e_3} \frac{\Theta_1}{\Theta_2} = \sqrt{e_2 - e_3} \frac{\Theta_2}{\Theta_1} = \sqrt[4]{e_1 - e_3 \cdot e_2 - e_3}. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Diese Gleichungen geben die Werthe von  $C_1, C_2, C_3$ , entweder durch Thetafunctionen oder rein algebraisch ausgedrückt; zugleich stellen sich die Quotienten der Functionen  $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3, \Theta'$  algebraisch in  $e_1, e_2, e_3$  dar.

Setzt man in (3)  $u = 0$ , so folgt zwischen den geraden Functionen  $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3$  und der Ableitung  $\Theta'$  der ungeraden Function  $\Theta$  für den Nullwerth des Argumentes die Relation

$$(8) \quad \pi \Theta_1 \Theta_2 \Theta_3 = 2\omega \Theta' \quad \text{oder} \quad \pi \vartheta_1 \vartheta_2 \vartheta_3 = \vartheta'.$$

Verbindet man diese Gleichung mit (7), so ergeben sich Relationen, welche die Werthe  $\Theta_i: \sqrt{\omega}$  ( $i = 1, 2, 3$ ) und  $\Theta': \sqrt{\omega}$  rein algebraisch durch die Grössen  $e_1, e_2, e_3$  darstellen, und welche zur annähernden Berechnung der Grösse  $h$  oder des Thetamoduls  $\tau$  (2) durch die gegebenen Grössen  $e_i$  dienen. Diese Gleichungen sind:

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Theta_1 = \vartheta_1 = \sqrt{\frac{2\omega}{\pi}} \sqrt[4]{e_2 - e_3}, \\ \Theta_2 = \vartheta_2 = \sqrt{\frac{2\omega}{\pi}} \sqrt[4]{e_1 - e_3}, \\ \Theta_3 = \vartheta_3 = \sqrt{\frac{2\omega}{\pi}} \sqrt[4]{e_1 - e_2}, \\ 2\omega \Theta' = \vartheta' = 2\omega \sqrt{\frac{2\omega}{\pi}} \sqrt[4]{e_1 - e_2 \cdot e_1 - e_3 \cdot e_2 - e_3}. \end{array} \right.$$

Die vorstehenden Formeln finden ihre Verallgemeinerung in dem VI. Abschnitt; nämlich die Gleichungen (5) in (9), (14), (16) und (19) § 31; die Gleichungen (7) in (11) und (12) § 31 und (18) § 33; die Gleichungen (9) in (12) § 31 und (29) § 33. Die Gleichung (8) endlich in den am Ende von § 33 erwähnten Gleichungen (P).

Die Thetafunctionen bilden nicht nur die Grundlage für die Lösung des Umkehrproblems; sie beherrschen auch alle weiteren Darstellungen in der Theorie der elliptischen Functionen.

Die dritte Aufgabe bezieht sich daher auf die Darstellung der allgemeinsten, rationalen Function von  $(x, \sqrt{Rx})$  sowohl durch Quotienten, gebildet aus Producten von Thetafunctionen, wie auch durch Summen, gebildet aus den Ableitungen der Logarithmen von Thetafunctionen; ferner auf die Darstellung des Integrals 3. Gattung mit der oberen Grenze  $x$  durch Logarithmen von Thetafunctionen mit dem Argument  $u$  und des Integrals 2. Gattung durch die Ableitung eines solchen Logarithmus nach  $u$ , endlich auf die Darstellung des allgemeinsten, elliptischen Integrals durch Logarithmen von Thetafunctionen und die Ableitungen solcher Logarithmen.

Wir führen als Beispiele nur an erstens die Darstellung von  $x = p(u)$ :

$$(10) \quad x = p(u) = -\frac{d^2 \log \Theta(u)}{du^2} + \frac{1}{3} \frac{\Phi'''}{\Theta'},$$

zweitens die fundamentale Formel:



$$x - x_0 = p(u) - p(u_0) = -\Theta'^2 \frac{\Theta(u - u_0) \Theta(u + u_0)}{\Theta^2(u) \Theta^2(u_0)}, \quad (11)$$

in der  $x_0, u_0$  ein beliebiges, zusammengehöriges Werthepaar  $(x, u)$  ist und aus der sich wieder die Gleichungen (5) ergeben, wenn man  $x_0$  gleich  $e_1, e_2, e_3$  und bez.  $u_0$  gleich  $\omega, \omega + \omega', \omega'$  setzt; endlich drittens die Darstellung eines Integrals zweiter Gattung (vgl. 10):

$$\int^x \frac{x dx}{\sqrt{Rx}} = \frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)} - \frac{u}{3} \frac{\Theta'''}{\Theta'} + C, \quad (12)$$

und die eines Integrals 3. Gattung (vgl. 11):

$$\int^x \frac{\sqrt{Rx_0}}{\sqrt{Rx}} \frac{dx}{x - x_0} = \log \frac{\Theta(u - u_0)}{\Theta(u + u_0)} + 2u \frac{\Theta'(u_0)}{\Theta(u_0)} + C, \quad (13)$$

wo die Constanten  $C$  von den unteren Grenzen der Integrale abhängen. Aus (11) ergeben sich weitere, wichtige Formeln, darunter das Additionstheorem der Thetafunction.

Die Darstellungen der rationalen Functionen durch Thetafunctionen finden ihre Verallgemeinerung in den Formeln des VII. Abschnitts § 34–36, die der Abel'schen Integrale in § 37.

Die Form der Thetafunctionen, sowie alle vorgenannten Darstellungen durch Thetafunctionen wurden zunächst gewonnen für eine bestimmte Lage der Querschnitte  $a$  und  $b$  in der Verzweigungsfläche  $T$  von  $y = \sqrt{Rx}$ .

Die vierte und letzte Aufgabe in der Theorie der elliptischen Functionen hat die Verallgemeinerung der erhaltenen Darstellungen zum Ziel, indem sie die Abänderungen untersucht, die eintreten, wenn die Querschnitte  $a$  und  $b$  beliebig verlegt werden. Es zeigt sich, dass dabei die Thetafunctionen eine sog. lineare Transformation erfahren. Dieselbe besteht darin, dass, abgesehen von einem Exponentialfactor, jede Thetafunction mit dem Argument  $v$  und dem Modul  $\tau$  übergeht in eine Thetafunction, deren Argument  $v_1$  und Modul  $\tau_1$  von  $v$  und  $\tau$  in einfacher Weise abhängen. Dabei geht die ungerade Function  $\vartheta(v, \tau)$  in die ungrade Function  $\vartheta(v_1, \tau_1)$  über, während jede der drei graden Functionen  $\vartheta_i(v, \tau)$  ( $i = 1, 2, 3$ ) in jede der graden Functionen  $\vartheta_k(v_1, \tau_1)$  ( $k = 1, 2, 3$ ) übergehen kann. Neben ihrer theoretischen hat die lineare Transformation der Thetafunctionen die praktische Bedeutung, für jeden Fall die am stärksten convergirende Darstellung durch Thetafunctionen zu liefern. Diese Untersuchungen über die lineare Transformation der Thetafunctionen finden ihre Verallgemeinerung im Abschnitt VIII.

Hiermit sind die wichtigsten Punkte in der Theorie der elliptischen Functionen berührt, wobei jedoch die allgemeine Transformation ausgeschlossen bleibt. Die Theorie der Abel'schen Functionen beschäftigt sich nun in ihrem zweiten Theil mit den entsprechenden Aufgaben; der Stoff ist folgendermassen gegliedert:

Abschnitt V enthält die Herleitung der Thetafunctionen von  $p$  Variabeln und die Untersuchung der Nullpunkte derjenigen Thetafunctionen, die man erhält, wenn man die  $p$  Argumente durch  $p$  Integrale 1. Gattung mit derselben oberen Grenze ersetzt.

Abschnitt VI enthält die Lösung des Umkehrproblems oder die Darstellung der einfachsten Abel'schen Functionen durch Thetafunctionen.

Abschnitt VII enthält allgemeine Beziehungen zwischen Thetafunctionen und rationalen Functionen oder Abel'schen Integralen.

Abschnitt VIII enthält die Untersuchung der Abänderungen, welche die in VI und VII gegebenen Darstellungen durch Verlegung des Querschnittsystems der Verzweigungsfläche oder durch lineare Transformation der Thetafunctionen erfahren.

---

## Fünfter Abschnitt.

### Die Thetafunction und ihre Nullpunkte.

Der fünfte Abschnitt behandelt die Eigenschaften der Thetafunction von  $p$  Variabeln, auf welcher die analytische Lösung des Umkehrproblems beruht. Wir geben in § 25 nach kurzer Formulirung des Umkehrproblems eine Herleitung der Thetafunction, in § 26 eine Entwicklung ihrer Eigenschaften. Die übrigen §§ des Abschnitts beziehen sich auf die Zahl und Lage der Nullpunkte einer Thetafunction, deren Argumente aus den  $p$  Normalintegralen 1. Gattung gebildet sind.

#### § 25. Formulirung des Umkehrproblems. Herleitung der Thetafunction.

Das Jacobi'sche Umkehrproblem, von dem die folgenden Untersuchungen ausgehen, ist eine Verallgemeinerung des elliptischen Umkehrproblems (s. Einleitung S. 187). Zu einer Gleichung  $F(x, y) = 0$  vom Geschlecht  $p$  gehören  $p$  linear unabhängige Normalintegrale 1. Gattung<sup>1)</sup>:

$$u_1 = \int_c^x \frac{f_1(x, y) dx}{F'(y)}, \dots, u_p = \int_c^x \frac{f_p(x, y) dx}{F'(y)}. \quad (1)$$

Man bilde mittels der Integrale (1) zwischen  $p$  verschiedenen, oberen Grenzen  $x_1, \dots, x_p$  einerseits und  $p$  Variabeln  $U_1, \dots, U_p$  andererseits die  $p$  Gleichungen ( $i = 1, \dots, p$ ):

$$\int_{c_1}^{x_1} \frac{f_1(x, y) dx}{F'(y)} + \dots + \int_{c_p}^{x_p} \frac{f_i(x, y) dx}{F'(y)} \equiv U_i, \quad (2)$$

in welchen die  $p$  unteren Grenzpunkte  $c_h$  beliebig, aber fest gewählt seien und die Integrationswege zwischen den Punktepaaren  $c_h$  und  $x_h$

1) Die Wahl der Normalintegrale  $u_i$  beeinträchtigt die Allgemeinheit der Untersuchung nicht, da man durch lineare Substitution statt der  $p$  Normalintegrale  $u_1, \dots, u_p$  stets  $p$  beliebige Integrale 1. Gattung  $v_1, \dots, v_p$  einführen kann.

in der Verzweigungsfläche  $T$  für alle  $p$  Gleichungen dieselben seien, was durch das Congruenzzeichen angedeutet sei. Dann besteht das Umkehrproblem im engeren Sinne in der Aufgabe, die je durch  $F(x, y) = 0$  verbundenen Coordinaten  $(x_h, y_h)$  der  $p$  oberen Grenzpunkte  $x_1, \dots, x_p$  als Functionen der  $p$  Integralsummen  $U_1, \dots, U_p$  darzustellen<sup>1)</sup>, in erweitertem Sinne in der Aufgabe, rationale (oder auch gewisse, algebraische) und symmetrische Functionen der Coordinaten der  $p$  oberen Grenzpunkte  $x_h$  als Functionen der  $p$  Grössen  $U_i$  darzustellen. Diese Functionen heissen Abel'sche Functionen der Variabeln  $U_1, \dots, U_p$ . Es zeigt sich im Verlauf unserer Untersuchungen (§ 36), dass diese Functionen charakterisirt sind durch folgende Eigenschaften:

(A) 1) Sie sind eindeutig, ferner im Allgemeinen (d. h. mit Ausnahme von Werthgebieten von weniger als  $2p$  Dimensionen) stetig und für kein endliches Werthsystem der  $U_i$  wesentlich singulär. Die  $p$  Variabeln  $U_i$  heissen auch die Argumente der Abel'schen Functionen.

2) Sie sind  $2p$ -fach periodisch, d. h. sie besitzen  $2p$  von einander unabhängige Periodensysteme, die mit den Systemen der Periodicitätsmoduln der Integrale (1) sehr einfach zusammenhängen. Diese Periodensysteme heissen auch die Modulsysteme der Abel'schen Functionen.

Wir zeigen nur kurz, wie man durch Verallgemeinerung einer von Jacobi für  $p = 2$  angestellten Untersuchung<sup>2)</sup> gerade auf das in (2) formulirte Umkehrproblem geführt wird und warum man die Umkehrung eines einzelnen der Integrale (1), etwa des ersten, durch welche  $x$  als Function von  $u_1$  definirt würde, ausschliesst. Es ist klar, dass, wenn eine Lösung des Problems (2) möglich ist, zu denselben Punkten  $x_h$  in (2) unendlich viele Werthsysteme der  $U_i$  gehören, die sich jedoch nur um Systeme von zusammengehörigen Periodicitätsmoduln der Integrale (1) unterscheiden. Die Coordinaten der  $p$  Punkte  $x_h$  sind also  $2p$ -fach periodische Functionen der  $p$  Variabeln  $U_i$ ; sie sind aber zugleich einwerthige Functionen der  $U_i$ , wie schon in (A) erwähnt wurde und später (§ 28) bewiesen wird. Ebenso wären die Coordinaten des Punktes  $x$  in der ersten Gleichung (1), die Umkehr-

1) Ein specieller Fall des Umkehrproblems ist das Abel'sche Theorem, wo die Grössen  $U_i$  ebenfalls Summen von Integralen 1. Gattung mit gegebenen Grenzen sind und wo die Lösung d. h. die Bestimmung der  $p$  Punkte  $x_h$  rein algebraisch ist (s. § 20).

2) Jacobi, Ges. W. Bd. II S. 7 ff. (1832) und S. 23 ff. (1834).

barkeit dieser Gleichung vorausgesetzt,  $2p$ -fach periodische Functionen der einen Variablen  $u_1$ ; sie wären aber nicht eindeutige, sondern unendlich vieldeutige Functionen von  $u_1$ , wie aus dem Folgenden hervorgeht.

Eine Function von  $p$  Variablen  $\omega_1, \dots, \omega_p$  heisst periodisch, wenn sie ihren Werth nicht ändert bei gleichzeitiger Zunahme aller Argumente um ein constantes Grössensystem, etwa  $A_1, \dots, A_p$ . Ein solches System heisst ein System zusammengehöriger Perioden. Hat die Function mehrere Periodensysteme, etwa  $A_{11}, \dots, A_{p1}; A_{12}, \dots, A_{p2}; \dots; A_{1q}, \dots, A_{pq}$ , so ist auch jede lineare Combination derselben wie  $m_1 A_{11} + \dots + m_q A_{1q}; m_1 A_{21} + \dots + m_q A_{2q}; \dots; m_1 A_{p1} + \dots + m_q A_{pq}$  mit denselben ganzzahligen Coefficienten  $m_1, \dots, m_q$  ein zusammengehöriges Periodensystem. Mehrere Periodensysteme heissen von einander unabhängig, wenn sie nicht aus einer geringeren Zahl von Periodensystemen in der angegebenen Weise sich zusammensetzen lassen.

Ist nun eine Function von  $p$  Variablen  $\omega_1, \dots, \omega_p$  eindeutig und im Allgemeinen stetig und besitzt sie  $\varrho$  von einander unabhängige Periodensysteme, dargestellt durch das Schema:

$$\begin{array}{cccc} \omega_1 & A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1\varrho} \\ \omega_2 & A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2\varrho} \\ : & : & : & \dots & : \\ \omega_p & A_{p1} & A_{p2} & \dots & A_{p\varrho} \end{array}, \quad (3)$$

so gelten folgende Sätze<sup>1)</sup>, die wir nur historisch anführen:

(I) Ist  $\varrho = 2p$ , so kann die Determinante  $A$ , gebildet aus den reellen und imaginären Theilen  $A'_{ik}$  und  $A''_{ik}$  der Moduln  $A_{ik}$ , nicht verschwinden, oder geometrisch: es kann der Inhalt des periodisch wiederkehrenden Gebietes der Function nicht Null sein.

Wäre nämlich die Determinante  $A = 0$ , so hätte man zwischen den  $2p$  Modulsystemen  $p$  Gleichungen der Form ( $i = 1, \dots, p$ ):

$$q_1 A_{i1} + \dots + q_{2p} A_{i2p} = 0,$$

wo  $q_1, \dots, q_{2p}$  reelle Zahlen sind; es sind dann zwei Fälle möglich:

entweder die  $2p$  Grössen  $q_i$  sind sämmtlich ganze oder rationale Zahlen; dann kann man zeigen, dass die  $2p$  Periodensysteme sich auf nur  $2p - 1$  Systeme zurückführen lassen;

1) Hermite, Journ. für Math. Bd. 40 S. 310 (1850). Riemann, Ges. W. S. 276 ff. (1859). Clebsch-Gordan, Abel'sche Functionen S. 130 ff. (1866). Weierstrass, Berliner Monatsberichte 1876 oder Abh. zur Functionenlehre. Berlin 1886 S. 165 ff.

oder die  $2p$  Grössen  $q_i$  sind zum Theil oder alle irrational; dann kann man zeigen, dass sich die  $p$  Variabeln  $\omega_i$  durch weniger als  $p$  lineare Combinationen der  $\omega_i$  ersetzen lassen.

Beides betrachten wir als ausgeschlossen.

(II) Eine eindeutige und im Allgemeinen stetige Function von  $p$  Variabeln  $\omega_1, \dots, \omega_p$  kann nicht mehr als  $2p$  unabhängige Periodensysteme besitzen.

Zum Beweise seien  $2p$  unabhängige Periodensysteme (3) ( $q=2p$ ) gegeben, also die zugehörige Determinante  $A \geq 0$  (nach 1). Angenommen, es gäbe noch ein  $(2p+1)^{\text{tes}}$  Periodensystem  $A_{12p+1}, \dots, A_{p2p+1}$ , so bilde man mit  $2p+1$  ganzen Zahlen  $m_1, \dots, m_{2p+1}$  die  $2p$  reellen Ausdrücke ( $l = 1, \dots, p$ ):

$$(5) \quad \begin{cases} m_1 A'_{l1} + \dots + m_{2p+1} A'_{l2p+1}, \\ m_1 A''_{l1} + \dots + m_{2p+1} A''_{l2p+1}. \end{cases}$$

Dann sind zwei Fälle möglich:

entweder die  $2p+1$  Zahlen  $m_i$  lassen sich so bestimmen, dass die  $2p$  Ausdrücke (5) sämtlich Null werden; dann kann man zeigen, dass die  $2p+1$  Periodensysteme sich auf  $2p$  Periodensysteme zurückführen lassen;

oder die  $2p+1$  Zahlen  $m_i$  lassen sich so bestimmen, dass die  $2p$  Ausdrücke (5) kleiner werden als  $2p$  beliebig vorgegebene, kleine Grössen  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{2p}$ ; dann kann man zeigen, dass die  $p$  Argumente  $\omega_i$  sich durch weniger als  $p$  lineare Combinationen der  $\omega_i$  ersetzen lassen. Beides war ausgeschlossen.

Diese Sätze führen nun nothwendig auf die Form (2) des Umkehrproblems<sup>1)</sup>. Denn wollte man ein einzelnes Integral 1. Gattung mit der oberen Grenze  $x$  gleich  $U$  setzen, so würde der allgemeinste Werth, den das Integral bei Veränderung des Integrationsweges annimmt, aus einem Werth  $U$  hervorgehen, indem man diesen um eine lineare, ganzzahlige Combination der  $2p$  Periodicitätsmoduln des Integrals vermehrt. Durch passende Bestimmung der ganzen Zahlen könnte man nun (wie sich aus dem Beweise von (II) ergibt) den reellen und imaginären Theil des Zuwachses, den  $U$  so erfährt, also auch diesen Zuwachs selber, beliebig klein machen. Das Integral könnte also für jede obere Grenze  $x$  jeden Werth  $U$  annehmen und folglich auch die obere Grenze für jeden beliebigen Werth von  $U$  jeden beliebigen Werth  $x$ . Bei der Umkehrung würde man also für die Coordinaten des Punktes  $x$  Functionen von  $U$  erhalten, die

1) Jacobi, l. c. und Clebsch-Gordan, Abel'sche Functionen S. 136.

unendlich vieltentig wären und deren Werth nicht sowohl von dem Werth des Argumentes  $U$  abhinge, als vielmehr von dem Wege, den das Integral durchlaufen muss, um einen gewissen Werth  $U$  zu erlangen. Ähnliches würde gelten, wenn man Gleichungen der Form (2) bilden wollte aus  $q$  Integralen 1. Gattung mit  $q$  oberen Grenzen  $x_h$  und  $q$  Variabeln  $U_i$ , so lange  $q < p$  wäre. Nimmt man aber die  $p$  Gleichungen (2), also  $q = p$ , so fallen die Schwierigkeiten weg. Denn die allgemeinsten Werthe der  $U_i$ , die durch Veränderung der Integrationswege entstehen, gehen aus einem Werthsystem hervor durch Hinzufügung eines Systemes von zusammengehörigen Periodicitätsmoduln der Integrale. Trennt man nun die  $p$  Zuwüchse, welche die verschiedenen Grössen  $U_i$  so erhalten, in ihre  $2p$  reellen und imaginären Theile, so kann man durch passende Bestimmung der ganzen Zahlen (wie sich aus dem Beweise von (II) ergibt) von diesen  $2p$  Grössen wohl die  $2p - 1$  ersten beliebig klein machen, nicht aber die  $2p^{\text{te}}$ . In zwei Werthsystemen der  $U_i$  also, die denselben oberen Grenzpunkten  $x_h$  entsprechen, sind die beiden Werthe wenigstens für eine der Variabeln  $U_i$  um eine endliche Grösse verschieden, so dass also nicht mehr jedem System der oberen Grenzen  $x_h$  jedes System der  $U_i$  entspricht. (q. e. d.)

Die analytische Behandlung des Umkehrproblems gründet sich nun, wie bei den elliptischen Functionen, auf eine transcendente Function, die Thetafunction mit  $p$  Variabeln. Man gelangt zu derselben<sup>1)</sup>, indem man sich die Aufgabe stellt, eine Function zu bilden  $\mathcal{W}(\omega_1, \dots, \omega_p)$  von  $p$  Variabeln  $\omega_1, \dots, \omega_p$ , die durch die Eigenschaften (A) S. 194 charakterisirt ist. Die  $2p$  simultanen Periodensysteme dieser Function seien gegeben durch das Schema:

$$\begin{array}{c} \omega_1 \\ \vdots \\ \omega_p \end{array} \left| \begin{array}{ccc} A_{11} & \dots & A_{1,2p} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{p1} & \dots & A_{p,2p} \end{array} \right|. \quad (6)$$

Da die Determinante  $A$ , gebildet aus den reellen und imaginären Theilen dieser Perioden, nicht verschwindet (Satz I), so können auch nicht alle aus  $p$  der Periodensysteme gebildeten Determinanten verschwinden. Eine der nicht verschwindenden Determinanten sei die der  $p$  ersten Periodensysteme in (6). Wir benutzen dieselbe zur Einführung neuer Variabeln  $v_1, \dots, v_p$ , indem wir setzen ( $i = 1, \dots, p$ ):

$$\omega_1 \pi i = \sum_i A_{1i} v_i, \dots, \omega_p \pi i = \sum_i A_{pi} v_i. \quad (7)$$

1) Für  $p = 1$ : Hermite (1844, s. Jacobi's Ges. W. Bd. II S. 97. Für allgemeines  $p$ : Weber, Ab. F. ( $p = 3$ ) S. 5 ff. (1875).

Die Periodensysteme der transformirten Function  $F(v_1, \dots, v_p)$  sind alsdann:

$$(8) \quad \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_p \end{array} \left| \begin{array}{cccc} \pi i & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \pi i & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & \pi i \end{array} \right| \begin{array}{cccc} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{p1} & b_{p2} & \dots & b_{pp} \end{array} \right|,$$

wo die  $b_{ik}$  sich leicht nach (6) und (7) bestimmen. Die  $p$  ersten Periodensysteme in (8) zeigen, dass die Function  $F(v_1, \dots, v_p)$  für jede der Variablen  $v_1, \dots, v_p$  einzeln die Periode  $\pi i$  hat. Dies führt dazu,  $F$  als Function von  $e^{2v_1}, \dots, e^{2v_p}$  aufzufassen. Wir fragen zunächst, ob eine  $2p$ -fach periodische Function  $F$  dieser Art für alle endlichen Werthe der Argumente  $v_1, \dots, v_p$  endlich und stetig sein kann. Dies ist nicht möglich, wie aus folgendem Satze hervorgeht:

(III) Eine für alle endlichen Werthe der Argumente  $v_1, \dots, v_p$  endliche und stetige Function  $\Phi(v_1, \dots, v_p)$ , die für jedes Argument einzeln die Periode  $\pi i$  hat, kann kein weiteres von diesen unabhängiges Periodensystem  $b_1, \dots, b_p$  besitzen<sup>1)</sup>; sie kann auch nicht bei gleichzeitiger Aenderung der Argumente um ein solches System  $b_1, \dots, b_p$  einen constanten Factor  $C$  annehmen.

In der That, eine Function von der vorausgesetzten Beschaffenheit lässt sich, wie unten bewiesen wird, durch eine Reihe von der Form:

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Phi(v_1, \dots, v_p) = \sum_{v_1} \dots \sum_{v_p} B_{v_1 \dots v_p} e^{2(v_1 v_1 + \dots + v_p v_p)} \\ (v_1, \dots, v_p = -\infty, \dots, +\infty) \end{array} \right.$$

darstellen, in der die Summation sich auf alle positiven und negativen, ganzzahligen Werthe von  $v_1, \dots, v_p$  erstreckt. Wäre nun erstens:

$$\Phi(v_1 + b_1, \dots, v_p + b_p) = \Phi(v_1, \dots, v_p),$$

so hätte man nach (9):

$$\sum_{v_1} \dots \sum_{v_p} B_{v_1 \dots v_p} e^{2 \sum v_i v_i} = \sum_{v_1} \dots \sum_{v_p} B_{v_1 \dots v_p} e^{2 \sum v_i v_i} e^{2 \sum v_i b_i}.$$

Diese Gleichung kann nur identisch erfüllt sein, wenn  $\sum v_i b_i$  ein ganzes Vielfaches von  $\pi i$  ist für alle in (9) vorkommenden Werthcombinationen von  $v_1, \dots, v_p$ . Soll sich also die Function  $\Phi$  nicht

1) Für  $p = 1$ : Satz von Liouville, Comptes rendus 1844, S. 1262. Vgl. auch Journ. für Math. Bd. 88. S. 277.



auf eine Constante reduciren, so müssen 1, 2, .. oder  $p$  Relationen der Form bestehen:

$$\sum_{i=1}^n k_i b_i = l \pi i,$$

wo die  $k_i$  und  $l$  ganze Zahlen sind.

Bestehen  $p$  solcher Relationen, von denen keine aus der anderen folgt, so sind die Grössen  $b_i$  rationale Vielfache von  $\pi i$  und die wahren Perioden der Function sind nicht  $\pi i$  selber, sondern gewisse Bruchtheile von  $\pi i$ , aus denen auch das Periodensystem  $b_1, \dots, b_p$  zusammengesetzt werden kann. Bestehen aber nur 1, 2, .. oder  $p - 1$  solcher Relationen, so beschränkt sich die Function bez. auf 1, 2, .. oder  $p - 1$  Glieder, die sich bez. durch 1, 2, ..,  $p - 1$  lineare Combinationen der Variabeln  $v_1, \dots, v_p$  (nämlich die Werthe  $\sum k_i v_i$ ) ausdrücken lassen, was wir ausschliessen.

Wäre dagegen zweitens:

$$\Phi(v_1 + b_1, \dots, v_p + b_p) = C \Phi(v_1, \dots, v_p),$$

so müsste  $C$  die Form haben  $C = e^{2 \sum \mu_i b_i}$ , wo  $\mu_1, \dots, \mu_p$  ganze Zahlen sind. Dann aber hätte man in  $e^{-2 \sum \mu_i v_i} \Phi(v_1, \dots, v_p)$  eine Function, die eindeutig und für alle endlichen Werthe der Argumente stetig wäre und ausser den Einzelperioden  $\pi i$  das Periodensystem  $b$  hätte, was nach dem Vorstehenden ausgeschlossen ist.

Wir beweisen nachträglich den bereits benutzten Satz<sup>1)</sup>:

(IV) Eine für alle endlichen Werthe der Argumente  $v_1, \dots, v_p$  endliche und stetige Function  $\Phi(v_1, \dots, v_p)$ , die für jedes Argument einzeln die Periode  $\pi i$  hat, lässt sich immer und nur auf eine Art in eine nach ganzen positiven und negativen Potenzen der Grössen  $e^{2v_1}, \dots, e^{2v_p}$  fortschreitende, für alle endlichen Werthsysteme von  $v_1, \dots, v_p$  convergente Reihe von der Form (9) entwickeln.

Zum Beweise betrachte man  $\Phi(v_1, \dots, v_p)$  zunächst als Function von  $v_1$  allein und bezeichne sie in diesem Sinne mit  $\Phi_1(v_1)$ . Da diese Function die Periode  $\pi i$  besitzen soll, so lässt sie sich, und zwar nur auf eine Art, in eine nach Potenzen von  $e^{2v_1}$  fortschreitende, für alle endlichen Werthe von  $v_1$  convergente Reihe entwickeln von der Form:

$$\Phi_1(v_1) = \sum_{r_1} B_{r_1} e^{2r_1 v_1} \quad (v_1 = -\infty, \dots, +\infty). \quad (9a)$$

1) Hermite 1844 l. c. Thomae, Die allgem. Transform. der Thetafunction. Diss. Göttingen 1864. S. 6.

Denn setzt man  $2v_1 = \log z$ , so entspricht jedem Werth von  $z$  eine Reihe von Werthen  $v_1$  von der Form  $v_1 + m\pi i$ , wo  $m$  eine ganze Zahl ist. Allen diesen Werthen entspricht nur ein Werth von  $\Phi_1(v_1)$ . Daher ist  $\Phi_1(v_1)$  eine eindeutige Function von  $z$ . Ferner ist  $\Phi_1(v_1)$  endlich für alle Werthe von  $z$ , mit Ausnahme von  $z = 0$  und  $z = \infty$ . Schlägt man daher um den Nullpunkt der  $z$ -Ebene einen sehr kleinen und einen sehr grossen Kreis, so ist die Function  $\Phi_1(v_1)$  in dem Ringgebiet zwischen den zwei Kreisen eindeutig und stetig und folglich entwickelbar in eine nach ganzen, positiven und negativen Potenzen von  $z$  fortschreitende Reihe, die für jeden Punkt des Ringgebietes convergirt. Führt man wieder  $v_1$  ein statt  $z$ , so hat man die obige Entwicklung (9a). Kehrt man zurück zur Function  $\Phi(v_1, \dots, v_p)$ , so ist der Coefficient  $B_{v_1}$  in (9a) noch Function von  $(v_2, \dots, v_p)$  und lässt sich, als Function von  $v_2$  betrachtet, die nach Voraussetzung die Periode  $\pi i$  besitzt, entwickeln in der Form:

$$B_{v_1} = \sum_{v_2} B_{v_1 v_2} e^{2v_2 v_2} \quad (v_2 = -\infty, \dots, +\infty),$$

wo  $B_{v_1 v_2}$  noch Function von  $(v_3, \dots, v_p)$  ist. Führt man so fort, so ergibt sich schliesslich für  $\Phi(v_1, \dots, v_p)$  die Entwicklung (9), in der die Coefficienten  $B_{v_1 \dots v_p}$  von  $v_1, \dots, v_p$  ganz unabhängig sind. (q. e. d.)

Aus Satz III ist zu schliessen<sup>1)</sup>, dass die allgemeine, periodische Function  $F(v_1, \dots, v_p)$  von  $p$  Variabeln mit mehr als  $p$  Periodensystemen nothwendig Stellen  $v_1, \dots, v_p$  im Endlichen hat, in denen sie unendlich wird und weiter, dass sie sich darstellen lässt in Bruchform:

$$(10) \quad F(v_1, \dots, v_p) = \frac{\Phi_1(v_1, \dots, v_p)}{\Phi(v_1, \dots, v_p)},$$

wo  $\Phi$  und  $\Phi_1$  convergente Reihen der Form (9) sind. Die Bedingung dafür, dass die Function  $F$ , ausser der Periode  $\pi i$  für jede Variable, noch  $p$  weitere, simultane Periodensysteme  $b_{ik}$  (8) habe, ist

$$\frac{\Phi(v_1 + b_{1i}, \dots, v_p + b_{pi})}{\Phi(v_1, \dots, v_p)} = \frac{\Phi_1(v_1 + b_{1i}, \dots, v_p + b_{pi})}{\Phi_1(v_1, \dots, v_p)} = \varphi_i(v_1, \dots, v_p),$$

so dass für Zähler und Nenner in (10) die Functionalgleichungen gelten ( $i = 1, \dots, p$ ):

$$(11) \quad \Phi(v_1 + b_{1i}, \dots, v_p + b_{pi}) = \Phi(v_1, \dots, v_p) \varphi_i(v_1, \dots, v_p).$$

Da die  $p$  Functionen  $\varphi_i$  (ohne Constanten zu sein, Satz III) für jede

1) Weber, l. c. S. 8 ff.

Variable die Periode  $\pi i$  haben müssen, so macht man die einfachste, zulässige Annahme, indem man setzt ( $i, r = 1, \dots, p$ ):

$$\varphi_i(v_1, \dots, v_p) = C_i e^{2 \sum_r k_r^i v_r}, \quad (12)$$

wo die  $C_i$  beliebige Constanten und die  $k_r^i$  ganze Zahlen bedeuten.

Zunächst kann die Determinante der  $k_r^i$ , also

$$K = \sum \pm k_1^1 k_2^2 \cdots k_p^p, \quad (13)$$

nicht verschwinden. Es würden sich nämlich sonst  $p$  ganze Zahlen  $n_1, \dots, n_p$  bestimmen lassen (proportional gewissen Unterdeterminanten von  $K$ ) so, dass  $\sum_i n_i k_r^i = 0$  ist. Bildet man nun  $b_h = \sum_i n_i b_{hi}$ , so würde aus (11) und (12) folgen:

$$\Phi(v_1 + b_1, \dots, v_p + b_p) = C e^{2 \sum_r \sum_i n_i k_r^i v_r} \Phi(v_1, \dots, v_p) = C \cdot \Phi(v_1, \dots, v_p),$$

wo  $C$  eine Constante ist. Dies ist aber nach (III) nicht zulässig.

Diese Bemerkung führt zur Vereinfachung durch Einführung neuer Variabeln; wir setzen nämlich:

$$\sum_r k_r^i v_r = -m u_i, \quad \sum_r k_r^i b_{rh} = -m a_{ih}, \quad (14)$$

wo  $m = K$  (13) ist und bezeichnen  $\Phi(v_1, \dots, v_p)$  als Function der  $u_i$  durch  $\Theta(u_1, \dots, u_p)$ .

Die Function  $\Theta(u_1, \dots, u_p)$  hat wieder für jede einzelne Variable  $u_i$  die Periode  $\pi i$ . Denn die Auflösung von (14) ergibt, wenn  $K_r^i$  die Unterdeterminante von  $k_r^i$  in  $K$  ist,

$$v_1 = -(K_1^1 u_1 + \cdots + K_1^p u_p); \dots; v_p = -(K_p^1 u_1 + \cdots + K_p^p u_p),$$

so dass den Werthen  $(u_1, u_2, \dots, u_p) = (\pi i, 0, \dots, 0)$  die Werthe  $v_1 = -K_1^1 \pi i, \dots, v_p = -K_p^1 \pi i$  entsprechen. Die Function  $\Phi(v_1, \dots, v_p)$  aber bleibt bei Vermehrung der  $v_i$  um diese Grössen ungeändert. Die Gleichungen (11) gehen ferner mit Rücksicht auf (12) und (14) über in

$$\Theta(u_1 + a_{1i}, \dots, u_p + a_{pi}) = C_i e^{-2m u_i} \Theta(u_1, \dots, u_p).$$

Die ganze Zahl  $m = K$  (13) ist beliebig; wir setzen sie positiv voraus, da einer Umkehrung des Zeichens von  $m$  nur eine Umkehrung der Vorzeichen der  $u_i$  und der  $a_{ik}$  entsprechen würde. Ferner sind die Constanten  $C_i$  beliebig, da eine Aenderung derselben mit einer Aenderung der  $u_i$  um gewisse additive Constanten gleichbedeutend ist; wir setzen unbeschadet der Allgemeinheit  $C_i = e^{-m_i a_{ii}}$ .

Hiermit ist eine Function  $\Theta(u_1, \dots, u_p)$  gewonnen, die sich in der Form darstellt:

$$(15) \quad \begin{cases} \Theta(u_1, \dots, u_p) = \sum_{r_1} \dots \sum_{r_p} A_{r_1 \dots r_p} e^{\frac{2}{i} \sum r_i u_i} \\ (r_1, \dots, r_p = -\infty, \dots + \infty), \end{cases}$$

und die den beiden Functionalgleichungen genügt ( $i, k = 1, \dots, p$ ):

$$(16) \quad \begin{cases} \Theta(u_1, \dots, u_k, \dots, u_p) = \Theta(u_1, \dots, u_k + \pi i, \dots, u_p), \\ \Theta(u_1, \dots, u_p) = \Theta(u_1 + a_{1i}, \dots, u_p + a_{pi}) e^{m(2u_i + a_{ii})}. \end{cases}$$

Ein solche Function heisst eine **Thetafunction** von der Ordnung  $m$  mit den Variabeln oder Argumenten  $u_i$  und dem Perioden- oder Modul-System  $\pi i$  und  $a_{ik}$ . Das Letztere ist enthalten in dem Schema:

$$(17) \quad \left( \begin{array}{c|cccc} u_1 & \pi i & 0 & \dots & 0 \\ u_2 & 0 & \pi i & \dots & 0 \\ \vdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u_p & 0 & 0 & \dots & \pi i \end{array} \middle| \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pp} \end{array} \right).$$

Es bleiben noch die Coefficienten  $A$  in (15) zu bestimmen, wozu die zweite der Gleichungen (16) dient. Aus ihr ergibt sich, wenn  $n_1, \dots, n_p$  beliebige, ganze Zahlen sind, die allgemeinere Gleichung ( $i, k = 1, \dots, p$ ):

$$(18) \quad \Theta(u_1, \dots, u_p) = \Theta\left(u_1 + \sum_i n_i a_{1i}, \dots, u_p + \sum_i n_i a_{pi}\right) e^{m\left(\sum_k n_k u_k + \sum_{ik} a_{ik} n_i n_k\right)}.$$

Setzt man in dem Ausdruck der rechten Seite die Reihe (15) ein, so folgt:

$$\Theta(u_1, \dots, u_p) = \sum_{r_1} \dots \sum_{r_p} A_{r_1 \dots r_p} e^{\frac{2}{i} \sum u_k (r_k + m n_k) + \sum_{ik} a_{ik} n_i (2 r_k + m n_k)}.$$

Andrerseits kann man (15) schreiben:

$$\Theta(u_1, \dots, u_p) = \sum_{r_1 + m n_1} \dots \sum_{r_p + m n_p} A_{r_1 + m n_1 \dots r_p + m n_p} e^{\frac{2}{i} \sum u_k (r_k + m n_k)}.$$

Die Vergleichung beider Reihen gibt für die Coefficienten  $A$  die Relation:

$$(19) \quad A_{r_1 + m n_1 \dots r_p + m n_p} = A_{r_1 \dots r_p} e^{\sum_{ik} a_{ik} n_i (2 r_k + m n_k)}.$$

Es ergeben sich daher alle Coefficienten  $A$  in (15) aus denjenigen Coefficienten  $A_{r_1 \dots r_p}$ , in welchen  $r_1, \dots, r_p$  nur die Zahlen  $0, 1, 2, \dots, m-1$  durchlaufen. Hieraus folgt, dass alle Thetafunc-

tionen von der Ordnung  $m$  durch höchstens  $m^p$  linear unabhängige unter ihnen ausdrückbar sind oder dass die allgemeinste solche Thetafunction  $m^p$  willkürliche Constanten linear und homogen enthält. Die speciellen Thetafunctionen, auf welche die Untersuchung geführt hat, sind, wenn  $(v_1, \dots, v_p = 0, 1, 2, \dots, m-1)$ :

$$\Theta(u_1, \dots, u_p) = \sum_{n_1} \dots \sum_{n_p} e^{i \sum_i u_i (v_i + m n_i) + \sum_{ik} a_{ik} n_i (2 v_k + m n_k)} \quad (20)$$

und, wenn  $m = 1$ , also  $v_1, \dots, v_p = 0$  ist,

$$\vartheta(u_1, \dots, u_p) = \sum_{n_1} \dots \sum_{n_p} e^{i \sum_i u_i n_i + \sum_{ik} a_{ik} n_i n_k}. \quad (21)$$

Aus der Gleichung (19) ergibt sich noch die wichtige Folgerung, dass:

$$a_{il} = a_{li} \quad (i, l = 1, \dots, p) \quad (22)$$

sein muss, oder dass das Modulsystem  $a_{il}$  der Thetafunction nicht beliebig ist, sondern eine symmetrische Determinante bildet.

Denn setzt man in (19) alle  $n$  gleich 0 ausser  $n_i$  und ein zweites mal ausser  $n_l$ , so ist:

$$\begin{aligned} A_{r_1 \dots r_i + m \dots r_p} &= A_{r_1 \dots r_i \dots r_p} e^{2 \sum_k a_{ik} v_k + a_{ii} m}, \\ A_{r_1 \dots r_l + m \dots r_p} &= A_{r_1 \dots r_l \dots r_p} e^{2 \sum_k a_{lk} v_k + a_{ll} m}. \end{aligned}$$

Setzt man in der ersten Gleichung  $v_l + m$  für  $v_l$  und in der zweiten Gleichung  $v_i + m$  für  $v_i$  und wendet jedesmal die andere Gleichung an, so erhält man zwei Gleichungen von der Form:

$$A_{r_1 \dots r_i + m \dots r_l + m \dots r_p} = A_{r_1 \dots r_p} e^M,$$

wo in der ersten Gleichung

$$M = 2 \sum_k (a_{ik} + a_{lk}) v_k + (a_{ii} + a_{ll}) m + 2 a_{li} m,$$

in der zweiten Gleichung

$$M = 2 \sum_k (a_{ik} + a_{lk}) v_k + (a_{ii} + a_{ll}) m + 2 a_{li} m,$$

woraus durch Vergleichung die Relation (22) folgt.

Indem wir noch die Convergenz der Thetafunction (s. § 26) voraussetzen, fassen wir das bisher Gewonnene in dem Satze zusammen:

(V) Es gibt Functionen der  $p$  Variabeln  $u_1, \dots, u_p$ , die characterisirt sind durch folgende Eigenschaften:

- 1) sie sind eindeutig und für alle endlichen Werthsysteme der  $u_i$  stetig;
- 2) sie genügen den Functionalgleichungen (16) unter der Voraussetzung (22) für das Modulsystem  $a_{ik}$ .

Diese Functionen heissen Thetafunctionen von der Ordnung  $m$  und stellen sich analytisch dar durch die unendlichen Reihen (15). Die Coefficienten derselben genügen den Bedingungen (19). Die allgemeinste Thetafunction von der Ordnung  $m$  lässt sich linear durch höchstens  $m^p$  solcher Thetafunctionen ausdrücken. Die Quotienten zweier Thetafunctionen von derselben Ordnung sind nach (16)  $2p$ -fach periodische Functionen der  $p$  Variabeln  $u_i$ .

### § 26. Die Thetafunction erster Ordnung.

In § 25 wurde die allgemeine Thetafunction von der Ordnung  $m$  abgeleitet. Es soll nun die Thetafunction erster Ordnung ( $m=1$ ) genauer untersucht werden, die für die Lösung des Umkehrproblems von besonderer Wichtigkeit ist. Es gibt nur eine solche Thetafunction; man erhält aber aus ihr durch geringe Veränderungen weitere Functionen von ähnlichem Charakter.

Die Thetafunction erster Ordnung von  $p$  Variabeln<sup>1)</sup>  $u_1, \dots, u_p$  ist definirt durch die  $p$ -fach unendliche Reihe (Gl. 21 § 25); wir führen eine abkürzende Schreibweise ein, nämlich:

$$(1) \quad \begin{cases} \vartheta(u) = \vartheta(u_1, \dots, u_p) = \sum_{n_1 \dots n_p} e^{\frac{2}{i} \sum a_i u_i + \sum_{ik} a_{ik} n_i n_k} \\ (i, k = 1, \dots, p); (n_1, \dots, n_p = -\infty \dots + \infty), \end{cases}$$

wobei  $a_{ik} = a_{ki}$  ist.

Zunächst ist die Convergenz der Reihe (1) zu untersuchen. Bezeichnet man den reellen Theil von  $a_{ik}$  mit  $a'_{ik}$ , so gilt der Satz<sup>2)</sup>:

- (1) Damit die Reihe (1) für ein endliches Werthsystem der Argumente  $u_1, \dots, u_p$  convergire, ist nothwendige und hinreichende Bedingung

1) dass die Determinante:

$$(2) \quad \sum \pm a'_{11} a'_{22} \dots a'_{pp} \geq 0 \quad \text{sei,}$$

1) Für  $p = 2$  zuerst aufgestellt von Rosenhain (1844), Journ. für Math. Bd. 40. S. 320.

2) Riemann, Ges. W. S. 121.

2) dass der Ausdruck:

$$\sum_i \sum_k a'_{ik} r_i r_k \quad (3)$$

negativ sei für jedes beliebige, reelle Zahlensystem  $r_1, \dots, r_p$ ,

oder auch, dass sich dieser Ausdruck durch eine Summe von  $p$  negativen Quadraten darstellen lasse.

Beweis<sup>1)</sup>. Bezeichnet man den reellen Theil von  $u_i$  mit  $u'_i$ , so ist der Exponent in dem absoluten Betrag des allgemeinen Gliedes von (1):

$$\sum_i \sum_k a'_{ik} n_i n_k + 2 \sum_i n_i u'_i. \quad (4)$$

Dieser Ausdruck lässt sich als ganze Function zweiten Grades in  $n_1, \dots, n_p$ , wenn die Bedingung (2) erfüllt ist, bei passender Bestimmung von  $p$  reellen Grössen  $q_1, \dots, q_p$  ersetzen durch:

$$\sum_{ik} a'_{ik} (n_i + q_i) (n_k + q_k). \quad (5)$$

Hierbei wird allerdings zu (4) noch das von den Zahlen  $n$  unabhängige Glied  $\sum_i \sum_k a'_{ik} q_i q_k$  hinzugefügt, wodurch die Function (1) einen Factor erhält; dieser Factor ist aber von keinem Einfluss auf die Convergenz von (1). Der Ausdruck (5) lässt sich weiter, unter Voraussetzung von (2), durch eine lineare, orthogonale Substitution für die Grössen  $n_i + q_i$  überführen in:

$$\sum_i \sum_k a'_{ik} (n_i + q_i) (n_k + q_k) = \sum_i \lambda_i \xi_i^2, \quad (6)$$

mit dem Zusatze, dass gleichzeitig

$$\sum_i (n_i + q_i)^2 = \sum_i \xi_i^2 \quad (7)$$

wird. Die von den  $a'_{ik}$  abhängigen  $p$  Coefficienten  $\lambda_i$  sind bekanntlich alle reell und wegen (2) von 0 verschieden (s. Gl. 8a).

Aus dieser Umformung ergibt sich, dass (I. 1. und 2.) nothwendige Bedingungen für die Convergenz von (1) sind. Denn soll (1) convergent sein, so darf keiner der Ausdrücke (4) oder (5) für reelle Werthe von  $n_i$  oder  $n_i + q_i$  zwischen  $-\infty$  und  $+\infty$  positiv unendlich werden; es müssen also in (6) die  $\lambda_i$  sämmtlich negativ sein. Die Bedingungen (I. 1. und 2.) sind aber auch hinreichend für die Convergenz

1) Nach Vorlesungen von Herrn Weierstrass. Einen anderen Beweis gibt Riemann, Ges. W. S. 452.

von (1). Ist nämlich von den  $p$  negativen  $\lambda_i$  der absolut kleinste Werth  $= \lambda_0$ , so ist nach (6) und (7):

$$\sum_{ik} a'_{ik} (n_i + q_i) (n_k + q_k) < \lambda_0 \sum_i \xi_i^2 \text{ oder } < \lambda_0 \sum_i (n_i + q_i)^2$$

und folglich ist der absolute Werth der Reihe (1), wenn man den oben erwähnten Factor hinzufügt, kleiner als:

$$(8) \quad \left\{ \sum_{n_1} e^{\lambda_0 (n_1 + q_1)^2} \sum_{n_2} e^{\lambda_0 (n_2 + q_2)^2} \dots \sum_{n_p} e^{\lambda_0 (n_p + q_p)^2} \right. \\ \left. (n_1, \dots, n_p = -\infty \dots +\infty) \right\}$$

Hieraus aber folgt, dass die Function (1) absolut convergent ist, da in (8) bei negativem Werth von  $\lambda_0$  jeder der  $p$  Factoren einzeln convergirt. Denn in dem  $i^{\text{ten}}$  Factor in (8) ist, wenn man den von  $n_i$  unabhängigen Factor  $e^{\lambda_0 q_i^2}$  bei Seite lässt, die  $n_i^{\text{te}}$  Wurzel des  $n_i^{\text{ten}}$  Gliedes

$$= e^{2\lambda_0 q_i} (e^{\lambda_0})^{n_i},$$

ein Werth, der sich bei negativem  $\lambda_0$  mit unbegrenzt wachsendem  $n_i$  der Grenze 0 nähert. (q. e. d.)

Die Bedingung, dass die  $p$  Grössen  $\lambda_i$  sämmtlich negativ seien, lässt sich leicht auf die reellen Theile  $a'_{ik}$  der Thetamoduln  $a_{ik}$  übertragen. Die  $\lambda_i$  sind bekanntlich die Wurzeln der Gleichung in  $\lambda$ :

$$(8a) \quad \begin{vmatrix} a'_{11} - \lambda & a'_{21} & \dots & a'_{p1} \\ a'_{12} & a'_{22} - \lambda & \dots & a'_{p2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a'_{1p} & a'_{2p} & \dots & a'_{pp} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Setzt man diese Gleichung in die Form:

$$(8b) \quad \lambda^p + A_1 \lambda^{p-1} + \dots + A_{p-1} \lambda + A_p = 0$$

und wendet den Satz an, dass eine Gleichung mit reellen Wurzeln soviel negative Wurzeln besitzt, als ihre Coefficienten Zeichenfolgen haben, so geht die Bedingung, dass die  $p$  Wurzeln  $\lambda_i$  negativ seien, über in die Bedingung, dass die  $p$  Coefficienten  $A_1, \dots, A_p$  in (8b) sämmtlich positiv sind, da der Coefficient von  $\lambda^p$  positiv ( $= 1$ ) ist.

Wir stellen die Eigenschaften der Thetafunction 1. Ordnung  $\vartheta(u_1, \dots, u_p) = \vartheta(u)$  (1) nochmals kurz zusammen<sup>1)</sup>.

1) Riemann, Ges. W. S. 121.



- 1) Die Function  $\vartheta(u_1, \dots, u_p)$  ist eindeutig und für alle endlichen Werthsysteme  $u_1, \dots, u_p$  stetig; sie lässt sich daher in eine absolut convergente, nach ganzen, positiven Potenzen von  $u_1, \dots, u_p$  fortschreitende Reihe entwickeln von der Form:

$$\vartheta(u_1, \dots, u_p) = \sum_{m_1} \dots \sum_{m_p} C_{m_1 \dots m_p} u_1^{m_1} \dots u_p^{m_p} \quad \left. \vphantom{\sum_{m_1} \dots \sum_{m_p}} \right\} \quad (9)$$

$$(m_1, \dots, m_p = 0, 1, \dots, +\infty),$$

wobei die Coefficienten  $C_{m_1 \dots m_p}$  selber  $p$ -fach unendliche Summen sind, die man aus (1) durch Entwicklung der Exponentialfunctionen in Potenzreihen nach den  $u_1, \dots, u_p$  gewinnt.

- 2) Die Function  $\vartheta(u_1, \dots, u_p)$  hat gewisse periodische Eigenschaften, die ausgedrückt sind durch die beiden Functionalgleichungen (16) § 25, nämlich:

$$\left. \begin{aligned} \vartheta(u_1, \dots, u_k, \dots, u_p) &= \vartheta(u_1, \dots, u_k + \pi i, \dots, u_p) \\ \vartheta(u_1, \dots, u_p) &= \vartheta(u_1 + a_{1i}, \dots, u_p + a_{pi}) e^{2u_i + a_{ii}}. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Die Gleichungen (10) kann man verallgemeinern. Man bilde aus dem Schema der Perioden (17) § 25 mit Hülfe von ganzzahligen Factoren  $g'_i$  und  $g_i$  ( $i = 1, \dots, p$ ) die allgemeinen Periodensysteme der Function  $\vartheta$ , nämlich:

$$G_1 = g'_1 \pi i + \sum_i g_i a_{1i}, \dots, G_p = g'_p \pi i + \sum_i g_i a_{pi}. \quad (11)$$

Dann folgt aus den Gleichungen (10):

$$\vartheta(u_1, \dots, u_p) = \vartheta(u_1 + G_1, \dots, u_p + G_p) e^G, \quad (12)$$

wo

$$G = 2 \sum_i g_i u_i + \sum_{ik} a_{ik} g_i g_k + 2i\pi \sum_i g_i g'_i, \quad (12a)$$

wie man leicht aus der Gestalt des Exponenten des allgemeinen Gliedes der rechten Seite in (12) ersieht, wenn man  $\vartheta(u_1 + G_1, \dots, u_p + G_p)$  nach (1) durch eine unendliche Reihe ersetzt.

- 3) Die Function  $\vartheta(u_1, \dots, u_p)$  ist eine gerade Function oder es ist

$$\vartheta(-u_1, \dots, -u_p) = \vartheta(u_1, \dots, u_p). \quad (13)$$

Denn die Reihe (1) bleibt ungeändert, wenn man sämtliche  $n_i$  durch  $-n_i$  ersetzt. Dies ist aber gleichbedeutend mit der Vertauschung eines jeden  $u_i$  mit  $-u_i$ . Aus (13) folgt:

$$\frac{\vartheta(-u_1, \dots, -u_p)}{e^{u_i}} = - \frac{i \vartheta(u_1, \dots, u_p)}{e^{u_i}}. \quad (14)$$

Die ersten partiellen Ableitungen der Function  $\vartheta(u_1, \dots, u_p)$  nach den  $u_i$  sind also ungrade Functionen. Dieselben müssen für die Nullwerthe der Argumente, d. h. für das Werthsystem  $(u_1, \dots, u_p = 0, \dots, 0)$ , da sie nicht  $\infty$  werden, verschwinden.

- 4) Die Function  $\vartheta(u_1, \dots, u_p) = \vartheta(u)$  genügt, wie sich unmittelbar durch Differentiation ergibt, dem System von partiellen Differentialgleichungen:

$$(15) \quad 4 \frac{\partial \vartheta(u)}{\partial a_{ii}} = \frac{\partial^2 \vartheta(u)}{\partial u_i^2}, \quad 2 \frac{\partial \vartheta(u)}{\partial a_{ik}} = \frac{\partial^2 \vartheta(u)}{\partial u_i \partial u_k}.$$

Schreibt man diese Gleichungen:

$$4 \frac{\partial \log \vartheta(u)}{\partial a_{ii}} = \frac{\partial^2 \log \vartheta(u)}{\partial u_i^2} + \left[ \frac{\partial \log \vartheta(u)}{\partial u_i} \right]^2, \\ 2 \frac{\partial \log \vartheta(u)}{\partial a_{ik}} = \frac{\partial^2 \log \vartheta(u)}{\partial u_i \partial u_k} + \frac{\partial \log \vartheta(u)}{\partial u_i} \frac{\partial \log \vartheta(u)}{\partial u_k},$$

so erhält man, wenn die Argumente  $u_i$  sämmtlich verschwinden und  $\vartheta(0, \dots, 0) = \vartheta$  gesetzt wird, mit Rücksicht auf die obige Bemerkung zu Gl. (14):

$$(16) \quad 4 \frac{\partial \log \vartheta}{\partial a_{ii}} = \left[ \frac{\partial^2 \log \vartheta(u)}{\partial u_i^2} \right]_{u=0}, \quad 2 \frac{\partial \log \vartheta}{\partial a_{ik}} = \left[ \frac{\partial^2 \log \vartheta(u)}{\partial u_i \partial u_k} \right]_{u=0}.$$

- 5) Eine Function  $f(u_1, \dots, u_p)$ , die eindeutig und für alle endlichen Werthsysteme  $u_1, \dots, u_p$  stetig ist und den Functionalgleichungen (10) genügt, ist mit der Function  $\vartheta(u_1, \dots, u_p)$  bis auf einen von den  $u_i$  unabhängigen Factor  $A$  identisch, wie in § 25 gezeigt wurde. Soll die Function  $f(u_1, \dots, u_p)$  auch noch den Differentialgleichungen (15) genügen, so ist der Factor  $A$  auch noch von den Grössen  $a_{ik}$  unabhängig, wie leicht zu sehen.

Umgekehrt lassen sich die Gleichungen (10), wenn die Function  $\vartheta(u_1, \dots, u_p)$  auf anderem Wege gewonnen ist, leicht verificiren, indem man den Exponenten des allgemeinen Gliedes auf den beiden Seiten dieser Gleichungen vergleicht.

Wir verallgemeinern nun die Thetafunction erster Ordnung in folgender Weise. Der Ausdruck (12) stellt, so lange man unter  $g_i$  und  $g_i'$  ganze Zahlen versteht, nichts anderes dar, als die Function  $\vartheta(u_1, \dots, u_p)$ ; unter dieser Voraussetzung kann man auch die Grössen  $g_i, g_i'$  ersetzen durch  $-g_i, -g_i'$ .

Wir nehmen nun für  $g_i, g_i'$  beliebige Zahlen, nennen den Grössencomplex:

$$\begin{bmatrix} g_1 & \cdots & g_p \\ g'_1 & \cdots & g'_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g \\ g' \end{bmatrix} \quad (17)$$

eine Charakteristik<sup>1)</sup>, bilden ein zugehöriges Grössensystem von derselben Form wie (11) ( $i = 1, \dots, p$ ):

$$G_1 = g'_1 \pi i + \sum_i g_i a_{1i}, \dots, G_p = g'_p \pi i + \sum_i g_i a_{pi}, \quad (18)$$

und definiren als Thetafunction mit der Charakteristik (17) den Ausdruck

$$\vartheta \begin{bmatrix} g \\ g' \end{bmatrix} (u) = \vartheta \begin{bmatrix} g_1 & \cdots & g_p \\ g'_1 & \cdots & g'_p \end{bmatrix} (u_1, \dots, u_p) \quad (19)$$

$$= \vartheta (u - G) e^{-2 \sum_i g_i u_i + \sum_{i,k} a_{ik} g_i g_k + 2i\pi \sum_i g_i g'_i} \quad (20)$$

$$= \sum_{n_1, \dots, n_p} e^{i \sum_{i,k} a_{ik} (n_i - g_i)(n_k - g_k) + 2 \sum_i (n_i - g_i)(u_i - g'_i \pi i)}. \quad (21)$$

In dieser Form ist auch die Function  $\vartheta(u_1, \dots, u_p)$  enthalten; sie hat die Charakteristik 0, d. h. eine Charakteristik, deren Elemente  $g_i, g'_i$  sämmtlich  $= 0$  sind.

Für die Thetafunction mit Charakteristik (19) gelten nun ähnliche Sätze, wie für die ursprüngliche Function  $\vartheta(u_1, \dots, u_p)$ ; sie ist ebenfalls für alle endlichen Werthe der Variablen  $u_1, \dots, u_p$  endlich und stetig und genügt ebenfalls den Differentialgleichungen (15). Die Function (19) ändert sich nach (20) nicht, wenn man gleichzeitig  $u_i, g_i, g'_i$  durch  $-u_i, -g_i, -g'_i$  ersetzt. Ferner gilt Folgendes:

1) Es ist

$$\left. \begin{aligned} \vartheta \begin{bmatrix} g_1 & \cdots & g_i \pm 1 & \cdots & g_p \\ g'_1 & \cdots & g'_i & \cdots & g'_p \end{bmatrix} (u) &= \vartheta \begin{bmatrix} g_1 & \cdots & g_p \\ g'_1 & \cdots & g'_p \end{bmatrix} (u) \\ \vartheta \begin{bmatrix} g_1 & \cdots & g_i & \cdots & g_p \\ g'_1 & \cdots & g'_i \pm 1 & \cdots & g'_p \end{bmatrix} (u) &= \vartheta \begin{bmatrix} g_1 & \cdots & g_p \\ g'_1 & \cdots & g'_p \end{bmatrix} (u) e^{\mp 2i\pi g_i} \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

und folglich allgemein, wenn  $q_i, q'_i$  ( $i = 1, \dots, p$ ) ganze Zahlen sind und wenn die abkürzende Schreibweise (19) benutzt wird:

$$\vartheta \begin{bmatrix} g \pm q \\ g' \pm q' \end{bmatrix} (u) = \vartheta \begin{bmatrix} g \\ g' \end{bmatrix} (u) e^{\pm 2i\pi \sum_i g_i q'_i}. \quad (23)$$

Die erste Gleichung (22) folgt daraus, dass die Substitution  $g_i \pm 1$  für  $g_i$  gleichbedeutend ist mit der Substitution  $n_i \mp 1$  für  $n_i$ , wodurch (21) nicht geändert wird. Die zweite Gleichung (22) folgt aus (21), indem man  $g'_i \pm 1$  für  $g'_i$  setzt.

1) Die Thetacharakteristiken für  $p = 2$  sind eingeführt von Hermite, Comptes rendus. T. 40. S. 308 (1855).

- 2) Sind  $h_i, h'_i$  ( $i = 1, \dots, p$ ) beliebige Zahlen und  $H_1, \dots, H_p$  das zugehörige, den Ausdrücken (18) analog gebildete Grössensystem, so gilt die Gleichung:

$$(24) \quad \vartheta \left[ \begin{smallmatrix} g \\ g' \end{smallmatrix} \right] \langle u \pm H \rangle = \vartheta \left[ \begin{smallmatrix} g \mp h \\ g' \mp h' \end{smallmatrix} \right] \langle u \rangle e^{(H, \omega)},$$

wo

$$(24a) \quad (H, G) = \mp 2 \sum_i h_i u_i - \sum_{ik} a_{ik} h_i h_k - 2i\pi \sum_i h_i (h'_i \mp g'_i),$$

die eine Verallgemeinerung von (20) darstellt und in diesen Ausdruck übergeht, wenn man alle  $g_i, g'_i$  gleich 0 setzt.

In der That, der Exponent des allgemeinen Gliedes der Thetafunction auf der linken Seite in (24) ist nach (21):

$$(25) \quad \left\{ \begin{aligned} & \sum_{ik} a_{ik} (n_i - g_i) (n_k - g_k) \pm 2 \sum_{ik} a_{ik} (n_i - g_i) h_k \\ & + 2 \sum_i (n_i - g_i) (u_i \pm h'_i \pi i) - 2i\pi \sum_i (n_i - g_i) g'_i; \end{aligned} \right.$$

dagegen ist der Exponent des allgemeinen Gliedes von  $\vartheta \left[ \begin{smallmatrix} g \mp h \\ g' \mp h' \end{smallmatrix} \right] \langle u \rangle$  nach (21) gleich demselben Ausdruck (25), vermehrt um:

$$\pm 2 \sum_i h_i u_i + \sum_{ik} a_{ik} h_i h_k + 2i\pi \sum_i h_i (h'_i \mp g'_i),$$

womit (24) bewiesen ist.

Setzt man in (24) alle Zahlen  $h, h'$  gleich 0, einmal mit der Ausnahme, dass  $h'_k = 1$ , das andere mal mit der Ausnahme, dass  $h_k = 1$ , und berücksichtigt die Gleichungen (22), so folgt:

$$(26) \quad \left\{ \begin{aligned} & \vartheta \left[ \begin{smallmatrix} g \\ g' \end{smallmatrix} \right] (u_1, \dots, u_k \pm \pi i, \dots, u_p) = \vartheta \left[ \begin{smallmatrix} g \\ g' \end{smallmatrix} \right] \langle u \rangle e^{\mp 2i\pi g_k} \\ & \vartheta \left[ \begin{smallmatrix} g \\ g' \end{smallmatrix} \right] (u_1 \pm a_{1k}, \dots, u_p \pm a_{pk}) = \vartheta \left[ \begin{smallmatrix} g \\ g' \end{smallmatrix} \right] \langle u \rangle e^{\pm 2i\pi g'_k} e^{\mp 2u_k - a_{kk}}, \end{aligned} \right.$$

Gleichungen, die eine Verallgemeinerung von (10) bilden.

Dies sind die wichtigsten Eigenschaften der Function (19). Umgekehrt beweist man ebenso wie in § 25 den Satz:

- (II) Genügt eine für alle endlichen Werthsysteme der Variablen  $u_1, \dots, u_p$  eindeutige und stetige Function den Gleichungen (26), so kann sich diese Function von (19) nur um einen von den  $u_i$  unabhängigen Factor unterscheiden. Genügt die Function auch noch den Differentialgleichungen (15), so ist dieser Factor auch unabhängig von den Moduln  $a_{ik}$ .

Die auf der rechten Seite in (24) auftretende Charakteristik  $\begin{bmatrix} g & h \\ g' & h' \end{bmatrix}$  heisst die Summe der Charakteristiken  $\begin{bmatrix} g \\ g' \end{bmatrix}$  und  $\begin{bmatrix} h \\ h' \end{bmatrix}$ ; es ist also

$$\begin{bmatrix} g_1 \dots g_p \\ g'_1 \dots g'_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h_1 \dots h_p \\ h'_1 \dots h'_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 \pm h_1 \dots g_p \pm h_p \\ g'_1 \pm h'_1 \dots g'_p \pm h'_p \end{bmatrix}. \quad (27)$$

Wir specialisiren jetzt die Charakteristik (17), indem wir an Stelle der beliebigen Grössen  $g_i, g'_i$  rationale Zahlen mit dem gemeinsamen Nenner  $m$  setzen. Solche Charakteristiken heissen  $m$ -theilige Charakteristiken. Wir setzen also  $g_i = \frac{\mu_i}{m}, g'_i = \frac{\mu'_i}{m}$ , wo  $\mu_i$  und  $\mu'_i$  ganze Zahlen sind, und bezeichnen die zugehörige,  $m$ -theilige Charakteristik, indem wir den Nenner unterdrücken, abgekürzt durch:

$$\begin{bmatrix} \mu_1 \dots \mu_p \\ \mu'_1 \dots \mu'_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu \\ \mu' \end{bmatrix} = \mu \quad (28)$$

und das zugehörige,  $m$ -theilige Periodensystem durch:

$$\frac{M_i}{m} = \frac{\mu'_i}{m} \pi i + \frac{1}{m} \sum_k a_{ik} \mu_k. \quad (29)$$

Dann ist die Thetafunction mit der  $m$ -theiligen Charakteristik  $\mu$  definiert durch:

$$\vartheta_\mu(u) = C \cdot \vartheta\left(u - \frac{M}{\mu}\right) e^{-\frac{2}{m} \sum_i \mu_i u_i}, \quad (30)$$

wo  $C$  eine aus (20) sich ergebende, von den  $u_i$  unabhängige Constante ist. Da sich diese Function (30) nach (26) oder (24) in ganz bestimmter Weise ändert, wenn die Variablen  $u_i$  um ganzzahlige Periodensysteme wachsen, so erhält man alle wesentlich verschiedenen Thetafunctionen mit  $m$ -theiliger Charakteristik, wenn man den Elementen  $\mu_i, \mu'_i$  der Charakteristik  $\mu$  in (30) auf alle möglichen Arten die ganzen Zahlenwerthe 0, 1, ...,  $m-1$  beilegt.

Von besonderem Interesse und besonderen Eigenschaften sind die Thetafunctionen mit zweitheiliger Charakteristik. Wir entwickeln die Formeln für diese etwas ausführlicher. Für  $m=2$  genügt es, den Elementen  $\mu_i, \mu'_i$  der Charakteristik  $\mu$  die Werthe 0 und 1 zu geben. Alle anderen Fälle, wo  $\mu_i, \mu'_i$  beliebige ganze Zahlen sind, werden auf diese Fälle zurückgeführt durch die aus (22) und (23) folgenden Formeln:

$$(31) \quad \begin{cases} \vartheta \left[ \begin{smallmatrix} \mu_1 \cdots \mu_i \pm 2 \cdots \mu_p \\ \mu_1' \cdots \mu_i' \cdots \mu_p' \end{smallmatrix} \right] (u) = \vartheta \left[ \begin{smallmatrix} \mu_1 \cdots \mu_p \\ \mu_1' \cdots \mu_p' \end{smallmatrix} \right] (u), \\ \vartheta \left[ \begin{smallmatrix} \mu_1 \cdots \mu_i \pm 2 \cdots \mu_p \\ \mu_1' \cdots \mu_i' \pm 2 \cdots \mu_p' \end{smallmatrix} \right] (u) = (-1)^{\mu_i} \vartheta \left[ \begin{smallmatrix} \mu_1 \cdots \mu_p \\ \mu_1' \cdots \mu_p' \end{smallmatrix} \right] (u), \end{cases}$$

$$(32) \quad \vartheta \left[ \begin{smallmatrix} \mu_1 + 2\nu_1 \cdots \mu_p + 2\nu_p \\ \mu_1' + 2\nu_1' \cdots \mu_p' + 2\nu_p' \end{smallmatrix} \right] (u) = (-1)^{\sum \mu_i \nu_i'} \vartheta \left[ \begin{smallmatrix} \mu_1 \cdots \mu_p \\ \mu_1' \cdots \mu_p' \end{smallmatrix} \right] (u),$$

wo  $\nu_i, \nu_i'$  ebenfalls ganze Zahlen sind. Die auf der linken Seite in (32) auftretende Charakteristik ist die Summe der zwei Charakteristiken  $\mu$  und  $2\nu$ , die wir auch bezeichnen durch  $\mu\nu\nu$ . Dann lautet die Gleichung (32) in abgekürzter Schreibweise:

$$(33) \quad \vartheta_{\mu\nu\nu}(u) = (-1)^{\sum \mu \nu'} \vartheta_{\mu}(u).$$

Hieraus folgt, wenn man statt  $\mu$  und  $\nu$  bez.  $\mu - \lambda$  und  $\lambda$  setzt,

$$(34) \quad \vartheta_{\mu+\lambda}(u) = (-1)^{\sum \lambda(u-\lambda)} \vartheta_{\mu-\lambda}(u),$$

und für  $\mu = 0$ :

$$(35) \quad \vartheta_{-\lambda}(u) = (-1)^{\sum \lambda \lambda'} \vartheta_{\lambda}(u).$$

Die Thetafunction mit der zweitheiligen Charakteristik  $\mu$  ist nach

$$(20), (21) \text{ und } (35), \text{ wenn } g_i = \frac{\mu_i}{2}, g_i' = \frac{\mu_i'}{2} \text{ und}$$

$$(36) \quad A_i^u = \mu_i' \pi i + \sum_k a_{ik} \mu_k \quad (i = 1, \dots, p)$$

gesetzt wird, definiert durch:

$$(37) \quad \left\{ \begin{aligned} \vartheta_{\mu}(u) &= \vartheta\left(u - \frac{A^u}{2}\right) e^{-\sum_i \mu_i u_i + \frac{1}{4} \sum_{ik} a_{ik} \mu_i \mu_k + \frac{1}{2} \pi i \sum_i \mu_i \mu_i'} \\ &= (-1)^{\sum \mu \mu'} \vartheta\left(u + \frac{A^u}{2}\right) e^{+\sum_i \mu_i u_i + \frac{1}{4} \sum_{ik} a_{ik} \mu_i \mu_k + \frac{1}{2} \pi i \sum_i \mu_i \mu_i'} \\ &= (-1)^{\sum \mu \mu'} \sum_{n_1 \cdots n_p} e^{i k} \sum_{ik} a_{ik} \left(n_i + \frac{1}{2} \mu_i\right) \left(n_k + \frac{1}{2} \mu_k\right) + 2 \sum_i \left(n_i + \frac{1}{2} \mu_i\right) \left(u_i + \frac{1}{2} \mu_i' \pi\right). \end{aligned} \right.$$

Ferner folgt aus (26):

$$(38) \quad \begin{cases} \vartheta_{\mu}(u_1, \dots, u_k + \pi i, \dots, u_p) = (-1)^{u_k} \vartheta_{\mu}(u_1, \dots, u_p) \\ \vartheta_{\mu}(u_1 + a_{1k}, \dots, u_p + a_{pk}) = (-1)^{u_k'} \vartheta_{\mu}(u_1, \dots, u_p) e^{-2u_k - a_{kk}} \end{cases}$$

und allgemein aus (24), bei Vermehrung der Argumente  $u_i$  um ein ganzes Periodensystem (in (39) und (40) sind  $\lambda_i, \lambda_i'$  ganze Zahlen):

$$(39) \quad \vartheta_{\mu}(u + A^i) = \vartheta_{\mu}(u) e^{-2 \sum_i \lambda_i u_i - \sum_{ik} a_{ik} \lambda_i \lambda_k - i \pi \sum_i (\mu_i \lambda_i' + \lambda_i \mu_i')}$$

und bei Vermehrung der Argumente um ein halbes Periodensystem:

$$\vartheta_{\mu} \left( u + \frac{1}{2} A^i \right) = \vartheta_{\mu+\lambda} (u) e^{-\sum_i \lambda_i u_i - \frac{1}{4} \sum_{ik} a_{ik} \lambda_i \lambda_k - \frac{1}{2} \pi i \sum_i \lambda_i (\lambda_i' + \mu_i')} \quad (40)$$

Endlich erhält man aus (35), da man gleichzeitig die Vorzeichen der  $u_i$  und der  $\lambda_i$ ,  $\lambda_i'$  umkehren kann,

$$\vartheta_{\lambda} (-u) = (-1)^{\Sigma \lambda \lambda'} \vartheta_{\lambda} (u). \quad (41)$$

Dies gibt den Satz:

(III) Die Function  $\vartheta_{\lambda}(u)$  mit der zweitheiligen Charakteristik  $\lambda$  ist eine gerade oder ungerade Function der Argumente  $u_i$ , je nachdem:

$$\sum_i \lambda_i \lambda_i' \equiv 0 \quad \text{oder} \quad \equiv 1 \pmod{2}. \quad (42)$$

Man nennt hiernach die Charakteristik  $\lambda$  selber im ersten Fall gerade, im zweiten ungerade.

Umgekehrt gilt der Satz<sup>1)</sup>:

(IV) Die Thetafunctionen mit zweitheiligen Charakteristiken sind die einzigen Thetafunctionen, die entweder gerade oder ungerade sind.

Zum Beweise sei Voraussetzung, dass die Function (19) den Bedingungen genüge

$$\vartheta \left[ \begin{smallmatrix} g \\ g' \end{smallmatrix} \right] (-u) = k \vartheta \left[ \begin{smallmatrix} g \\ g' \end{smallmatrix} \right] (u), \quad \text{wo } k = \pm 1. \quad (43)$$

Nimmt man nun in (24) für  $h$ ,  $h'$  ganze Zahlen, wählt das untere Zeichen und vertauscht  $u$  mit  $-u$ , so folgt wegen (23) und (43), indem sich  $k$  weghebt,

$$\vartheta \left[ \begin{smallmatrix} g \\ g' \end{smallmatrix} \right] (u + H) = \vartheta \left[ \begin{smallmatrix} g \\ g' \end{smallmatrix} \right] (u) e^M, \quad (44)$$

wo

$$M = -2 \sum_i h_i u_i - 2 \sum_{ik} a_{ik} h_i h_k - 2i\pi \sum_i (h_i g_i' - g_i h_i').$$

Andrerseits folgt aus (24), wenn man das obere Zeichen wählt und (23) berücksichtigt, eine Gleichung von derselben Form (44) mit dem Unterschiede, dass

$$M = -2 \sum_i h_i u_i - 2 \sum_{ik} a_{ik} h_i h_k + 2i\pi \sum_i (h_i g_i' - g_i h_i').$$

1) Weierstrass, s. Schottky, Abriss einer Theorie der Abel'schen Functionen von drei Variabeln. Leipzig 1880. S. 9.

Die Vergleichung zeigt, dass für alle ganzzahligen Werthe  $h, h'$  der Ausdruck  $2 \sum_i (h_i g'_i - g_i h'_i)$  gleich einer ganzen Zahl sein muss, oder dass die Grössen  $g_1, \dots, g_p; g'_1, \dots, g'_p$  die Hälften ganzer Zahlen sein müssen. (q. e. d.)

Aus (42) ergeben sich zugleich die Werthe der Variabeln  $u_1, \dots, u_p$ , für welche die Function  $\vartheta_\lambda(u)$  mit der zweitheiligen Charakteristik  $\lambda$  verschwindet. Zunächst muss jede ungrade Function  $\vartheta_\lambda(u)$  für die Nullwerthe der Argumente, d. h. für  $(u_1, \dots, u_p) = (0, \dots, 0)$ , da sie für dieselben nicht unendlich wird, verschwinden. Es ist also nach (42)  $\vartheta_\lambda(0, \dots, 0) = 0$ , sobald  $\sum \lambda_i \lambda'_i \equiv 1 \pmod{2}$ . Daher folgt aus (37), indem man die  $u_i = 0$  setzt, dass  $\vartheta(u) = \vartheta_0(u) = 0$  ist für alle Werthsysteme der Form:

$$u_i = \frac{1}{2} \lambda'_i \pi i + \frac{1}{2} \sum_k a_{ik} \lambda_k, \text{ wenn } \sum_i \lambda_i \lambda'_i \equiv 1 \pmod{2},$$

und hiernach aus (40), wenn man darin  $\lambda$  mit  $\mu$  vertauscht und die  $u_i = 0$  setzt, dass  $\vartheta_\lambda(u) = 0$  ist für alle Werthsysteme der Form:

$$u_i = \frac{1}{2} \mu'_i \pi i + \frac{1}{2} \sum_k a_{ik} \mu_k, \text{ wenn } \sum_i (\lambda_i + \mu_i) (\lambda'_i + \mu'_i) \equiv 1 \pmod{2}.$$

Daher der Satz:

- (V) Die Function  $\vartheta_0(u_1, \dots, u_p)$  verschwindet für jedes halbe Periodensystem, welchem eine ungrade Charakteristik entspricht, und allgemein: die Function  $\vartheta_\lambda(u_1, \dots, u_p)$  verschwindet für diejenigen halben Periodensysteme, deren Charakteristiken  $\mu$  mit der Charakteristik  $\lambda$  eine ungrade Charakteristik zur Summe haben.

Nach den Gleichungen (31) oder (32) erhält man alle wesentlich verschiedenen, zweitheiligen Charakteristiken  $\mu$ , indem man den Zahlen  $\mu_i, \mu'_i$  auf alle Arten die Werthe 0 und 1 gibt. Die Gesamtzahl dieser Charakteristiken, sowie die der geraden und ungeraden unter ihnen wird angegeben durch den Satz<sup>1)</sup>:

- (VI) Die Anzahl der sämmtlichen, zur Zahl  $p$  gehörigen, zweitheiligen Charakteristiken ist  $= 2^{2p}$ ; die Zahl der geraden ist  $g_p = 2^{p-1} (2^p + 1)$ , die Zahl der ungeraden ist  $u_p = 2^{p-1} (2^p - 1)$ .

1) Riemann, s. Roch, Journ. für Math. Bd. 66, S. 103 und Riemann, Ges. W. S. 458.



Beweis. Die Anzahl aller zweitheiligen Charakteristiken ist die Zahl der Variationen der zwei Elemente 0 und 1 zur  $2p^{\text{ten}}$  Klasse mit Wiederholung, also  $= 2^{2p}$ . Um die Zahl  $g_p$  der geraden und  $u_p$  der ungeraden Charakteristiken zu bestimmen, denke man sich die zur Zahl  $p$  gehörigen Charakteristiken gebildet aus den zur Zahl  $p-1$  gehörigen Charakteristiken:

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & \dots & \lambda_{p-1} \\ \lambda'_1 & \dots & \lambda'_{p-1} \end{bmatrix} \text{ durch Zusatz von } \begin{matrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{matrix}.$$

Man erhält so vier Typen von Charakteristiken, die zur Zahl  $p$  gehören, nämlich:

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ \lambda' & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ \lambda' & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ \lambda' & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ \lambda' & 1 \end{bmatrix}.$$

Nun ist jede Charakteristik der drei ersten Typen gerade oder ungrade, je nachdem die Charakteristik  $\lambda$ , aus der sie hervorging, gerade oder ungrade war. Dagegen ist jede Charakteristik vom vierten Typus gerade oder ungrade, je nachdem  $\lambda$  ungrade oder gerade war. Daher enthalten von den vier zu den obigen Typen gehörigen Gruppen die drei ersten je  $g_{p-1}$  gerade und  $u_{p-1}$  ungrade Charakteristiken, die vierte Gruppe aber  $u_{p-1}$  gerade und  $g_{p-1}$  ungrade Charakteristiken. Dies gibt die Gleichungen:

$$g_p = 3g_{p-1} + u_{p-1}, \quad u_p = 3u_{p-1} + g_{p-1},$$

woraus

$$g_p + u_p = 4(g_{p-1} + u_{p-1}), \quad g_p - u_p = 2(g_{p-1} - u_{p-1})$$

und durch Wiederholung des Processes

$$g_p + u_p = 4^{p-1}(g_1 + u_1) = 4^p, \quad g_p - u_p = 2^{p-1}(g_1 - u_1) = 2^p,$$

also

$$g_p = 2^{p-1}(2^p + 1), \quad u_p = 2^{p-1}(2^p - 1). \quad (\text{q. e. d.})$$

Wir kehren nochmals zurück zu den Thetafunctionen der Ordnung  $m$ , die durch die Functionalgleichungen (16) § 25 definiert waren und führen historisch noch Folgendes an<sup>1)</sup>. Man kann auch diese Functionen durch Zufügung von Charakteristiken, gebildet aus  $2p$  beliebigen Zahlen  $g_i$  und  $g'_i$ , verallgemeinern und sagen:

Eine Thetafunction von der Ordnung  $m$  und der Charakteristik  $g$

$$\Theta \begin{bmatrix} g_1 & \dots & g_p \\ g'_1 & \dots & g'_p \end{bmatrix} (u_1, \dots, u_p) = \Theta \begin{bmatrix} g \\ g' \end{bmatrix} (\langle u \rangle) = \Theta_g (\langle u \rangle)$$

1) Thomae, Diss. Göttingen. 1864. S. 10.

ist definirt durch die Bedingungen:

- 1) dass sie für alle endlichen Werthsysteme von  $u_1, \dots, u_p$  eindeutig und stetig sei,
- 2) dass sie den Gleichungen genüge:

$$F(u_1, \dots, u_k + \pi i, \dots, u_p) = F(u_1, \dots, u_p) e^{-2\pi i g_k},$$

$$F(u_1 + a_{1k}, \dots, u_p + a_{pk}) = F(u_1, \dots, u_p) e^{+2\pi i g'_k} e^{-m(2u_k + a_{kk})}.$$

Für Thetafunctionen von derselben Ordnung  $m$  und derselben Charakteristik  $g$  gilt ebenfalls der Satz (V) § 25, dass sie sich durch höchstens  $m^p$  linear unabhängige unter ihnen ausdrücken lassen. Ferner der Satz, dass man stets Thetafunctionen der Ordnung  $m$  mit beliebiger Charakteristik aus solchen der ersten Ordnung bilden kann. So ist z. B. das Product von  $m$  Thetafunctionen erster Ordnung

$$\vartheta \left[ \begin{smallmatrix} a \\ a' \end{smallmatrix} \right] (u) \vartheta \left[ \begin{smallmatrix} b \\ b' \end{smallmatrix} \right] (u) \dots \vartheta \left[ \begin{smallmatrix} h \\ h' \end{smallmatrix} \right] (u)$$

eine Thetafunction von der Ordnung  $m$  und der Charakteristik  $g$ , wenn ( $i = 1, \dots, p$ ):

$$a_i + b_i + \dots + h_i = g_i, \quad a'_i + b'_i + \dots + h'_i = g'_i$$

gesetzt wird. Die allgemeine Thetafunction der Ordnung  $m$  mit Charakteristik lässt sich stets als ganze, homogene Function des  $m^{\text{ten}}$  Grades in Thetafunctionen erster Ordnung darstellen.

Unter den Charakteristiken sind wieder die zweitheiligen, deren Elemente rationale Brüche mit dem Nenner 2 sind, für die also  $g_i = \frac{1}{2} \lambda_i$ ,  $g'_i = \frac{1}{2} \lambda'_i$  ( $\lambda_i, \lambda'_i$  ganze Zahlen), von besonderem Interesse. Auch hier sind die zugehörigen Thetafunctionen von der Ordnung  $m$  entweder gerade oder ungrade. Nur ist zu bemerken, dass  $\Theta_\lambda(u)$  nicht immer dann eine gerade (oder ungrade) Function ist, wenn  $\lambda$  nach der früheren Definition eine gerade (oder ungrade) Charakteristik ist, d. h. wenn  $\sum \lambda \lambda' \equiv 0$  (oder  $\equiv 1$ ) (mod 2).

Für die Thetafunction  $\Theta_\lambda(u)$  von der Ordnung  $m$  und der zweitheiligen Charakteristik  $\lambda$  gilt nicht mehr der obige Satz, d. h. die Anzahl der linear unabhängigen Functionen dieser Art ist nicht mehr  $= m^p$ . Es tritt hier eine Reduction ein, die verschieden ist, je nachdem  $m$  eine gerade oder ungrade Zahl,  $\lambda$  eine gerade oder ungrade Charakteristik und  $\Theta_\lambda(u)$  eine gerade oder ungrade Function ist. Es gilt nämlich der Satz<sup>1)</sup>:

1) Weierstrass, s. Schottky l. c. S. 11.

(VII) Die Zahl  $A$  der linear unabhängigen Thetafunctionen von der Ordnung  $m$  und der zweitheiligen Charakteristik  $\lambda$  ist:

$$A = \frac{m^p + 2^p}{2} \text{ oder } \frac{m^p - 2^p}{2}, \text{ wenn } m \text{ gerade; } \lambda = 0,$$

$$A = \frac{m^p}{2} \quad \text{,,} \quad \frac{m^p}{2}, \quad \text{,,} \quad m \text{ gerade; } \lambda \geq 0,$$

$$A = \frac{m^p + 1}{2} \quad \text{,,} \quad \frac{m^p - 1}{2}, \quad \text{,,} \quad m \text{ ungrade; } \lambda \text{ gerade,}$$

$$A = \frac{m^p - 1}{2} \quad \text{,,} \quad \frac{m^p + 1}{2}, \quad \text{,,} \quad m \text{ ungrade; } \lambda \text{ ungrade.}$$

Hierbei gilt stets der vordere Werth von  $A$ , wenn  $\Theta_\lambda$  eine gerade, der hintere Werth, wenn  $\Theta_\lambda$  eine ungrade Function ist.

## § 27. Die Nullpunkte der Function $\vartheta(u - c)$ .<sup>1)</sup>

In § 26 wurde die Thetafunction erster Ordnung von  $p$  Variabeln definirt durch den Ausdruck:

$$\vartheta(u_1, \dots, u_p) = \sum_{n_1} \dots \sum_{n_p} e^{\sum_{i,k} a_{ik} n_i n_k + 2 \sum_i a_i n_i} \quad (1)$$

mit den Bedingungen, dass  $a_{ik} = a_{ki}$ , dass  $\sum \pm a'_{11} a'_{22} \dots a'_{pp} \geq 0$  und dass  $\sum a'_{ik} n_i n_k$  für alle reellen, Werthe  $n_i, n_k$  negativ sei.

Unter diesen drei Voraussetzungen ist die Reihe (1) convergent und die Function  $\vartheta$  für alle endlichen Werthsysteme der Variabeln  $u_1, \dots, u_p$  stetig. Ferner gelten die periodischen Eigenschaften:

$$\left. \begin{aligned} \vartheta(u_1, \dots, u_k + \pi i, \dots, u_p) &= \vartheta(u_1, \dots, u_k, \dots, u_p), \\ \vartheta(u_1 + a_{1k}, \dots, u_p + a_{pk}) &= \vartheta(u_1, \dots, u_p) e^{-2u_k - a_{kk}}. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Um die Verwendung der Thetafunction zur Lösung des Umkehrproblems vorzubereiten, soll jetzt die Function (1) in Verbindung gesetzt werden mit den Integralen 1. Gattung. Sei  $F(x, y) = 0$  die frühere, algebraische Gleichung vom Grade  $n$  und vom Geschlecht  $p$ ,  $T$  die Verzweigungsfläche der Function  $y$  und  $a_i, b_i, c_i$  ( $i = 1, \dots, p$ ) die Querschnitte, die  $T$  in eine einfach zusammenhängende Fläche  $T'$  verwandeln (§ 2).

1) Riemann, Ges. W. S. 122 ff.

Man substituirt alsdann in die Function (1):  
erstens für die Variablen  $u_1, \dots, u_p$  die  $p$  Normalintegrale  
1. Gattung (§ 15), nämlich

$$(3) \quad u_1 = \int_{\alpha}^x du_1, \dots, u_p = \int_{\alpha}^x du_p,$$

alle diese Integrale genommen in der Fläche  $T$  von demselben festen, unteren Grenzpunkte  $(\alpha, \beta) = \alpha$  bis zu demselben variablen, oberen Grenzpunkte  $(x, y) = x$  auf dem nämlichen Integrationsweg;

zweitens für das System  $a_{ik}$  der Thetamoduln das System der Periodicitätsmoduln der Integrale 1. Gattung (3), nämlich für  $a_{ik}$  den Periodicitätsmodul des Integrals  $u_i$  am Querschnitt  $b_k$  der Fläche  $T$  (S. 121).

Dass diese Substitution möglich ist, ergibt sich daraus, dass durch sie die für die Existenz der Thetafunction (1) nothwendigen, oben genannten drei Bedingungen erfüllt sind nach den Sätzen XIII, XIV, XV § 15. Wir setzen indess in (1) nicht die Integrale (3) selber ein, sondern fügen noch beliebige Constante  $c_1, \dots, c_p$  hinzu; wir benutzen ferner an Stelle der Integrale (3) wieder die Buchstaben  $u_1, \dots, u_p$ . Man erhält so die Function

$$(4) \quad \vartheta(u_1 - c_1, \dots, u_p - c_p) = \vartheta(u - c),$$

welche nunmehr nur abhängt von einer Variablen, nämlich von den durch  $F(x, y) = 0$  verbundenen Coordinaten  $(x, y)$  des Punktes  $x$ .

Die nächste und wichtigste Aufgabe ist die Bestimmung der Zahl und Lage der Nullpunkte der Function (4) in der Verzweigungsfläche  $T$ . Der Lösung schicken wir eine Betrachtung voraus, die auch anderwärts zur Verwendung kommt. (Vgl. Fig. 8. S. 104.)

Die Function (4) von  $x$  ist in  $T$  allenthalben eindeutig und endlich, da die Integrale  $u_i$  in  $T$  nicht unendlich werden; sie ist ferner stetig mit Ausnahme der Querschnitte  $a_i, b_i, c_i$ ; es sind die Werthänderungen der Function (4) an diesen Querschnitten zu ermitteln. Bezeichnet man wie früher (§ 14. S. 104) durch  $u_h^+$  und  $u_h^-$  die Werthe des Integrals  $u_h$  und entsprechend durch

$$(5) \quad \vartheta^+ = \vartheta(u_1^+ - c_1, \dots, u_p^+ - c_p), \quad \vartheta^- = \vartheta(u_1^- - c_1, \dots, u_p^- - c_p)$$

die Werthe der Function (4) in gegenüberliegenden Punkten auf der  $+$  und  $-$  Seite eines Querschnittes, so ist nach (11) § 15 und wegen der Gleichungen (2) an

$$\left. \begin{aligned} c_i: u_h^+ &= u_h^- \quad (h = 1, \dots, p) & \text{also } \vartheta^+ &= \vartheta^-, \\ a_i: u_h^+ &= u_h^- \quad (h \geq i), \quad u_i^+ = u_i^- + \pi i & \text{,, } \vartheta^+ &= \vartheta^-, \\ b_i: u_h^+ &= u_h^- + a_{hi} \quad (h = 1, \dots, p) & \text{,, } \vartheta^+ &= \vartheta^- e^{-2(\bar{u}_i - c_i) - a_{ii}} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

oder

$$b_i: \vartheta^+ = \vartheta^- e^{-2(\bar{u}_i - c_i)}, \quad (6a)$$

wenn man zur Abkürzung das arithmetische Mittel von  $u_i^+$  und  $u_i^-$  am Querschnitt  $b_i$  mit  $\bar{u}_i$  bezeichnet, so dass:

$$\bar{u}_i = \frac{1}{2}(u_i^+ + u_i^-) = \frac{1}{2}(2u_i^- + a_{ii}). \quad (7)$$

Man hat so den Satz:

- (I) Die Function (4) ist in  $T$  allenthalben stetig mit Ausnahme der Querschnitte  $b_i$ , an welchen der Quotient  $\vartheta^+ : \vartheta^-$  gleich der längs des Querschnittes stetig veränderlichen Grösse

$$e^{-2(\bar{u}_i - c_i)} \quad (8)$$

ist.

Wir sagen auch: die Function  $\vartheta(u)$  nimmt Factoren an, wenn der Punkt  $x$  einen Querschnitt von der  $+$  zur  $-$  Seite überschreitet oder wenn die  $p$  Integrale  $u_h$  gleichzeitig um ein zusammengehöriges System von Periodicitätsmoduln wachsen. Diese Factoren sind an den Querschnitten  $c_i$  und  $a_i$  gleich 1, an  $b_i$  gleich der Grösse (8).

Die Frage nach der Zahl und Lage der Nullpunkte der Function (4) in  $T$  wird gelöst durch eine allgemeine Methode von Cauchy, die, für den vorliegenden Fall specialisirt, so lautet:

Ist  $A'$  ein einfach zusammenhängender Theil einer über der  $x$ -Ebene mehrfach ausgebreiteten Fläche und ist  $f(x)$  eine Function von  $x$ , die in  $A'$  eindeutig und stetig ist und  $= 0^1$  wird in einer endlichen Zahl  $N$  von Punkten, ist ferner  $X(x)$  eine beliebige, in  $A'$  eindeutige und stetige Function, so hat man die  $N$  Nullpunkte von  $f(x)$  durch kleine Kreise auszuschneiden, die so durchlöchernte Fläche  $A'$  durch Querschnitte in eine einfach zusammenhängende Fläche  $A''$  zu verwandeln und die Gleichungen anzusetzen:

$$\int d \log f(x) = 0, \quad \int X(x) d \log f(x) = - \int \log f(x) dX(x) = 0, \quad (9)$$

wo die Integrale der linken Seiten in positiver Richtung (d. h. so dass die Fläche zur Linken liegt) über die sämtlichen Grenzcurven von  $A''$  auszudehnen sind. Die erste der Gleichungen (9) führt dann auf die Zahl  $N$  der  $0^1$  Punkte von  $f(x)$  in  $A'$ , die zweite auf eine Beziehung zwischen den Coordinaten dieser  $N$  Punkte.

Um diesen Satz auf die Function (4) anzuwenden, mache man die Voraussetzung, die Grössen  $c_1, \dots, c_p$  seien so beschaffen, dass die Function  $\vartheta(u - c)$  nicht identisch, d. h. nicht für jeden Punkt  $(x, y)$  in  $T$  verschwindet. Man hat dann für  $f(x)$  die Function  $\vartheta(u - c)$ , für  $A'$  die einfach zusammenhängende Fläche  $T'$  zu nehmen, ferner die  $0^1$  Punkte  $x_1, x_2, \dots, x_N$  von  $\vartheta(u - c)$  in  $T'$  durch kleine Kreise auszuschneiden und diese durchlöcherten Stellen durch Querschnitte  $\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2, \dots, \mathfrak{L}_N$  mit den ursprünglichen Grenzcurven  $a_i, b_i, c_i$  von  $T'$  zu verbinden. Das letztere möge so geschehen, dass man den gemeinsamen Punkt  $O$  der Querschnitte  $c_i$  (Fig. 8. S. 104) in den Anfangspunkt  $\alpha$  der Integrale (3) verlegt und von demselben Punkt aus nach den  $N$  Punkten  $x_1, \dots, x_N$  die Querschnitte  $\mathfrak{L}_1, \dots, \mathfrak{L}_N$  zieht so, dass sie die früheren Querschnitte  $a_i, b_i, c_i$  nicht schneiden. Die von den Schnitten  $a_i, b_i, c_i, \mathfrak{L}_r$  begrenzte einfach zusammenhängende Fläche sei mit  $T''$  und die  $+$  und  $-$  Seiten dieser Querschnitte wie in Fig. 8 bezeichnet.

Die erste Gleichung (9) lautet nun:

$$(10) \quad \int d \log \vartheta(u - c) = 0 \quad \text{oder} \quad \int^+ (d \log \vartheta^+ - d \log \vartheta^-) = 0.$$

Das Integral in der ersten Gleichung ist in positiver Richtung über die ganze Begrenzung von  $T''$  zu erstrecken. Es kann ersetzt werden durch das Integral der zweiten Gleichung, in welchem ausser den kleinen Kreisen jede der Grenzcurven  $a_i, b_i, c_i, \mathfrak{L}_r$  von  $T''$  nur noch auf der  $+$  Seite im Sinne der Pfeile zu durchlaufen ist, was durch die Zufügung von  $+$  am Integralzeichen angedeutet sei.

Die Unstetigkeiten oder Werthdifferenzen der Function  $\log \vartheta$  an den Querschnitten  $\mathfrak{L}_r$  und  $a_i, b_i, c_i$  sind nach (6), da jetzt wegen des Logarithmus ganzzahlige Vielfache von  $2i\pi$  zuzufügen sind:

$$(11) \quad \begin{cases} \mathfrak{L}_r: \log \vartheta^+ - \log \vartheta^- = 2i\pi, \\ c_i: \log \vartheta^+ - \log \vartheta^- = r_i 2i\pi, \\ a_i: \log \vartheta^+ - \log \vartheta^- = g_i 2i\pi, \\ b_i: \log \vartheta^+ - \log \vartheta^- = -2(\bar{u}_i - c_i) - g'_i 2i\pi; \end{cases}$$

die ganzen Zahlen  $r_i, g_i, g'_i$ , die von der Anordnung des Querschnittsystems abhängen, sind vorläufig noch ganz unbestimmt.

Hiernach ist der Beitrag zu dem Integral (10) für die Schnitte  $\mathfrak{L}_r, c_i$  und  $a_i$  gleich 0; dagegen ist der Beitrag für

$$b_i: \quad \int^+_{b_i} (d \log \vartheta^+ - d \log \vartheta^-) = -2 \int^+_{b_i} d\bar{u}_i = 2i\pi$$

und folglich der Gesamtbeitrag

$$\text{für die } p \text{ Querschnitte } b_i: p2i\pi. \quad (12)$$

Denn das Integral  $\int_{b_i}^+ d\bar{u}_i$ , längs der  $+$  Seite des Querschnittes  $b_i$  im Sinn der Pfeile genommen, ist gleich der Differenz der Werthe, die  $\bar{u}_i$  auf der  $-$  und der  $+$  Seite von  $a_i$  besitzt. Nun ist  $\bar{u}_i = \frac{1}{2}(u_i^+ + u_i^-)$ , die Zeichen  $+$  und  $-$  bezogen auf die beiden Seiten von  $b_i$ . Für  $u_i^+$  aber, wie für  $u_i^-$  ist nach (6) die Differenz zwischen den beiden Werthen auf der  $-$  und der  $+$  Seite von  $a_i$  gleich  $-\pi i$ . Daher hat man den Werth (12). Zugleich folgt, was wir später benutzen, dass das Integral  $\int d \log \vartheta(u - e)$ , genommen um ein einzelnes Querschnittpaar  $a_i, b_i$  gleich  $+2i\pi$ , dass also längs des Schnittes  $c_i$ :  $\log \vartheta^+ - \log \vartheta^- = +2i\pi$  oder dass die ganzen Zahlen  $r_i$  in (11) bei unserer Anordnung  $= 1$  sind.

Endlich ist der Beitrag des kleinen Kreises um den Punkt  $x_r$  zu dem Integral gleich  $-2i\pi$  und für die  $N$  Punkte  $x_r$  gleich  $-N2i\pi$ . Fasst man dies zusammen, so führt die Gleichung (10) auf  $2i\pi(p - N) = 0$ , woraus  $N = p$ . Dies gibt den Satz:

Die Function (4)  $\vartheta(u - e)$  besitzt in der Verzweigungsfläche  $T$  genau  $p$  Nullpunkte  $x_1, \dots, x_p$ ;

oder

(II) Sind  $e_1, \dots, e_p$  ganz beliebige Grössen, nur so beschaffen, dass  $\vartheta(u - e)$  als Function von  $x$  nicht identisch verschwindet, so wird diese Function stets  $= 0$  in  $p$  Punkten der Fläche  $T$  oder der Curve  $F(x, y) = 0$ .

Um die zweite Gleichung (9) zu berechnen, nehme man für die Function  $f(x)$  wieder  $\vartheta(u - e)$ , für  $X(x)$  ein Normalintegral 1. Gattung, etwa  $u_h$ , und bezeichne durch  $u_h^i$  den Werth von  $u_h$  im Punkte  $x_i$  und durch  $\alpha_h^i$  den Werth von  $u_h$  im Punkte  $q_i$  (Fig. 8), in welchem das Querschnittpaar  $a_i, b_i$  sich kreuzt oder  $c_i$  beginnt. Dann ist

$$u_h^i = \int_{\alpha}^{x_i} du_h, \quad \alpha_h^i = \int_{\alpha}^{q_i} du_h, \quad (13)$$

wenn das erste Integral längs  $\mathfrak{L}_i$ , das zweite längs  $c_i$  genommen wird.

Die zweite Gleichung (9) lautet nun:

$$\int \log \vartheta(u - e) du_h = 0 \quad \text{oder} \quad \int^+ (\log \vartheta^+ - \log \vartheta^-) du_h = 0, \quad (14)$$

wo in der letzten Gleichung das Integral, längs der kleinen Kreise um die Punkte  $x_i$ , ausserdem nur noch auf der  $+$  Seite der Querschnitte  $a_i, b_i, c_i, \mathfrak{L}_i$  ( $i = 1, \dots, p$ ) der Fläche  $T''$  im Sinne der Pfeile zu nehmen ist. Als Beiträge der einzelnen Schnitte zu dem Integral (14) erhält man nach (11), da nach der obigen Bemerkung  $r_i = 1$  ist,

$$(15) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{L}_i: + 2i\pi \int_{\alpha}^x du_h = + 2i\pi u_h^{i,1}) \\ c_i: + 2i\pi \int_{c_i}^{\alpha} du_h = - 2i\pi \alpha_h^i, \\ a_i: 2i\pi g_i \int_{a_i}^{+} du_h = 2i\pi g_i a_{ih}, \\ b_i: - 2 \int_{b_i}^{+} \bar{u}_i du_h + 2(e_i - g'_i \pi i) \int_{b_i}^{+} du_h. \end{array} \right.$$

In dem Ausdruck für  $b_i$  ist das erste Integral schwer auszuwerthen; das zweite dagegen wird 0 oder  $-\pi i$ , je nachdem  $i \geq h$  oder  $i = h$  ist. Bei der Summation der Werthe (15) nach  $i$  von 1 bis  $p$  liefert daher das letzte Glied den Beitrag  $-2(e_h - g'_h \pi i) \pi i$ . Fasst man die Werthe (15) zusammen und führt die Summation aus, so geht (14) über in ( $i, h = 1, \dots, p$ ):

$$(16) \quad \sum_i u_h^i - e_h + g'_h \pi i + \sum_i g_i a_{ih} + k_h = 0,$$

wenn zur Abkürzung gesetzt wird

$$(17) \quad \pi i k_h = - \pi i \sum_i \alpha_h^i - \int_b^{+} \bar{u}_i du_h.$$

Hiermit ist die Aufgabe gelöst. Die in (16) abgesonderten Grössen  $k_h$  sind nach (17) unabhängig von den Werthen der  $e_i$  und  $x_i$ , ebenso von den ganzen Zahlen  $g_i, g'_i$ . Diese letzteren Zahlen sind nicht näher bekannt. Wie sie aber auch beschaffen seien, so stellen die von ihnen abhängigen Glieder in den  $p$  Gleichungen (16) ein System von zusammengehörigen Periodicitätsmoduln der Integrale  $u_1, \dots, u_p$  dar (§ 15 Gl. 16). Da sich nun, wie aus (2) folgt, die 0<sup>1</sup> Punkte  $x_i$

1) Der Beitrag des kleinen Kreises um  $x_i$  ist bereits in dem Beitrag von  $\mathfrak{L}_i$  mit enthalten.



von  $\vartheta(u - e)$  nicht ändern, wenn die  $e_i$  um ein System von zusammengehörigen Perioden wachsen, so kann man die Gleichungen (16) mit Anwendung des schon früher S. 152 definirten Congruenzzeichens abgekürzt schreiben ( $i, h = 1, \dots, p$ ):

$$e_h \equiv \sum_i \int_a^{x_i} du_h + k_h. \quad (18)$$

Dies gibt für die Lage der  $p$  Nullpunkte von  $\vartheta(u - e)$  den Satz<sup>1)</sup>:

Die  $p$  Nullpunkte  $x_i$  der Function  $\vartheta(u - e)$  sind mit den  $p$  Grössen  $e_h$  durch die Congruenzen (18) verbunden; oder:

(III) Sind  $e_1, \dots, e_p$  ganz beliebige Grössen, nur so beschaffen, dass die Function  $\vartheta(u - e)$  als Function von  $x$  nicht identisch verschwindet, so lassen sich dieselben durch  $p$ -gliedrige Integralsummen in der Form (18) darstellen, wo die  $p$  Punkte  $x_i$  die 0<sup>1</sup> Punkte von  $\vartheta(u - e)$  und die  $k_h$  gewisse von den  $x_i$  und  $e_i$  unabhängige Constanten sind.

Denkt man sich die  $p$  Punkte  $x_i$  beliebig gegeben, so kann man die Grössen  $e_i$  bis auf ein zusammengehöriges System von Periodicitätsmoduln nach (18) bilden. Sind umgekehrt die  $p$  Grössen  $e_i$  beliebig gegeben, die  $p$  Punkte  $x_i$  gesucht, so stellen die Congruenzen (18) ein Jacobi'sches Umkehrproblem dar. Dasselbe ist nach Satz II und III stets lösbar; denn ein System von Lösungen wird gebildet durch die  $p$  0<sup>1</sup> Punkte der Function  $\vartheta(u - e)$ . Im § 28 wird gezeigt, dass diese Lösung auch eine eindeutige ist unter der Voraussetzung, die  $e_i$  seien so beschaffen, dass  $\vartheta(u - e)$  als Function von  $x$  nicht identisch verschwindet.

Die vorstehenden Betrachtungen bedürfen indess noch einer Ergänzung<sup>2)</sup>. Es gibt gewisse Werthsysteme der  $e_i$  von der Art, dass die Function  $\vartheta(u - e)$  identisch, d. h. für jeden Werth von  $x$  verschwindet (§ 28). Es gibt aber andererseits unendlich viele Werthsysteme der  $e_i$ , für welche dies nicht der Fall ist, für welche vielmehr  $\vartheta(u - e)$  wirklich eine Function von  $x$  darstellt. „In der That, wenn  $x$  gegeben ist, können die Grössen  $e_i$  immer so gewählt werden, dass  $\vartheta(u - e)$  nicht verschwindet. Denn sonst müsste die Function  $\vartheta(v_1, \dots, v_p)$  für jedwede Werthe der Grössen  $v_i$  verschwinden und

1) Riemann, Ges. W. S. 126 und 199.

2) Riemann, Ges. W. S. 200.

folglich müssten in ihrer Entwicklung nach ganzen Potenzen von  $e^{2e_1}, \dots, e^{2e_p}$  sämtliche Coefficienten gleich Null sein, was nicht der Fall ist. Die Grössen  $e_i$  können sich dann unabhängig von einander innerhalb endlicher Grössengebiete ändern, ohne dass die Function  $\vartheta(u - e)$  für den gegebenen Werth von  $x$  verschwindet. Mit andern Worten: man kann immer ein Grössengebiet  $E$  von  $2p$  Dimensionen angeben, innerhalb dessen das System der Grössen  $e_i$  sich bewegen kann, ohne dass die Function  $\vartheta(u - e)$  für diesen Werth von  $x$  verschwindet. Sie wird also nur für  $p$  Lagen von  $x$  gleich  $0^1$ ; bezeichnet man diese Punkte durch  $x_1, \dots, x_p$ , so gelten die Congruenzen (18). Jeder Bestimmungsweise des Systems der Grössen  $e_i$  innerhalb  $E$  oder jedem „Punkt“ von  $E$  entspricht dann eine Bestimmungsweise der Punkte  $x_i$ , deren Gesamtheit ein dem Grössengebiet  $E$  entsprechendes Grössengebiet  $X$  bildet. In Folge der Gleichungen (18) entspricht jedem „Punkte“ von  $X$  aber auch nur ein „Punkt“ von  $E$ ; hätte also  $X$  nur  $2p - 1$  oder weniger Dimensionen, so würde  $E$  nicht  $2p$  Dimensionen haben können; es hat folglich  $X$   $2p$  Dimensionen. Unsere Schlüsse bleiben daher anwendbar für beliebige Lagen der Punkte  $x_i$  innerhalb endlicher Gebiete.“

Dass das Gebiet  $X$  der  $p$  Punkte  $x_i$  die ganze Fläche  $T$  umfasst, folgt erst später aus Satz (IX) § 28.

### § 28. Identisches Verschwinden der Thetafunction. Eindeutigkeit des Umkehrproblems.<sup>1)</sup>

An das Vorige schliessen sich weitere Sätze über das Verschwinden der Function  $\vartheta(u - e)$  an, wenn man die bisher beliebigen Grössen  $e_1, \dots, e_p$  gewissen Bedingungen unterwirft.

Wir sprechen den Satz III § 27 nochmals in folgender Form aus:

(I) Unter der Voraussetzung für die Grössen  $e_1, \dots, e_p$ , dass

$$(1) \quad \vartheta\left(\int_u^x du - e\right) \text{ nicht identisch,}$$

d. h. nicht für jede Lage von  $x$  verschwindet, sind stets die Congruenzen ( $h = 1, \dots, p$ ):

$$(2) \quad e_h \equiv \sum_{i=1}^p \int_u^{x_i} du_h + k_h$$

lösbar und ein System von Lösungen wird von den  $p$   $0^1$  Punkten der Function  $\vartheta(u - e)$  gebildet.

1) Riemann, Ges. W. S. 127 ff. und S. 200 ff.

Es handelt sich jetzt darum, zu untersuchen, ob diese Lösung des Systems (2) unter der Voraussetzung (1) eindeutig ist und allgemein, welche Arten von Lösungen das System (2) unter verschiedenen Voraussetzungen über die Grössen  $e_i$  zulässt.

Wir setzen zunächst voraus, die  $p$  Grössen  $e_i$  seien so beschaffen dass

$$\vartheta(e_1, \dots, e_p) = 0, \quad (3)$$

während

$$\vartheta\left(\left(\int_{\alpha}^x du - \int_{\alpha}^y du - e\right)\right) \text{ nicht identisch,} \quad (4)$$

d. h. nicht für jede Lage der beiden Punkte  $x$  und  $y$  verschwindet.

Betrachtet man erstens (4) als Function der Coordinaten des Punktes  $x$ , während der Punkt  $y$  irgendwie fest gewählt sei, so verschwindet diese Function nach § 27 in  $p$  bestimmten Punkten. Unter diesen befindet sich der Punkt  $y$ , weil nach Voraussetzung (3)  $\vartheta(e) = 0$  ist. Die  $p - 1$  übrigen  $0^1$  Punkte der Function (4) seien  $\xi_1, \dots, \xi_{p-1}$ .

Man hat dann nach § 27 Gl. 18 (indem sich  $\int_{\alpha}^y du_h$  weghebt) die Congruenzen ( $h = 1, \dots, p$ ):

$$e_h \equiv \sum_{i=1}^{p-1} \int_{\alpha}^{\xi_i} du_h + k_h. \quad (5)$$

Diese  $p$  Congruenzen mit  $p - 1$  Unbekannten sind mit einander verträglich, da zwischen den  $p$  Integralsummen die Relation  $\vartheta(e) = 0$  besteht.

Betrachtet man zweitens (4) als Function von  $y$ , während  $x$  irgendwie gewählt sei, so verschwindet dieselbe ebenfalls in  $p$  Punkten, nämlich in  $x$  und in  $p - 1$  weiteren Punkten  $\eta_1, \dots, \eta_{p-1}$ , für welche nach (18) § 27 die Congruenzen gelten ( $h = 1, \dots, p$ ):

$$e_h \equiv - \sum_{i=1}^{p-1} \int_{\alpha}^{\eta_i} du_h - k_h. \quad (6)$$

Aus (5) und (6) folgt durch Subtraction oder Elimination der  $e_h$

$$\sum_{i=1}^{p-1} \int_{\alpha}^{\xi_i} du_h + \sum_{i=1}^{p-1} \int_{\alpha}^{\eta_i} du_h \equiv -2k_h \quad (7)$$

oder

$$\sum_{i=1}^{p-1} du_h^{(\xi_i)} + \sum_{i=1}^{p-1} du_h^{(\eta_i)} = 0. \quad (8)$$

Daher der Satz:

(II) Unter den Voraussetzungen (3) und (4) für die  $p$  Grössen  $e_h$  sind gleichzeitig die Congruenzen (5) und (6) lösbar.

Sind  $\xi_1, \dots, \xi_{p-1}$  ein System von Lösungen der Congruenzen (5);  $\eta_1, \dots, \eta_{p-1}$  ein solches von (6), so bilden die  $2p - 2$  Punkte  $\xi$  und  $\eta$  zusammen die  $0^1$  Punkte einer,  $F(x, y) = 0$  adjungirten  $\Phi$ -Function vom  $n - 3^{\text{ten}}$  Grade, wie aus (8) nach dem Abel'schen Theorem für die Differentiale 1. Gattung folgt (§ 20 Gl. 11).

Wir gehen einen Schritt weiter; die  $p$  Grössen  $e_h$  seien jetzt so beschaffen, dass

$$(9) \quad \vartheta \left( \left( \int_{\alpha}^x du - e \right) \right) \text{ identisch,}$$

d. h. für jede Lage des Punktes  $x$  verschwindet,

$$(10) \quad \vartheta \left( \left( \int_{\alpha}^x du + \int_{\alpha}^{\xi_1} du - \int_{\alpha}^y du - e \right) \right) \text{ nicht identisch,}$$

d. h. nicht für alle Lagen der Punkte  $x, \xi_1, y$  verschwindet.

Betrachtet man erstens (10) als Function von  $x$ , während  $\xi_1$  und  $y$  irgendwie gewählt seien, so verschwindet sie für  $p$  bestimmte Punkte. Unter diesen befindet sich der Punkt  $y$  wegen der Voraussetzung (9)

oder weil  $\vartheta \left( \left( \int_{\alpha}^{\xi_1} du - e \right) \right)$  für jedes  $\xi_1$  verschwindet. Die übrigen  $p - 1$

$0^1$  Punkte von (10) seien  $\xi_2, \dots, \xi_p$ . Dann hat man nach (18) § 27 die Congruenzen ( $h = 1, \dots, p$ ):

$$(11) \quad e_h \equiv \sum_{i=1}^p \int_{\alpha}^{\xi_i} du_h + k_h,$$

wo indess der Punkt  $\xi_1$  ganz willkürlich bleibt.

Betrachtet man zweitens (10) als Function von  $y$ , während  $x$  und  $\xi_1$  beliebig fixirt werden, so verschwindet sie ebenfalls in  $p$  Punkten, unter denen sich die zwei Punkte  $x$  und  $\xi_1$  befinden. Für die übrigen  $p - 2$   $0^1$  Punkte  $\eta_1, \dots, \eta_{p-2}$  von (10) gelten dann die Congruenzen ( $h = 1, \dots, p$ ):

$$(12) \quad e_h \equiv - \sum_{i=1}^{p-2} \int_{\alpha}^{\eta_i} du_h - k_h.$$

Aus (11) und (12) folgert man wieder durch Subtraction und Differentiation

$$\sum_{i=1}^p du_k^{(\xi_i)} + \sum_{i=1}^{p-2} du_k^{(\eta_i)} = 0, \quad (13)$$

d. h.

(III) Unter den Voraussetzungen (9) und (10) für die  $p$  Grössen  $e_h$  sind gleichzeitig die Congruenzen (11) und (12) lösbar; dabei ist von den  $p$  Punkten  $\xi_i$  in (11) einer im Voraus beliebig wählbar.

Sind  $\xi_1, \dots, \xi_p$  ein System von Lösungen der Congruenzen (11),  $\eta_1, \dots, \eta_{p-2}$  ein solches von (12), so bilden nach (13) die  $2p-2$  Punkte  $\xi$  und  $\eta$  wieder zusammen die  $0^1$  Punkte einer  $\Phi$ -Function.

In der begonnenen Weise kann man fortfahren und die Fälle untersuchen, in denen die Functionen (4) oder (10) und weitere solcher Functionen identisch verschwinden. Die Sätze I, II, III bilden alsdann den Anfang einer ganzen Reihe von Sätzen, deren Beweis sich ganz analog und ohne Schwierigkeit ergibt. Der allgemeinste Satz dieser Art lautet<sup>1)</sup>:

(IV) Sind die  $p$  Grössen  $e_p$  von der Beschaffenheit, dass

$$\vartheta \left( \left( \sum_{i=0}^{m-1} \int_{\alpha}^{x_i} du - \sum_{i=0}^{n-1} \int_{\alpha}^{y_i} du - e \right) \right) \text{ noch identisch,} \quad (14)$$

$$\vartheta \left( \left( \sum_{i=0}^m \int_{\alpha}^{x_i} du - \sum_{i=0}^n \int_{\alpha}^{y_i} du - e \right) \right) \text{ nicht mehr identisch} \quad (15)$$

verschwindet, so lässt sich stets gleichzeitig den Congruenzen genügen ( $h = 1, \dots, p$ ):

$$e_h \equiv \sum_{i=1}^{p+m-n-1} \int_{\alpha}^{x_i} du + k_h, \quad e_h \equiv - \sum_{i=1}^{p+n-m-1} \int_{\alpha}^{y_i} du - k_h. \quad (16)$$

Dabei sind von den  $p+m-n-1$  Punkten  $x_i$  noch  $m$ , von den  $p+n-m-1$  Punkten  $y_i$  noch  $n$  willkürlich wählbar.

Sind  $x_1, \dots, x_{p+m-n-1}$  ein System von Lösungen der ersten Congruenzen (16),  $y_1, \dots, y_{p+n-m-1}$  ein solches der zweiten Congruenzen (16), so bilden die  $2p-2$  Punkte  $x$  und  $y$  wieder zusammen die  $0^1$  Punkte einer  $\Phi$ -Function. Von den beiden Zahlen  $p+m-n-1$

1) Riemann, Ges. W. S. 202, wo der Satz für  $n=m-1$  ausgesprochen ist.

und  $p + n - m - 1$  wird im Allgemeinen die eine  $p$  überschreiten, die andere bleibt dann unter  $p$ . Die Fälle, in denen beide Zahlen  $\leq p$ , sind nur  $m = n$  und  $m = n - 1$  oder  $n = m - 1$ .

Weiter unten wird bewiesen, dass die in den Sätzen I—IV auftretenden Congruenzen unter den angegebenen Bedingungen auch stets eindeutig lösbar sind.

Man kann die in den Sätzen II, III, IV über die  $p$  Grössen  $e_h$  oder über das identische Verschwinden der Thetafunction gemachten Voraussetzungen in folgender Weise umformen<sup>1)</sup>. Setzt man zur Abkürzung

$$(17) \quad \frac{\partial \vartheta(v_1, \dots, v_p)}{\partial v_i} = \vartheta^i(v), \quad \frac{\partial^2 \vartheta(v_1, \dots, v_p)}{\partial v_i \partial v_k} = \vartheta^{ik}(v) \quad \text{u. s. f.,}$$

so gilt zunächst für den einfachsten Fall der Satz:

(V) Wenn die Function

$$(18) \quad \vartheta \left( \left( \int_a^x du - \int_a^y du - e \right) \right)$$

identisch für alle Punkte  $x$  und  $y$  verschwindet, so sind auch die sämtlichen Functionen  $\vartheta^i(e) = 0$  ( $i = 1, \dots, p$ ).

Denn bezeichnet man die in den Zählern der Normaldifferentiale 1. Gattung  $du_1, \dots, du_p$  auftretenden  $\Phi$ -Functionen mit  $f_1, \dots, f_p$  (vgl. (10) § 15), so ist

$$(19) \quad du_1 : du_2 : \dots : du_p = f_1 : f_2 : \dots : f_p.$$

Setzt man nun die Function (18) gleich Null und lässt  $y$  mit  $x$  zusammenfallen, so hat man

$$\sum_{i=1}^p \vartheta^i(e) du_i^{(x)} = 0 \quad \text{oder} \quad \sum_{i=1}^p \vartheta^i(e) f_i(x) = 0.$$

Da nun zwischen den  $p$  Functionen  $f_i$  keine lineare Gleichung mit constanten Coefficienten besteht (§ 15, S. 121), so folgt hieraus, dass die sämtlichen ersten Ableitungen von  $\vartheta(v_1, \dots, v_p)$  für  $v_1, \dots, v_p = e_1, \dots, e_p$  verschwinden müssen.

Die Verallgemeinerung von (V) führt zu dem Satze:

(VI) Wenn die Function

$$(20) \quad \vartheta \left( \left( \sum_{i=1}^m \int_a^{x_i} du - \sum_{i=1}^m \int_a^{y_i} du - e \right) \right)$$

1) Riemann, Ges. W. S. 204 ff.

identisch für alle Punkte  $x_i$  und  $y_i$  verschwindet, so verschwinden auch die sämtlichen Ableitungen von  $\vartheta(v_1, \dots, v_p)$  von der ersten bis zur  $n^{\text{ten}}$  für  $v_1, \dots, v_p = e_1, \dots, e_p$ .

Denn setzt man in der Function (20) zuerst  $y_m = x_m$ , so verschwinden nach (V) identisch die sämtlichen, ersten Ableitungen der Function  $\vartheta(v_1, \dots, v_p)$  für  $(h = 1, \dots, p)$ :

$$v_h = \sum_{i=1}^{m-1} \int_{\alpha}^{x_i} du_h - \sum_{i=1}^{m-1} \int_{\alpha}^{y_i} du_h - c_h. \quad (21)$$

Setzt man weiter  $y_{m-1} = x_{m-1}$ , so verschwinden die sämtlichen, zweiten Ableitungen von  $\vartheta(v_1, \dots, v_p)$  für

$$v_h = \sum_{i=1}^{m-2} \int_{\alpha}^{x_i} du_h - \sum_{i=1}^{m-2} \int_{\alpha}^{y_i} du_h - c_h \quad (22)$$

u. s. f. Unter der in Satz (VI) enthaltenen Voraussetzung müssen also sämtliche, partielle Ableitungen von  $\vartheta(v_1, \dots, v_p)$  bis zur  $n^{\text{ten}}$  für  $v_1, \dots, v_p = e_1, \dots, e_p$  verschwinden. (q. e. d.) Hieraus folgt weiter der Satz:

(VIa) Wenn die Function

$$\vartheta \left( \left( \sum_{i=1}^m \int_{\alpha}^{x_i} du - \sum_{i=1}^n \int_{\alpha}^{y_i} du - c \right) \right) \quad (23)$$

identisch für alle Punkte  $x_i$  und  $y_i$  verschwindet und  $m > n$  ist, so verschwinden auch die sämtlichen, partiellen Ableitungen von  $\vartheta(v_1, \dots, v_p)$  bis zur  $n^{\text{ten}}$  für  $(h = 1, \dots, p)$ :

$$v_h = \sum_{i=1}^{m-n} \int_{\alpha}^{x_i} du_h - c_h \quad (24)$$

und zwar identisch für die  $m - n$  Punkte  $x_i$ .

Es gelten endlich auch die Umkehrungen der Sätze V und VI, nämlich:

Wenn sämtliche Functionen  $\vartheta^i(e) = 0$  sind, so verschwindet die Function (18) identisch für alle Lagen der Punkte  $x$  und  $y$ .

Wenn die sämtlichen, partiellen Ableitungen von  $\vartheta(v_1, \dots, v_p)$  bis zur  $n^{\text{ten}}$  für  $v_1, \dots, v_p = e_1, \dots, e_p$  verschwinden, so verschwindet die Function (20) identisch für alle Lagen der Punkte  $x_1, \dots, x_m$  und  $y_1, \dots, y_m$ .

Wenn die sämtlichen, partiellen Ableitungen von  $\vartheta(v_1, \dots, v_p)$  bis zur  $n^{\text{ten}}$  für die Argumente (24) identisch bei allen Lagen der

$m - n$  Punkte  $x_i$  verschwinden, so verschwindet die Function (23) identisch für alle Lagen der  $m$  Punkte  $x_i$  und der  $n$  Punkte  $y_i$ .

Für den Beweis dieser Sätze verweisen wir auf die Litteratur<sup>1)</sup>.

Wir ziehen aus den vorstehenden Sätzen weitere Folgerungen<sup>2)</sup>, die in mehrfacher Beziehung von Wichtigkeit sind. Unter den Voraussetzungen (9) und (10) für die Grössen  $c_h$  existiren nach (III) unendlich viele, den Congruenzen (11) genügende Punktsysteme  $\xi_1, \dots, \xi_p$ ; je  $p$  solcher Punkte sind 0<sup>1</sup> Punkte einer  $\Phi$ -Function. Hieraus folgt: (VII) Sind  $\xi_1, \dots, \xi_p$   $p$  Punkte in  $T$  von solcher Lage, dass

$$(25) \quad \vartheta \left( \left( \int_a^x du - \sum_{i=1}^p \int_a^{\xi_i} du - k \right) \right)$$

als Function von  $x$  identisch verschwindet, so sind die  $p$  Punkte  $\xi_i$  stets 0<sup>1</sup> Punkte einer  $\Phi$ -Function.

Da nämlich (25) für jedes  $x$  verschwindet, so gibt es nach (III) unendlich viele Punktsysteme  $\xi'_1, \dots, \xi'_p$ , die nach (11) mit dem gegebenen Punktsystem  $\xi_1, \dots, \xi_p$  in der Beziehung stehen

$$\sum_{i=1}^p \int_a^{\xi_i} du_h + k_h \equiv \sum_{i=1}^p \int_a^{\xi'_i} du_p + k_h \quad \text{oder} \quad \sum_{i=1}^p \int_{\xi_i}^{\xi'_i} du_h \equiv 0.$$

Hieraus aber folgt nach der Umkehrung des Abel'schen Theorems (IV) § 20 und den Sätzen des § 12, dass es zwei Functionen  $\Phi$  und  $\Phi'$  gibt, die bez. in den  $p$  Punkten  $\xi_i$  und  $\xi'_i$  verschwinden. (q. e. d.)

Aus (VII) folgt weiter:

(VIII) Wählt man in  $T$   $p$  Punkte  $\xi_1, \dots, \xi_p$  so, dass sie nicht 0<sup>1</sup> Punkte einer  $\Phi$ -Function sind und bildet aus ihnen die Function

$$(26) \quad \vartheta \left( \left( \int_a^x du - \sum_{i=1}^p \int_a^{\xi_i} du - k \right) \right),$$

so wird diese als Function von  $x$  nicht identisch Null, sondern = 0<sup>1</sup> in den  $p$  gewählten Punkten  $\xi_i$ .

Denn bei der Voraussetzung, dass die  $p$  Punkte  $\xi_i$  nicht 0<sup>1</sup> Punkte einer  $\Phi$ -Function seien, kann (26) als Function von  $x$  nicht identisch

1) Riemann, Ges. W. S. 205 u. 207.

2) Riemann, Ges. W. S. 129. Man vergleiche die Darstellung der folgenden Sätze bei Weber, Abelsche Function. ( $p = 3$ ) S. 66 ff. (1876) und C. Neumann, Vorl. üb. Riemann's Theorie der Abel'schen Integrale. 2. A. S. 333 ff. (1884).



verschwinden (Satz VII); sie hat daher  $p$  Nullpunkte  $x_i$ , die sich nach (18) § 27 bestimmen aus

$$\sum_{i=1}^p \int_{\alpha}^{x_i} du_h + k_h \equiv \sum_{i=1}^p \int_{\alpha}^{\xi_i} du_h + k_h \quad \text{oder} \quad \sum_{i=1}^p \int_{\xi_i}^{x_i} du_h \equiv 0.$$

Hieraus aber folgt, dass die  $p$  Punkte  $x_i$  zusammenfallen müssen mit den  $p$  Punkten  $\xi_i$ ; denn andernfalls wären (s. Beweis von VII) die  $p$  Punkte  $x_i$  sowohl, wie die  $p$  Punkte  $\xi_i$  Nullpunkte einer  $\Phi$ -Function, was der Voraussetzung von (VIII) widerspricht. (q. e. d.)

Wir heben hervor, dass der Satz (VIII) es ermöglicht, eine Thetafunction mit dem variablen Punkt  $x$  zu bilden, die  $p$  vorgegebene Nullpunkte  $\xi_1, \dots, \xi_p$  hat; es ist dies die Function (26). Die  $p$  Punkte  $\xi_i$  haben nur der Bedingung zu genügen, dass sie nicht Nullpunkte einer  $\Phi$ -Function sind. Auf diese Bildung gründet sich später die Lösung des Umkehrproblems.

Aus (VIII) folgt endlich ein Satz<sup>1)</sup>, der die Umkehrung von (II) bildet:

(IX) Sind  $\xi_1, \dots, \xi_{p-1}$   $p-1$  ganz beliebige Punkte in  $T$ , so gilt stets die Gleichung

$$\vartheta \left( \left( \sum_{i=1}^{p-1} \int_{\alpha}^{\xi_i} du + k \right) \right) = 0, \quad (27)$$

oder:

Die Function  $\vartheta(v_1, \dots, v_p)$  verschwindet jedesmal, wenn die Argumente  $v_1, \dots, v_p$   $p-1$ -gliedrige Summen von der Form ( $h = 1, \dots, p$ ):

$$\sum_{i=1}^{p-1} \int_{\alpha}^{\xi_i} du_h + k_h$$

sind.

Setzt man nämlich in (26)  $x = \xi_p$ , so folgt nach (VIII) die Gleichung (27), allerdings zunächst unter der Voraussetzung, dass die  $p-1$  oberen Grenzen der Integrale  $p$  Punkten angehören, die nicht Nullpunkte einer  $\Phi$ -Function sind. Diese Voraussetzung ist aber ganz unwesentlich. Wenn nämlich  $p$  Punkte  $\xi_1, \dots, \xi_p$  in  $T$  nicht Nullpunkte einer  $\Phi$ -Function sind, so lassen sich um dieselben in  $T$  stets Bereiche von solcher Grösse abgrenzen, dass auch beliebige  $p$  Punkte  $x_1, \dots, x_p$  innerhalb dieser  $p$  Bereiche nicht Nullpunkte einer

1) Riemann, Ges. W. S. 200; vgl. auch Weber, l. c. S. 66 und C. Neumann, l. c. S. 347.

$\Phi$ -Function sind. Für je  $p - 1$  unter  $p$  solchen Punkten gilt daher auch die Gleichung (27), also

$$(28) \quad \vartheta \left( \left( \sum_{i=1}^{p-1} \int_{\alpha}^{x_i} du + k \right) \right) = 0.$$

Da nun die links stehende Function für jedes der  $x_i$  innerhalb  $T'$  eindeutig und stetig ist und eine solche Function nicht in einem Theile von  $T''$  gleich 0 sein kann, ohne allenthalben in  $T''$  gleich 0 zu sein, so gilt die Gleichung (28) noch, welche Lage auch die  $p - 1$  Punkte  $x_1, \dots, x_{p-1}$  in  $T'$  oder  $T$  annehmen. (q. e. d.)

Zu Anfang dieses § in den Sätzen I—IV wurde die Lösbarkeit von Congruenzen (oder Umkehrproblemen) unter gewissen Voraussetzungen bewiesen. Wir können jetzt auch zeigen, dass diese Lösungen eindeutig sind.

Zu Satz I erhält man die Ergänzung:

- (X) Ist die Bedingung (1) erfüllt, so sind die Congruenzen (2) eindeutig lösbar.

Denn angenommen, es gäbe ausser den  $p$  Punkten  $x_i$  noch ein zweites System von  $p$  Punkten  $x'_i$ , das den Congruenzen (2) genügt, so dass gleichzeitig ( $h = 1, \dots, p$ ):

$$c_h \equiv \sum_{i=1}^p \int_{\alpha}^{x_i} du_h + k_h \quad \text{und} \quad c_h \equiv \sum_{i=1}^p \int_{\alpha}^{x'_i} du_h + k_h$$

wäre, so würde die Function (1), nämlich  $\vartheta \left( \left( \int_{\alpha}^x du - c \right) \right)$ , nach (IX) sowohl in den  $p$  Punkten  $x_i$ , wie in den  $p$  Punkten  $x'_i$  verschwinden. Dies aber widerspricht der Voraussetzung, dass die Function (1) nicht identisch verschwinde; denn nach dieser Voraussetzung kann (1) nur  $p$  Nullpunkte haben. (Satz II § 27.)

Zu Satz II tritt die Ergänzung:

- (XI) Sind die Bedingungen (3) und (4) erfüllt, so sind die Congruenzen (5) und (6) eindeutig lösbar.

Denn angenommen, es gäbe ausser  $\xi_1, \dots, \xi_{p-1}$  ein zweites System von  $p - 1$  Punkten  $\xi'_1, \dots, \xi'_{p-1}$ , das den Congruenzen (5) genügt, so dass gleichzeitig ( $h = 1, \dots, p$ ):

$$c_h \equiv \sum_{i=1}^{p-1} \int_{\alpha}^{\xi_i} du_h + k_h \quad \text{und} \quad c_h \equiv \sum_{i=1}^{p-1} \int_{\alpha}^{\xi'_i} du_h + k_h,$$

so würde die Function (4) bei beliebig gewähltem  $y$  nach (IX) als Function von  $x$  sowohl für die  $p$  Punkte  $y, \xi_1, \dots, \xi_{p-1}$ , wie für die  $p$  Punkte  $y, \xi'_1, \dots, \xi'_{p-1}$  verschwinden. Dies aber widerspricht der Voraussetzung, dass die Function (4) nicht identisch für jedes  $x$  und  $y$  verschwinden soll. Ebenso beweist man die eindeutige Lösbarkeit des Systemes (6).

Endlich kommt zu Satz III oder allgemeiner zu IV die Ergänzung:

(XII) Sind die Bedingungen (14) und (15) erfüllt, so ist von den Congruenzen (16) das erste System, nachdem  $m$  der Punkte  $x_i$ , das zweite, nachdem  $n$  der Punkte  $y_i$  willkürlich gewählt sind, eindeutig lösbar.

Dem angenommen, es gäbe, nachdem die  $m$  letzten Punkte  $x_i = a_i$  willkürlich gewählt sind, zwei verschiedene Systeme von  $p - n - 1$  Punkten, nämlich  $x_1, \dots, x_{p-n-1}$  und  $x'_1, \dots, x'_{p-n-1}$ , welche den ersten Congruenzen (16) genügen, so dass gleichzeitig ( $h = 1, \dots, p$ ):

$$c_h \equiv \sum_{i=1}^{p-n-1} \int_a^{x_i} du_h + \sum_{i=1}^m \int_a^{a_i} du_h + k_h$$

und

$$e_h \equiv \sum_{i=1}^{p-n-1} \int_a^{x'_i} du_h + \sum_{i=1}^m \int_a^{a_i} du_h + k_h,$$

so würde die Function (15), nämlich

$$\vartheta \left( \left( \int_a^x du + \sum_{i=1}^m \int_a^{a_i} du - \sum_{i=0}^n \int_a^{y_i} du - e \right) \right) \quad (29)$$

als Function von  $x$  bei beliebig gewählten Punkten  $y_0, \dots, y_n$  nach Satz (IX) sowohl für die  $p$  Punkte  $y_0, y_1, \dots, y_n, x_1, \dots, x_{p-n-1}$ , wie für die  $p$  Punkte  $y_0, y_1, \dots, y_n, x'_1, \dots, x'_{p-n-1}$  verschwinden. Dies aber widerspricht der Voraussetzung, dass die Function (29) nicht identisch verschwinden soll. Ebenso beweist man die eindeutige Lösbarkeit des zweiten Systems (16).

Die Sätze X—XII lassen sich endlich noch umkehren; es genügt dies für den allgemeinen Satz XII auszuführen.

(XIII) Ist bei gegebenen Grössen  $e_h$  das erste System der Congruenzen (16), nachdem von den Punkten  $x_i$   $m$  beliebig gewählt sind, eindeutig lösbar, so ist auch das zweite System der Congruenzen (16), nachdem von den Punkten  $y_i$   $n$  beliebig gewählt sind, eindeutig lösbar.

Der Beweis hat wegen (XII) nur zu zeigen, dass, wenn das erste System (16) nach willkürlicher Wahl von  $m$  Punkten  $x_i$  eindeutig lösbar ist, auch die Bedingungen (14) und (15) erfüllt sind. Man denke sich eine Function von der Form (14), in der die Integrale beliebige, aber voraus bestimmte, obere Grenzen  $x_0, \dots, x_{m-1} = a_0, \dots, a_{m-1}$  und  $y_0, \dots, y_{n-1} = b_0, \dots, b_{n-1}$  haben. Trägt man in die so gebildete Function (14) für die  $e_h$  das erste System (16), nachdem die in demselben willkürlichen  $m$  Punkte  $x_i$  gleich  $a_0, \dots, a_{m-1}$  gesetzt sind, ein, so bleibt eine Thetafunction, deren Argumente nur noch  $p - 1$ -gliedrige Summen sind, die also nach Satz IX identisch verschwindet. Betrachtet man dagegen eine Thetafunction der Form (15), die Integrale gebildet mit beliebigen, oberen Grenzen  $x_0, \dots, x_m = a_0, \dots, a_m$  und  $y_0, \dots, y_n = b_0, \dots, b_n$  und trägt die Werthe der  $e_h$  aus dem ersten System (16) ein, nachdem die  $m$  willkürlichen Punkte  $x_1, \dots, x_m$  gleich  $a_1, \dots, a_m$  gesetzt sind, so bleibt eine Thetafunction, deren Argumente ausser  $p - 1$ -gliedrigen Summen noch Integrale mit der oberen Grenze  $a_0$  enthalten und diese Thetafunction verschwindet nicht identisch. Es sind also in der That die Bedingungen (14) und (15) erfüllt und folglich ist auch das zweite System der Congruenzen (16) nach willkürlicher Wahl der  $n$  Punkte  $y_i$  eindeutig lösbar. (q. e. d.)

Der Satz XIII steht in enger Beziehung zu früheren Untersuchungen; er enthält einen transcendenten Beweis des Riemann-Roch'schen Satzes. Man kann nämlich mit Rücksicht darauf, dass jedes System von Lösungen  $x_1, \dots, x_{p+m-n-1}$  des ersten Systemes (16) mit jedem System von Lösungen  $y_1, \dots, y_{p+n-m-1}$  des zweiten Systemes (16) zusammen die  $2p - 2$  Punkte einer  $\Phi$ -Function bilden, den Satz XIII auch so aussprechen:

(XIV) Hat man in der Verzweigungsfläche  $T$  oder auf der Curve  $F(x, y) = 0$   $p + m - n - 1$  Punkte  $x_i$ , von welchen noch  $m$  Punkte willkürlich sind, und legt man durch dieselben eine  $\Phi$ -Curve, so sind von den  $p + n - m - 1$  Restpunkten  $y_i$  noch  $n$  Punkte willkürlich.

Dieser Satz wird, indem man

$m = g_2, \quad n = g_1, \quad p + m - n - 1 = m_1, \quad p + n - m - 1 = m_2$   
setzt, identisch mit dem Riemann-Roch'schen Satze in der Form (II) § 11.

## Sechster Abschnitt.

### Die Lösung des Umkehrproblems.

Der sechste Abschnitt enthält die Lösung des Jacobi'schen Umkehrproblems. Als Vorbereitung hierzu wird im Anschluss an die Untersuchungen des fünften Abschnitts in § 29 und 30 der Zusammenhang zwischen den Thetafunctionen  $\vartheta_\mu(u_1, \dots, u_p)$  und gewissen algebraischen Wurzelfunctionen  $\sqrt{\psi_\mu(x)}$ <sup>1)</sup> untersucht, der sich auf die gemeinsamen Nullpunkte dieser Functionen gründet. § 31 gibt alsdann die Grundformeln zur Lösung des Umkehrproblems, § 32 und 33 eine Discussion dieser Formeln.

#### § 29. Die Nullpunkte der Function $\vartheta_\mu(u_1, \dots, u_p)$ . Die Berührungscurven $\psi_\mu = 0$ .

Unter der Voraussetzung, dass  $(h = 1, \dots, p)$ :

$$u_h = \int_a^x du_h \quad (1)$$

gesetzt wird, sind die  $p$  Nullpunkte  $x_1, \dots, x_p$  der Function

$$\vartheta(u_1 - e_1, \dots, u_p - e_p) = \vartheta(u - e) \quad (2)$$

nach (18) § 27 bestimmt durch die Congruenzen  $(h = 1, \dots, p)$ :

$$\sum_{i=1}^p \int_a^{x_i} du_h \equiv e_h - k_h. \quad (3)$$

Dabei sind  $e_1, \dots, e_p$  gedacht als ein beliebiges Grössensystem von der Beschaffenheit, dass (2) als Function von  $x$  nicht identisch verschwindet und es sind die Constanten  $k_1, \dots, k_p$  definirt durch die Gleichungen (17) § 27, also in gewisser Weise abhängig von dem Querschnittssystem

1) Wir bezeichnen im Folgenden rationale Functionen  $\psi$  der Coordinaten  $(x, y)$  des Punktes  $x$  kurz durch  $\psi(x)$ ; ersetzen also auch  $F(x, y) = 0$  durch  $F(x) = 0$  u. s. f.

der Fläche  $T$ . Hiernach sind auch die  $p$  Punkte  $x_i$  von dem Querschnittssystem abhängig. Es ist nun vorthellhaft<sup>1)</sup>, die Auswerthung der Constanten  $k_h$  dadurch zu umgehen, dass man die Nullpunkte einer Function  $\vartheta(u - e)$  für ein bestimmtes Grössensystem  $e_h$  und für ein bestimmtes Querschnittssystem als gegeben ansieht. Man wählt hierzu am einfachsten als Querschnittssystem das früher angegebene, kanonische System  $a, b, c$  der Fläche  $T$  (§ 2 und 3) und nimmt die Grössen  $e_h$  sämmtlich gleich 0 an. Dies ist zulässig, da die Function

$$(4) \quad \vartheta(u_1, \dots, u_p) = \vartheta(u)$$

als Function von  $x$  nicht identisch verschwindet. Wir bezeichnen die von  $\alpha$  abhängigen  $p$  Nullpunkte dieser Function (4) mit

$$(5) \quad \alpha_1^0, \alpha_2^0, \dots, \alpha_p^0.$$

Wie sich diese Punkte mit der Lage des Querschnittsystems ändern, ist später zu erörtern (§ 32 und Abschnitt VIII).

Mit Hilfe des Punktsystems (5) bestimmen sich die  $p$  Constanten  $k_h$  nach (3) bis auf ein System zusammengehöriger Periodicitätsmoduln durch die Congruenzen ( $h = 1, \dots, p$ ):

$$(6) \quad k_h \equiv - \sum_{i=1}^p \int_{\alpha}^{\alpha_i^0} du_h$$

und die  $p$  Nullpunkte  $x_i$  der Function (2) nach (3) und (6) durch die Congruenzen ( $h = 1, \dots, p$ ):

$$(7) \quad \sum_{i=1}^p \int_{\alpha_i^0}^{x_i} du_h \equiv e_h.$$

Dies gibt den Satz:

- (I) Die  $p$  Nullpunkte  $x_i$  der Function (2) sind für das gewählte Querschnittssystem bestimmt durch die Congruenzen (7);  
oder die Function

$$(8) \quad \vartheta \left( \int_{\alpha}^x du - \sum_{i=1}^p \int_{\alpha_i^0}^{x_i} du \right)$$

verschwindet als Function von  $x$  grade in den  $p$  Punkten  $x_1, \dots, x_p$ .

---

1) Clebsch u. Gordan, Ab. F. S. 195 ff. (1866). Weber, Ab. F. ( $p = 3$ ) S. 74. (1876).

Das System der Punkte  $\alpha_i^0$  (5) ist hier in transcendenten Weise definiert, nämlich als System der Nullpunkte der Function (4). Diese Definition lässt sich durch eine algebraische ersetzen in folgender Weise. Denkt man sich in den Gleichungen (5) § 28 die  $p - 1$  Punkte  $\xi_i$  beliebig gegeben, so sind damit zunächst die Grössen  $e_h$  in jenen Gleichungen bestimmt. Durch diese Grössen  $e_h$  sind aber weiterhin die  $p - 1$  Punkte  $\eta_i$  in (6) § 28 bestimmt und zwar eindeutig nach Satz XI § 28. Die  $2p - 2$  Punkte  $\xi_i$  und  $\eta_i$  sind nach (7) § 28 verbunden durch die Gleichungen ( $h = 1, \dots, p$ ):

$$\sum_{i=1}^{p-1} \int_{\alpha}^{\xi_i} du_h + \sum_{i=1}^{p-1} \int_{\alpha}^{\eta_i} du_h \equiv -2k_h, \quad (9)$$

welche aussagen, dass die oberen Grenzpunkte  $\xi_i$  und  $\eta_i$  als irgend  $2p - 2$  durch eine,  $F = 0$  adjungirte Curve  $\Phi = 0$  des  $n - 3^{\text{ten}}$  Grades algebraisch verknüpfte Punkte betrachtet werden können. Eliminirt man die Grössen  $k_h$  aus den Gleichungen (6) und (9), so folgt ( $h = 1, \dots, p$ ):

$$\sum_{i=1}^{p-1} \int_{\alpha_i^0}^{\xi_i} du_h + \sum_{i=1}^{p-1} \int_{\alpha_i^0}^{\eta_i} du_h + 2 \int_{\alpha_p^0}^{\alpha} du_h \equiv 0. \quad (10)$$

Hieraus ergibt sich nun die algebraische Definition des Punktsystems  $\alpha_1^0, \dots, \alpha_p^0$ . Wie die Umkehrung des Abel'schen Theorems (IV § 20) lehrt, existirt eine rationale Function, deren Zähler in der oberen, deren Nenner in den unteren Grenzpunkten der Integrale in (10) verschwindet, während die übrigen Nullpunkte von Zähler und Nenner dieselben sind. Es existiren also zwei,  $F = 0$  adjungirte Curven gleichen Grades, von denen die erste durch die oberen Grenzpunkte in (10) hindurchgeht, d. h.  $F = 0$  in  $2p - 2$  beliebigen, nur durch eine  $\Phi$ -Curve verknüpften Punkten  $\xi_i$  und  $\eta_i$  schneidet und im Punkt  $\alpha$  berührt, die zweite durch die unteren Grenzpunkte in (10) hindurchgeht, d. h.  $F = 0$  in jedem der  $p$  Punkte  $\alpha_i^0$  berührt (da jeder dieser Punkte in (10) doppelt auftritt); die übrigen Schnittpunkte beider Curven mit  $F = 0$  sind dieselben. Die Bildung dieser Curven geschieht nach den Grundsätzen des § 12. Man nehme für die erste dieser Curven eine adjungirte Curve des  $n - 2^{\text{ten}}$  Grades, nämlich die zerfallende Curve  $(\alpha x) \varphi(x) = 0$ , wo  $\varphi(x) = 0$  eine ganz beliebige, adjungirte Curve vom  $n - 3^{\text{ten}}$  Grade ist, und  $(\alpha x) = 0$  die Tangente von  $F = 0$  im Punkte  $\alpha$ , die also  $F = 0$  in  $\alpha$  berührt und in  $n - 2$  weiteren Punkten  $\varepsilon$  schneidet. Dann hat man für die zweite der Curven ebenfalls eine adjungirte Curve vom  $n - 2^{\text{ten}}$  Grade  $\psi(x) = 0$  zu nehmen,

die durch die  $n - 2$  Punkte  $\varepsilon$  hindurchgeht, und hat die alsdann noch freien, linearen, nicht homogenen  $p$  Coefficienten dieser Curve  $\psi(x) = 0$  so zu bestimmen, dass sich  $\psi$  und  $F$  noch in  $p$  Punkten berühren. Dies ist stets möglich. Da aber die Bedingungen der Berührung algebraisch sind (s. § 32), so ist diese Definition der Curve  $\psi = 0$  nicht eindeutig; es gibt vielmehr ein endliches System von solchen zu  $\alpha$  gehörigen Berührungsfunktionen  $\psi$ . Unter ihnen muss sich nach (10) auch diejenige Curve  $\psi_0(x) = 0$  befinden, die gerade in den  $p$  Punkten  $\alpha_i^0$ , d. h. den Nullpunkten der Function (4) berührt. Daher der Satz:

(II) Die  $p$  Punkte  $\alpha_i^0$  (5) sind definirt, transcendent als die  $p$  0<sup>te</sup> Punkte der Function (4), algebraisch als die  $p$  Berührungspunkte einer ganz bestimmten Curve  $\psi_0$  aus dem zu  $\alpha$  gehörigen System von Berührungscurven  $\psi$ .

Es hat sich hier ein ganzes System von Berührungscurven  $\psi$  ergeben; die Definition desselben war algebraisch. Dasselbe System aber erhält man auf transcendentem Wege, wenn man statt  $\vartheta(u_1, \dots, u_p)$  die allgemeine Thetafunction 1. Ordnung mit der zweitheiligen Charakteristik  $\mu$   $\vartheta_\mu(u_1, \dots, u_p)$  betrachtet. In § 26 (Gl. 36, 37 und 42) wurde gezeigt, dass jeder zweitheiligen Charakteristik

$$\mu = \begin{bmatrix} \mu_1, \dots, \mu_p \\ \mu'_1, \dots, \mu'_p \end{bmatrix}$$

ein halbes Periodensystem

$$\frac{1}{2} A_i'' = \frac{1}{2} \mu'_i \pi i + \frac{1}{2} \sum_k a_{ik} \mu_k$$

entspricht, und dass die zugehörige Function  $\vartheta_\mu(u_1, \dots, u_p)$  bis auf einen von den Argumenten  $u_i$  unabhängigen Factor  $C$  dargestellt wird durch

$$(11) \quad \vartheta_\mu(u_1, \dots, u_p) = C \cdot \vartheta \left( u_1 - \frac{1}{2} A_1'', \dots, u_p - \frac{1}{2} A_p'' \right) e^{-\sum \mu_i u_i}.$$

Diese Function ist gerade oder ungrade, je nachdem

$$\sum_{i=1}^p \mu_i \mu'_i \equiv 0 \quad \text{oder} \quad \equiv 1 \pmod{2}.$$

Die  $p$  0<sup>te</sup> Punkte  $(\alpha_1'', \dots, \alpha_p'')$  der Function (11) sind nun nach (7) eindeutig bestimmt durch die Congruenzen ( $h = 1, \dots, p$ ):

$$(12) \quad \sum_{i=1}^p \int_{\alpha_i^0}^{\alpha_i''} du_i \equiv \frac{1}{2} A_h''.$$



Ist  $\mu$  eine gerade Charakteristik, so verschwindet im Allgemeinen die Function (11) nicht für  $x = \alpha$  (oder  $u_1, \dots, u_p = 0, \dots, 0$ ) oder die  $p$  Punkte  $\alpha_1'', \dots, \alpha_p''$  enthalten nicht den Punkt  $\alpha$ .

Ist  $\mu$  eine ungrade Charakteristik, so verschwindet die Function (11) für  $x = \alpha$  (oder  $u_1, \dots, u_p = 0, \dots, 0$ ) nach V § 26; es fällt also hier einer der  $p$  Punkte  $\alpha_i''$ , etwa  $\alpha_p''$ , mit  $\alpha$  zusammen; die übrigen  $p - 1$  Punkte  $\alpha_1'', \dots, \alpha_{p-1}''$  sind eindeutig bestimmt durch die Congruenzen (12).

Multiplcirt man (12) mit 2, so folgt ( $h = 1, \dots, p$ ):

$$2 \sum_{i=1}^p \int_{\alpha_i''}^{\alpha_i''} du_h \equiv 0. \quad (13)$$

Diese Gleichungen geben nach (IV) § 20 die algebraische Definition der Punktsysteme  $\alpha_1'', \dots, \alpha_p''$ . Ist nämlich  $\mu$  eine gerade Charakteristik, so sind die Punkte  $\alpha_1'', \dots, \alpha_p''$  die  $p$  Berührungspunkte einer ganz bestimmten, durch (12), d. h. durch die gerade Charakteristik  $\mu$  definirten Curve  $\psi_\mu$  aus dem oben betrachteten, zu  $\alpha$  gehörigen Berührungssystem  $\psi$ , zu welchem, der Charakteristik  $\mu = 0$  entsprechend, auch die Curve  $\psi_0$  gehört. Ist dagegen  $\mu$  eine ungrade Charakteristik, so sind die  $p - 1$  Punkte  $\alpha_1'', \dots, \alpha_{p-1}''$  in Verbindung mit  $\alpha$  ebenfalls die Berührungspunkte einer durch (12), d. h. durch die ungrade Charakteristik  $\mu$  definirten Curve  $\psi_\mu$ . Offenbar aber zerfällt im letzten Falle die Curve  $\psi_\mu = 0$  in die Tangente  $(\alpha x) = 0$  und eine von  $\alpha$  ganz unabhängige, nur von  $F$  abhängige, in  $p - 1$  Punkten  $\alpha_1'', \dots, \alpha_{p-1}''$  berührende Curve  $\varphi_\mu = 0$  von dem Grade  $n - 3$ , so dass, wenn  $\mu$  eine ungrade Charakteristik ist:  $\psi_\mu(x) = (\alpha x) \varphi_\mu(x)$ .

Umgekehrt führen alle bei der algebraischen Bestimmung auftretenden Berührungscurven  $\psi$  auf die Gleichungen (13) oder (12) zurück, durch welche jeder solchen Curve  $\psi_\mu$  eine bestimmte Charakteristik  $\mu$  zugeordnet wird. Die Zahl der sämtlichen Curven des Systems  $\psi$  ist daher gleich der Gesamtzahl der zweitheiligen Charakteristiken, d. h.  $= 2^{2^p}$ , die Zahl der von  $\alpha$  abhängigen Berührungscurven  $\psi_\mu$  gleich der Zahl der geraden Charakteristiken, d. h.  $= 2^{p-1} (2^p + 1)$  und die Zahl der von  $\alpha$  unabhängigen Berührungscurven  $\varphi_\mu$  gleich der Zahl der ungraden Charakteristiken, d. h.  $= 2^{p-1} (2^p - 1)$  (Satz VI § 26).

Man kann die zerfallenden und die nicht zerfallenden Curven des Systemes  $\psi$  in einer gemeinsamen Form schreiben und dabei die in den Zählern der Normaldifferentiale 1. Gattung auftretenden Functionen  $f_i(x)$  (10) § 15 benutzen. Da jedes  $\psi$  durch  $p + 1$  linear un-

abhängige, adjungirte Curven vom Grade  $n - 2$  darstellbar ist (§ 12 Satz 1b), so hat man, wenn

$$(14) \quad \mu \text{ gerade: } \psi_\mu(x) = a_0'' \psi_0(x) + (\alpha x) \sum_{i=1}^p a_i'' f_i(x),$$

$$(15) \quad \mu \text{ ungrade: } \varphi_\mu(x) = \sum_{i=1}^p a_i'' f_i(x),$$

so dass im letzten Falle nur  $a_0'' = 0$  zu setzen und der Factor  $(\alpha x)$  zu unterdrücken ist.

Wir fassen das Vorstehende zusammen in dem Satze:

(III) Die  $p$  0<sup>te</sup> Punkte der Function  $\vartheta_\mu(u_1, \dots, u_p)$  mit der zweitheiligen Charakteristik  $\mu$  sind,

wenn  $\mu$  gerade ist, die Berührungspunkte einer adjungirten Curve  $\psi_\mu = 0$  vom Grade  $n - 2$ ;

wenn  $\mu$  ungrade ist, der Punkt  $\alpha$  und die  $p - 1$  Berührungspunkte einer adjungirten Curve  $\varphi_\mu = 0$  vom Grade  $n - 3$ .

Durch diesen Satz ist also jeder Thetafunction  $\vartheta_\mu(u_1, \dots, u_p)$  mit der zweitheiligen Charakteristik  $\mu$  eine Berührungscurve  $\psi_\mu$  oder  $\varphi_\mu$  mit derselben Charakteristik  $\mu$  zugeordnet. Diese Zuordnung gilt aber nur für ein bestimmtes, kanonisches Querschnittssystem und ändert sich, wenn dieses durch ein anderes ersetzt wird.

Mit Hilfe der Punkte  $\alpha_i''$  ( $i = 1, \dots, p$ ) lassen sich zugleich die 0<sup>te</sup> Punkte  $x_1, \dots, x_p$  der Function  $\vartheta_\mu(u - e)$  oder auch der Function  $\vartheta(u - e - \frac{1}{2} A'')$  leicht angeben. Diese Punkte sind nach (7) bestimmt durch die Congruenzen ( $h = 1, \dots, p$ ):

$$\sum_{i=1}^p \int_{\alpha_i''}^{x_i} du_h \equiv e_h + \frac{1}{2} A_h''$$

oder wegen (12) durch

$$(16) \quad \sum_{i=1}^p \int_{\alpha_i''}^{x_i} du_h \equiv e_h.$$

Daher die Verallgemeinerung von Satz I:

(IV) Die  $p$  Nullpunkte  $x_i$  der Function  $\vartheta_\mu(u - e)$  sind bestimmt durch die Congruenzen (16),

oder die Function

$$\vartheta_{\mu} \left( \left( \int_{\alpha}^x du - \sum_{i=1}^p \int_{\alpha_i'}^{x_i} du \right) \right) \quad (17)$$

verschwindet als Function von  $x$  gerade in den  $p$  Punkten  $x_1, \dots, x_p$ .

### § 30. Thetaquotienten und Wurzelfunctionen.

Das Umkehrproblem besteht darin, aus den  $p$  Gleichungen ( $h = 1, \dots, p$ ):

$$U_h = \sum_{i=1}^p \int_{\alpha_i}^{x_i} du_h \quad (1)$$

die Coordinaten der  $p$  oberen Grenzpunkte  $x_i$  als Functionen der  $p$ -gliedrigen Integralsummen  $U_h$  darzustellen, welche Aufgabe nach (X) § 28 im Allgemeinen eindeutig lösbar ist. Die  $p$  unteren Grenzpunkte  $\alpha_i$  in (1) sind beliebig, eine Veränderung derselben vermehrt die Grössen  $U_h$  nur um Constanten.

Wir geben die Lösung des Umkehrproblems (1) nach Riemann in der Weise, dass wir zunächst aus Thetafunctionen mit den speciellen Argumenten ( $h = 1, \dots, p$ ):

$$u_h = \int_{\alpha}^x du_h \quad (2)$$

$2p$ -fach periodische Functionen aufbauen, die, als Functionen der Coordinaten des Punktes  $x$  betrachtet, mit algebraischen Functionen der Coordinaten von  $x$  identisch werden. Ebenso stellen sich dann (§ 31) dieselben  $2p$ -fach periodischen Functionen mit den allgemeinen Argumenten  $U_1, \dots, U_p$  als algebraische und symmetrische Functionen der Coordinaten der oberen Grenzpunkte  $x_i$  in (1) dar. Diese Identitäten zwischen transcendenten und algebraischen Functionen enthalten die Lösung des Umkehrproblems in mannigfacher Form. Dasselbe Verfahren, zuerst Ausdrücke mit den speciellen Argumenten  $u_h$  (2) und dann die nämlichen Ausdrücke mit den allgemeinen Argumenten  $U_h$  (1) zu bilden, wird auch bei den Darstellungen im siebenten Abschnitt festgehalten.

Wir beginnen mit der Aufstellung der einfachsten Beziehung zwischen Thetafunctionen mit den Argumenten  $u_h$  und algebraischen Functionen von  $x$ , die unmittelbar aus dem letzten

Satze (IV) § 29 folgt. Sind nämlich  $\mu$  und  $\nu$  zwei beliebige, zweitheilige Charakteristiken, so hat der Quotient

$$(3) \quad \vartheta_{\mu}(u_1, \dots, u_p) : \vartheta_{\nu}(u_1, \dots, u_p),$$

wie sich aus den Eigenschaften der Thetafunction und den Gleichungen (38) § 26 ergibt, als Function der Coordinaten des Punktes  $x$  betrachtet, folgende Eigenschaften:

Er ist eindeutig in der Fläche  $T'$ , die durch die Querschnitte  $a, b, c$  aus  $T$  entsteht; er wird ferner  $= \infty^1$  in den  $p$  Berührungspunkten  $\alpha_1', \dots, \alpha_p'$  der Curve  $\psi = 0$  und  $= 0^1$  in den  $p$  Berührungspunkten  $\alpha_1'', \dots, \alpha_p''$  der Curve  $\psi_{\mu} = 0$ ; er nimmt endlich beim Ueberstreichen der Querschnitte  $a_k$  und  $b_k$  von  $T'$  bez. die Factoren an:

$$(4) \quad (-1)^{u_k - v_k} \quad \text{und} \quad (-1)^{u_k' - v_k'}.$$

Hiernach ist das Quadrat der Function (3) eine Function der Coordinaten von  $x$ , die an den Querschnitten  $a, b, c$  von  $T'$  die Factoren 1 annimmt, die also in  $T$  selber stetig und ausserdem regulär ist. Eine solche Function ist aber nach (I) § 6 eine rationale Function der Coordinaten von  $x$ . Da sie ausserdem in denselben Punkten  $0^2$  und  $\infty^2$  wird wie  $\psi_{\mu}(x) : \psi_{\nu}(x)$ , so kann sie sich von dieser Function nur um eine von  $x$  unabhängige Constante  $c_{\mu\nu}^2$  unterscheiden (Ib. § 6). Man hat daher die fundamentale Gleichung<sup>1)</sup>:

$$(5) \quad \frac{\vartheta_{\mu}(u_1, \dots, u_p)}{\vartheta_{\nu}(u_1, \dots, u_p)} = c_{\mu\nu} \sqrt{\frac{\psi_{\mu}(x)}{\psi_{\nu}(x)}}.$$

In derselben ist jedesmal  $\psi_{\mu}(x)$  von der zerfallenden Form  $(\alpha x) \varphi_{\mu}(x)$ , wenn  $\mu$  eine ungrade Charakteristik ist; das entsprechende gilt von  $\psi_{\nu}(x)$ . Die Gleichung (5) gibt zunächst Anlass zu algebraischen Betrachtungen.

Man nennt den Ausdruck  $\sqrt{\psi_{\mu}(x)}$  eine Wurzelfunction. Bei gegebenem, kanonischen Querschnittssystem der Fläche  $T$  besteht nach § 29 eine eindeutige Zuordnung zwischen den Thetafunctionen  $\vartheta_{\mu}(u)$  und den Berührungscurven  $\psi_{\mu}(x) = 0$  oder den Wurzelfunctionen  $\sqrt{\psi_{\mu}(x)}$ ; man kann sagen, die Functionen  $\vartheta_{\mu}(u)$  und  $\sqrt{\psi_{\mu}(x)}$  sind beide derselben zweitheiligen Charakteristik  $\mu$  zugeordnet. Ebenso sind die Quotienten auf beiden Seiten in (5) der Differenz  $\mu - \nu$  der Charakteristiken  $\mu$  und  $\nu$  zugeordnet. Diese letztere Zuordnung hat noch den geometrischen Sinn, dass die aus den Elementen der Cha-

1) Riemann, Ges. W. S. 134 und 457. Roch, Journ. für Math. Bd. 66 S. 104. Die Wurzelformen  $\sqrt{\varphi_{\nu}}$  mit ungrader Charakteristik  $\nu$  nennt Riemann „Abelsche Functionen“.

Charakteristik  $\mu - \nu$  gebildeten Werthe (4) die Factoren angeben, welche die Quotienten in (5) an den gewählten Querschnitten  $a, b$  annehmen.

Man kann sich auch die Zuordnung der Berührungscurven  $\psi_\mu(x) = 0$  oder der Wurzelfunctionen  $\sqrt{\psi_\mu(x)}$  zu den Charakteristiken  $\mu$  bei gegebenem Querschnittsystem  $a, b$  ohne Benutzung der Thetafunctionen hergestellt denken. Man bestimme auf algebraischem Wege (s. § 32) das in § 29 definirte System der Berührungscurven  $\psi_\mu(x) = 0$  und bilde aus ihm alle möglichen Quotienten  $\sqrt{\psi_\mu(x)} : \sqrt{\psi_\nu(x)}$  mit demselben Nenner  $\sqrt{\psi_\nu(x)}$ , aber verschiedenen Zählern  $\sqrt{\psi_\mu(x)}$ . Dann ermittle man für sie die Factoren (4) an den Querschnitten  $a_k, b_k$  von  $T'$ , indem man jeden solchen Quotienten von einem Punkte in  $T'$  ausgehend über die Fläche  $T'$  fortsetzt. Damit kennt man die zu jedem solchen Quotienten gehörige Charakteristik  $\mu - \nu$ . Man hat jetzt noch diejenige Charakteristik  $\nu$  zu ermitteln, welche die Eigenschaft hat, dass ihre Addition zu den Charakteristiken  $\mu - \nu$  eine gerade Charakteristik  $\mu$  ergibt, wenn die zugehörige Zählerfunction  $\psi_\mu(x)$  eine eigentliche Berührungsfunktion des  $n - 2^{\text{ten}}$  Grades ist und eine ungrade Charakteristik  $\mu$ , wenn  $\psi_\mu(x)$  eine zerfallende Function  $(\alpha x) \varphi_\mu(x)$  ist. Damit hat man auch zu jeder Wurzelfunction  $\sqrt{\psi_\mu(x)}$  die zugehörige Charakteristik  $\mu$ . Dass es nur eine solche, zu addirende Charakteristik  $\nu$  gibt, folgt daraus, dass die Zuordnung der Berührungsfunktionen  $\psi_\mu$  zu den Thetafunctionen  $\vartheta_\mu$  oder auch zu den Charakteristiken  $\mu$  bei gegebenem Querschnittsystem nach § 29 eine eindeutige ist.

Die Zuordnung der Thetafunctionen und Wurzelfunctionen zu den Charakteristiken gibt Anlass, die Operationen der Multiplication und Division mit Thetafunctionen oder Wurzelfunctionen abkürzend durch die Operationen der Addition und Subtraction an den zugehörigen Charakteristiken zu ersetzen. Wir machen sogleich Gebrauch von diesem Verfahren bei dem Beweis der folgenden zwei Sätze über Wurzelfunctionen<sup>1)</sup>. Dabei soll ein Product von  $q$  einfachen Wurzelfunctionen mit beliebigen Charakteristiken  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_q$ , also der Ausdruck:

$$\sqrt{\psi_{\mu_1} \psi_{\mu_2} \dots \psi_{\mu_q}} \quad (6)$$

ebenfalls als Wurzelfunction bezeichnet und derselben die Charakteristik

$$\mu_1 \mu_2 \dots \mu_q \quad (6a)$$

d. h. die Summe der Charakteristiken  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_q$  zugeordnet werden.

1) Das Princip der Herleitung und einfache Beispiele solcher Sätze über Wurzelfunctionen finden sich bei Riemann (Ges. W. S. 456 ff.), vgl. auch Roch, Journ. für Math. Bd. 66 S. 106 ff. (1864), Weber, Ab. F. ( $p = 3$ ) S. 110 ff. u. A.

Der erste Satz bezieht sich auf die linearen Relationen, die zwischen Producten von der Form (6) bestehen. Bildet man eine Reihe solcher Producte von je  $q$  Wurzelfunctionen mit jedesmal anderen Charakteristiken  $(\mu_1^i, \dots, \mu_q^i)$  ( $i = 1, 2, \dots$ ), jedoch so, dass die Summe der Charakteristiken für alle diese Producte dieselbe ist, oder dass

$$(7) \quad (\mu_1' \dots \mu_q') \equiv (\mu_1'' \dots \mu_q'') \equiv \dots \pmod{2},$$

so gilt der Satz:

- (I) Es besteht zwischen je  $p(q-1)+2$  allgemeinen Wurzelfunctionen der Form (6) mit derselben Charakteristik (7) mindestens eine lineare, homogene Relation der Form

$$(8) \quad \sum_{i=1}^{p(q-1)+2} l_i \sqrt{\psi_{\mu_1^i} \dots \psi_{\mu_q^i}} = 0;$$

oder, eine Wurzelfunction der Form (6) lässt sich stets durch ein Aggregat von höchstens  $p(q-1)+1$  linear unabhängigen Functionen von derselben Form und derselben Charakteristik darstellen.

In der That, man dividire jedes Glied auf der linken Seite von (8) durch  $\sqrt{\psi_{\nu_1} \dots \psi_{\nu_q}}$ , wo  $\nu_1, \dots, \nu_q$   $q$  Charakteristiken von der Beschaffenheit sind, dass  $(\nu_1 \dots \nu_q)$  congruent mit den Charakteristiken (7) ist; dann ist der Quotient des  $i^{\text{ten}}$  Gliedes eine rationale Function von  $x$ , da die Factoren an den Querschnitten  $a, b$  von  $T'$  nach (4) sämmtlich  $= 1$  werden, und diese Function ist von der Ordnung  $qp$  oder sie hat  $qp$   $0^1$  Punkte (die Berührungspunkte der Curven  $\psi_{\mu_1^i} = 0, \dots, \psi_{\mu_q^i} = 0$ ) und  $qp$   $\infty^1$  Punkte (die Berührungspunkte der Curven  $\psi_{\nu_1} = 0, \dots, \psi_{\nu_q} = 0$ ). Nach (1b) § 12 aber besteht zwischen je  $qp - p + 2$  rationalen Functionen der Ordnung  $qp$  mindestens eine lineare, homogene Gleichung. Lässt man den gemeinsamen Nenner  $\sqrt{\psi_{\nu_1} \dots \psi_{\nu_q}}$  weg, so hat man die Gleichung (8). (q. e. d.)

Am einfachsten sind die Relationen (8) für  $q = 2$ . Unterscheidet man die einer geraden Charakteristik  $\mu$  zugeordnete Berührungsfuction  $\psi_\mu$  des  $n - 2^{\text{ten}}$  Grades von der einer ungeraden Charakteristik  $\nu$  zugeordneten Berührungsfuction  $\varphi_\nu$  des  $n - 3^{\text{ten}}$  Grades, so erhält man als speciellen Fall von (8) die Relationen

$$(9) \quad \sum_{i=1}^{p+2} \alpha_i \sqrt{\psi_{\mu_1^i} \psi_{\mu_2^i}} = 0, \quad \sum_{i=1}^{p+1} \beta_i \sqrt{\psi_{\mu_1^i} \varphi_{\nu_1^i}} = 0, \quad \sum_{i=1}^p \gamma_i \sqrt{\varphi_{\nu_1^i} \varphi_{\nu_2^i}} = 0,$$

wo  $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$  constante Coefficienten sind und vorausgesetzt ist, dass die zusammengesetzten Charakteristiken  $\mu_1^i \mu_2^i$  oder  $\mu_1^i \nu_1^i$  oder  $\nu_1^i \nu_2^i$  für alle Glieder einer Summe einander congruent sind (mod 2). Der

Beweis von (9) ist derselbe wie von (8). Dividirt man nämlich jede Summe durch eine ihren Gliedern entsprechend gebildete Wurzelfunction, so bestehen die Glieder aus rationalen Quotienten, die bez. von der Ordnung  $2p$ ,  $2p - 1$ ,  $2p - 2$  sind.

Von besonderem Interesse sind die letzten Relationen in (9), nämlich

$$\sum_{i=1}^p \gamma_i \sqrt{\varphi_{r_1 i} \varphi_{r_2 i}} = 0, \quad (10)$$

da dieselben nur aus Quotienten von  $\varphi$ -Functionen gebildet sind, die sich nach (I) § 23 einer eindeutigen Transformation von  $F(x, y) = 0$  gegenüber invariant verhalten. Die Berührungsfunktionen  $\varphi_r$  sind nicht wie die Functionen  $\psi_\mu$  vom Punkte  $\alpha$  abhängig; sie werden nur mittels der Coefficienten von  $F = 0$  gebildet und enthalten diese in rationaler Weise (vgl. § 32). Jede Gleichung der Form (10) muss daher durch  $F = 0$  zur Identität werden und umgekehrt muss eine Anzahl solcher Gleichungen (10) im Stande sein,  $F = 0$  zu ersetzen. Im Allgemeinen werden hierzu  $p - 2$  unabhängige Gleichungen der Form (10) genügen. Denn drückt man alle  $\varphi_{r_1 i}$  und  $\varphi_{r_2 i}$  in den Gleichungen (10) durch  $p$  linear unabhängige, adjungirte Functionen  $f_1, \dots, f_p$  vom  $n - 3^{\text{ten}}$  Grade aus, so ergibt die Elimination von  $f_1, \dots, f_p$  aus  $p - 2$  Gleichungen der Form (10) eine homogene Gleichung in  $f_1, f_2, f_3$ , die mit  $F = 0$  identisch sein muss.

Ein zweiter Satz bezieht sich auf die rationalen Functionen, die sich aus Wurzelfunctionen zusammensetzen lassen. Um denselben zu formuliren, seien

$\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_{2\lambda+1}$  eine gerade Anzahl von Charakteristiken  $\mu$ , (11)

$\psi_{\mu_0}, \psi_{\mu_1}, \dots, \psi_{\mu_{2\lambda+1}}$  die entsprechenden Berührungsfunktionen  $\psi_\mu$ , (12)

$\alpha_i^{\mu_0}, \alpha_i^{\mu_1}, \dots, \alpha_i^{\mu_{2\lambda+1}}$  die Berührungspunkte dieser Functionen  $\psi_\mu$ . (13)  
( $i=1 \dots p$ )

Unter der Voraussetzung, dass die Summe der Charakteristiken (11), (die wir zunächst als gerade Charakteristiken annehmen) der Charakteristik 0 congruent (mod 2) ist, dass also

$$\mu_0 \mu_1 \dots \mu_{2\lambda+1} \equiv 0 \pmod{2} \quad (14)$$

ist, besteht auch zwischen den zugehörigen Functionen (12) und ebenso zwischen den Berührungspunkten (13) eine Abhängigkeit; es gilt nämlich der Satz:

(II) Unter der Voraussetzung (14) für eine gerade Zahl von Charakteristiken ist das Product der zugehörigen Wurzelfunctionen, also

$$\sqrt{\psi_{\mu_0} \psi_{\mu_1} \dots \psi_{\mu_{2\lambda+1}}} \quad (15)$$

eine ganze, rationale Function der Coordinaten des Punktes  $x$ .

Dem dividirt man den Ausdruck (15) durch  $\sqrt{\psi_\mu^{2n} + 2} = \psi_\mu^{n+1}$ , wo  $\psi_\mu$  die zu einer beliebigen Charakteristik  $\mu$  gehörige Berührungsfunktion ist, so ist der Quotient eine rationale Function, weil er nach (14) und nach (4) an den Querschnitten  $a_k$  und  $b_k$  von  $T'$  die Factoren 1 hat. Da nun der Nenner  $\psi_\mu^{n+1}$  für sich eine ganze, rationale Function vom Grade  $(\lambda + 1)(n - 2)$  in  $x$  (d. h. in den Coordinaten des Punktes  $x$ ) ist, so muss auch der Zähler, d. i. die Function (15) eine ganze, rationale Function sein und sich mit Hilfe von  $F = 0$  ebenfalls auf den Grad  $(\lambda + 1)(n - 2)$  in  $x$  bringen lassen. (q. e. d.)

Um (15) in der letztgenannten Form darzustellen, bilde man eine allgemeine Curve  $P(x) = 0$  von dem Grade  $(\lambda + 1)(n - 2)$  in  $x$ , welche durch jeden der  $r$  Doppelpunkte  $\delta$  von  $F = 0$  und durch jeden der  $n - 2$  Schnittpunkte  $\varepsilon$  der Tangente ( $\alpha x$ ) des Punktes  $\alpha$  mit  $F = 0$  je  $(\lambda + 1)$ -fach hindurchgeht. Nach dieser Bestimmung setzt sich (nach § 11 und 12) die Function  $P$  linear und homogen mit unbestimmten Coefficienten zusammen aus  $(2\lambda + 1)p + 1$  unabhängigen Functionen derselben Art, die ihrerseits vollkommen bestimmt sind und deren Coefficienten die Coefficienten von  $F = 0$  und die Coordinaten des Punktes  $\alpha$  in rationaler Weise enthalten. Die Curve  $P = 0$  muss ferner  $F = 0$  in den  $2\lambda + 2$  Systemen von Berührungspunkten (13) schneiden. Zur Bestimmung der  $(2\lambda + 1)p$  noch willkürlichen, nicht homogenen Coefficienten in  $P$  sind aber die  $2\lambda + 1$  ersten Punktsysteme (13) gerade ausreichend, da die  $p$  letzten Nullpunkte einer ganzen, rationalen Function durch die übrigen bereits bestimmt sind (l § 12). Die Coefficienten in  $P$  sind also rationale und symmetrische Functionen von jedem der  $(2\lambda + 1)$  ersten Punktsysteme (13). Bezeichnet man die so gebildete Function genauer durch  $P(x, \alpha_i^{\mu_0}, \dots, \alpha_i^{\mu_{2\lambda}})$ , so hat man die Gleichung:

$$(16) \quad \psi_{\mu_0} \psi_{\mu_1} \dots \psi_{\mu_{2\lambda+1}} = P^2 + P_1 F,$$

die wir abgekürzt schreiben:

$$(17) \quad \sqrt{\psi_{\mu_0} \psi_{\mu_1} \dots \psi_{\mu_{2\lambda+1}}} = P(x, \alpha_i^{\mu_0}, \dots, \alpha_i^{\mu_{2\lambda}}).$$

Die Function  $P$  ist vom Grade  $(\lambda + 1)(n - 2)$  in  $x$  und lässt sich, wie aus ihrer Bildung hervorgeht, darstellen als homogene Function der  $(\lambda + 1)^{\text{ten}}$  Dimension in Functionen des Berührungssystems  $\psi_\mu$ . Die Function  $P_1$  in (16) ist vom Grade  $(2\lambda + 2)(n - 2) - n$  in  $x$  und wird nach (16) für jeden Doppelpunkt  $\delta$  von  $F = 0$  gleich  $O^{2\lambda}$ , für jeden der Punkte  $\varepsilon$  gleich  $O^{2\lambda+1}$ .



Die Darstellung (16) lässt sich geometrisch interpretiren<sup>1)</sup> und gibt den Satz:

(IIa) Wenn die Summe einer geraden Anzahl  $2\lambda + 2$  von geraden Charakteristiken  $\mu$  congruent  $0 \pmod{2}$  ist, so berühren die zugehörigen Curven  $\psi_\mu = 0$  ausser  $F = 0$  noch sämtlich eine bestimmte Curve  $P_1 = 0$ , wo sie derselben begegnen. Die sämtlichen Berührungspunkte der Curven  $\psi_\mu = 0$  mit  $F = 0$  und mit  $P_1 = 0$  liegen auf ein und derselben, bestimmten Curve  $P = 0$  vom Grade  $(\lambda + 1)(n - 2)$  in  $x$ .

Bei dieser Fassung ist von den Doppelpunkten  $\delta$  und den Punkten  $\varepsilon$  von  $F = 0$ , durch welche ebenfalls die Curven  $\psi_\mu = 0$ ,  $P = 0$  und  $P_1 = 0$  hindurchgehen, abgesehen.

Die vorstehende Betrachtung erfährt eine leichte Abänderung, wenn sich unter (11) ungrade Charakteristiken befinden. Dann geht jede Function  $\psi_\nu(x)$  mit ungrader Charakteristik  $\nu$  über in  $(\alpha x)\varphi_\nu(x)$  (§ 29). In Folge dessen tritt eine Reduction der Gleichung (16) oder (17) ein, indem auf der linken Seite Factoren der Form  $(\alpha x)$  auscheiden und entsprechend der Grad von  $P$  und  $P_1$  sich erniedrigt.

Hat man insbesondere  $2\lambda + 2$  ungrade Charakteristiken  $\nu_0, \dots, \nu_{2\lambda+1}$ , deren Summe  $\equiv 0 \pmod{2}$  und bezeichnet man die zugehörigen Berührungscurven  $\varphi_\nu$  mit  $\varphi_{\nu_0}, \dots, \varphi_{\nu_{2\lambda+1}}$  und die Systeme von Berührungspunkten derselben mit  $\alpha_i^{\nu_0}, \dots, \alpha_i^{\nu_{2\lambda+1}}$  ( $i = 1, \dots, p - 1$ ), so scheidet in (16) der Factor  $(\alpha x)^{2\lambda+2}$  aus und an Stelle von (16) und (17) treten die Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{\nu_0} \varphi_{\nu_1} \dots \varphi_{\nu_{2\lambda+1}} &= P^2 + P_1 F \\ \sqrt{\varphi_{\nu_0} \varphi_{\nu_1} \dots \varphi_{\nu_{2\lambda+1}}} &= P(x, \alpha_i^{\nu_0}, \dots, \alpha_i^{\nu_{2\lambda}}). \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Hier wird also das Product der  $2\lambda + 2$  Wurzelfunctionen  $\sqrt{\varphi_{\nu_i}}$  mit Hilfe von  $F = 0$  gleich einer ganzen, rationalen Function  $P$  in  $x$  vom Grade  $(\lambda + 1)(n - 3)$ , deren Coefficienten die Coordinaten des Punktes  $\alpha$  nicht mehr enthalten. Die Function  $P$  lässt sich als homogene Function der  $(\lambda + 1)^{\text{ten}}$  Dimension in Functionen des Berührungssystems  $\varphi_\nu$  darstellen; die Function  $P_1$  ist vom Grade  $(2\lambda + 2)(n - 3) - n$  in  $x$ . Daher der Satz:

1) Berührungssätze dieser und allgemeinerer Art (vgl. § 35 Satz IIIa) sind von Clebsch (Journ. für Math. Bd. 63, S. 189 ff.) in grosser Zahl mittels des Abel'schen Theorems abgeleitet worden. Die obige Beweisführung ist der von Clebsch benutzten nahe verwandt; sie beruht, wie diese, auf der Rechnung mit Charakteristiken.

(IIb) Wenn die Summe einer geraden Anzahl  $2\lambda + 2$  von ungraden Charakteristiken  $\nu$  congruent 0 ist (mod 2), so berühren die zugehörigen Curven  $\varphi_i = 0$  ausser  $F = 0$  noch sämtlich eine bestimmte Curve  $P_1 = 0$ , wo sie derselben begegnen und die sämtlichen Berührungspunkte der Curven  $\varphi_i$  mit  $F$  und  $P_1$  liegen auf ein und derselben, bestimmten Curve  $P$  vom Grad  $(\lambda + 1)(n - 3)$  in  $x$ .

### § 31. Lösung des Umkehrproblems.

Im Anfang von § 30 wurde bemerkt, die Lösung des in den Gleichungen (1) § 30 enthaltenen Umkehrproblems geschehe dadurch, dass man Beziehungen herstellt zwischen Thetaquotienten mit den allgemeinen Argumenten  $U_1, \dots, U_p$  und zwischen algebraischen und symmetrischen Functionen der  $p$  Punkte  $x_1, \dots, x_p$ , analog der Beziehung (5) § 30, die zwischen den speciellen Argumenten  $u_1, \dots, u_p$  und den Coordinaten des Punktes  $x$  besteht, wenn diese Elemente durch die Gleichungen (2) § 30 verbunden sind.

Wir verallgemeinern indess die Betrachtung, indem wir an Stelle von (1) § 30 die Gleichungen setzen ( $h = 1, \dots, p$ ):

$$(1) \quad V_h = \sum_{\varepsilon=0}^q \int_{\alpha_k}^{x_k} du_h = \sum_{k=0}^q \int_{\varepsilon}^{x_k} du_h - \sum_{k=0}^q \int_{\varepsilon}^{\alpha_k} du_h,$$

wo  $q$  eine beliebige Zahl,  $x, x_1, \dots, x_q$  und  $\alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_q$  zwei Systeme von je  $q + 1$  beliebigen Punkten sind<sup>1)</sup>. Die letzte Form in (1), in der  $\varepsilon$  ein beliebiger Punkt ist, zeigt, dass  $V_h$  sowohl für die oberen Grenzpunkte  $x_k$ , wie für die unteren Grenzpunkte  $\alpha_k$  symmetrisch gebildet ist. Die Aufgabe ist nun, Thetaquotienten mit den Argumenten  $V_1, \dots, V_p$  als algebraische und symmetrische Functionen der Coordinaten sowohl der oberen Grenzpunkte  $x_k$ , wie der unteren  $\alpha_k$  darzustellen. Wir untersuchen, wie früher den speciellen Ausdruck (3) § 30, so jetzt den entsprechend gebildeten, allgemeinen Ausdruck

$$(2) \quad \vartheta_{\mu}(V_1, \dots, V_p) : \vartheta_{\nu}(V_1, \dots, V_p)^2$$

der ebenso wie in den  $q + 1$  Punkten  $x_k$ , auch in den  $q + 1$  Punkten  $\alpha_k$  symmetrisch gebildet ist. Der Ausdruck (2) hat, wenn er zunächst nur als Function von  $x$  betrachtet wird, ähnliche Eigenschaften,

1) Die in (1) auftretenden Punkte  $\alpha_0$  und  $x_0$  sollen mit  $\alpha$  und  $x$  identisch sein.

2) Riemann, Ges. W. S. 134. II. Stahl, Journ. für Math. Bd. 111, S. 98 ff. 1892).

wie der frühere, specielle Thetaquotient. Er ist eindeutig in  $T'$ , hat an den Querschnitten  $a_k$  und  $b_k$  ebenfalls die Factoren

$$(-1)^{u_k - v_k} \quad \text{und} \quad (-1)^{u'_k - v'_k} \quad (3)$$

und wird  $= 0^1$  in  $p$  Punkten  $y_1, \dots, y_p$  und  $= \infty^1$  in  $p$  Punkten  $z_1, \dots, z_p$ , die nach Satz IV § 29 bestimmt sind durch die Congruenzen ( $h = 1, \dots, p$ ):

$$\sum_{i=1}^p \int_{\alpha_i^u}^{y_i} du_h + \sum_{k=1}^q \int_{\alpha_k}^{x_k} du_h = 0, \quad \sum_{i=1}^p \int_{\alpha_i^v}^{z_i} du_h + \sum_{k=1}^q \int_{\alpha_k}^{x_k} du_h = 0. \quad (4)$$

Der Ausdruck (2) hat ferner, wenn man ihn als Function von irgend einem anderen der Punkte  $x_k$  in (1) betrachtet, genau dieselben Factoren (3) an den Querschnitten, wie als Function von  $x$  und wird ebenfalls in je  $p$  Punkten  $= 0^1$  und  $= \infty^1$ . Ist daher  $S$  irgend eine algebraische, wie  $T'$  verzweigte Function von  $x$  allein, die an den Querschnitten  $a_k, b_k$  ebenfalls die Factoren (3) annimmt und bezeichnet  $S_k$  den Werth dieser Function für  $x = x_k$ , so ist der darzustellende Ausdruck (2), dividirt durch das Product  $S S_1 \dots S_q$  eine rationale Function der Coordinaten eines jeden der Punkte  $x, x_1, \dots, x_q$ . Bezeichnet man diese rationale Function mit  $R$ , so ist die Function (2) dargestellt in der Form<sup>1)</sup>:

$$R S S_1 \dots S_q. \quad (5)$$

Wir setzen nun für  $S$  die einfachste Function, die möglich ist, nämlich

$$S = \sqrt{\frac{\psi_u(x)}{\psi_v(x)}}. \quad (6)$$

Dann ist, wie die Vergleichung von (2) mit (5) ergibt, die rationale Function  $R$  in (5) folgendermassen bestimmt. Als Function von  $x$  betrachtet, wird  $R = 0^1$  in den  $p$  Punkten  $\alpha_i^v$  (in denen  $S = \infty^1$  wird) und  $= \infty^1$  in den  $p$  Punkten  $\alpha_i^u$  (in denen  $S = 0^1$  wird). Sie ist ferner  $= 0^1$  in den  $p$   $0^1$  Punkten  $y_i$  und  $= \infty^1$  in den  $p$   $\infty^1$  Punkten  $z_i$  der Function (2), welche Punkte bestimmt sind durch die Congruenzen (4). In ähnlicher Weise, wie als Function von  $x$ , ist  $R$  als Function von jedem der anderen oberen Grenzpunkte  $x_1, \dots, x_q$  in (1) definit.

Um die rationale Function  $R$  darzustellen, bilden wir sie zunächst als Function von  $x$  aus den angegebenen  $0^1$  und  $\infty^1$  Punkten

1) Riemann, Ges. W. S. 135 Anmerkung.

nach der Methode des § 12. Dabei braucht man aber die Punkte  $y_i$  und  $z_i$  selber gar nicht zu kennen. Diese Punkte lassen sich vielmehr nach (4) ersetzen durch die  $q$  Punkte  $x_1, \dots, x_q$ . Man lege durch die  $r$  Doppelpunkte  $\delta$  von  $I' = 0$ , durch die  $p$  Punkte  $\alpha_i''$  und die  $q$  Punkte  $\alpha_1, \dots, \alpha_q$  eine Curve von hinreichend hohem Grade  $\Psi_\mu(x) = 0$ . Diese Curve wird  $I' = 0$  noch in einer Anzahl weiterer Punkte  $\xi_1, \dots, \xi_t$  schneiden. Legt man nun durch die  $r$  Punkte  $\delta$  und durch die  $t$  Punkte  $\xi$  eine Curve desselben Grades, so hat diese noch  $q$  lineare, nicht homogene Coefficienten oder noch  $q$  willkürliche  $0^1$  Punkte. Wählt man für diese die  $q$  Punkte  $x_1, \dots, x_q$ , so sind die  $p$  letzten  $0^1$  Punkte wegen (4) nach den Sätzen IV § 20 und I § 12 gerade noch die  $p$  Punkte  $y_i$ . Bezeichnet man die gebildete Curve mit  $\Psi_\mu(x, x_1, \dots, x_q) = 0$ , so wird der Quotient  $\Psi_\mu(x, x_1, \dots, x_q) : \Psi_\mu(x)$  als Function von  $x$

$$= 0^1 \text{ in den } p \text{ Punkten } y_1, \dots, y_p \text{ und den } q \text{ Punkten } x_1, \dots, x_q,$$

$$= \infty^1 \text{ in den } p \text{ Punkten } \alpha_1'', \dots, \alpha_p'' \text{ und den } q \text{ Punkten } \alpha_1, \dots, \alpha_q.$$

Entsprechend bestimme man zwei Curven  $\Psi_r(x)$  und  $\Psi_r(x, x_1, \dots, x_q)$  von demselben Grade wie die vorigen, nur mit Benutzung der  $p$  Punkte  $\alpha_i'$  statt  $\alpha_i''$ , und  $t$  anderen Hilfspunkten  $\xi_1', \dots, \xi_t'$ , so dass der Quotient  $\Psi_r(x, x_1, \dots, x_q) : \Psi_r(x)$

$$= 0^1 \text{ in den } p \text{ Punkten } z_1, \dots, z_p \text{ und den } q \text{ Punkten } x_1, \dots, x_q,$$

$$= \infty^1 \text{ in den } p \text{ Punkten } \alpha_1', \dots, \alpha_p' \text{ und den } q \text{ Punkten } \alpha_1, \dots, \alpha_q$$

wird. Nunmehr hat der Ausdruck

$$(7) \quad \frac{\Psi_\mu(x, x_1, \dots, x_q)}{\Psi_r(x, x_1, \dots, x_q)} \frac{\Psi_r(x)}{\Psi_\mu(x)},$$

als Function von  $x$  betrachtet, dieselben  $0^1$  und  $\infty^1$  Punkte wie die Function  $R$ , stimmt also nach Satz 1b § 6 mit  $R$  bis auf einen von  $x$  unabhängigen, dagegen von  $x_1, \dots, x_q$  noch abhängigen Factor überein. Um die Function  $R$ , die in den  $q + 1$  Punkten  $x, x_1, \dots, x_q$  symmetrisch ist, wie aus der Vergleichung von (2) und (5) hervorgeht, vollständig zu erhalten, hat man offenbar den Ausdruck (7) nur durch Zufügung eines von  $x$  unabhängigen Factors ebenfalls in den Punkten  $x, x_1, \dots, x_q$  symmetrisch zu machen. Man erhält so für  $R$  den Ausdruck

$$(8) \quad R = C_{\mu r} \frac{\Psi_\mu(x, x_1, \dots, x_q)}{\Psi_r(x, x_1, \dots, x_q)} \prod_{k=0}^q \frac{\Psi_r(x_k)}{\Psi_\mu(x_k)},$$

wo nunmehr  $C_{\mu r}$  eine von  $x, x_1, \dots, x_q$  unabhängige Constante ist.

Trägt man die Werthe (6) und (8) in (5) ein, so hat man für den Thetaquotienten (2) folgende Darstellung<sup>1)</sup>:

$$\frac{\vartheta_{\mu}(V_1, \dots, V_p)}{\vartheta_{\nu}(V_1, \dots, V_p)} = C_{\mu\nu} \frac{\varPsi_{\mu}(x, x_1, \dots, x_q)}{\varPsi_{\nu}(x, x_1, \dots, x_q)} \prod_{k=0}^q \frac{\varPsi_{\nu}(x_k)}{\varPsi_{\mu}(x_k)} \sqrt{\frac{\varPsi_{\mu}(x_k)}{\varPsi_{\nu}(x_k)}}. \quad (9)$$

Zur Bestimmung der Constanten  $C_{\mu\nu}$  wähle man (wenn  $q \geq p$ ) eine Charakteristik  $\lambda$  so, dass  $\lambda\mu$  und  $\lambda\nu$  gerade Charakteristiken sind und setze in (9)  $x, x_1, \dots, x_q$  einmal gleich  $\alpha_0^{\lambda}, \alpha_1^{\lambda}, \dots, \alpha_q^{\lambda}$ , das andere mal gleich  $\alpha_0^{\lambda\mu}, \alpha_1^{\lambda\mu}, \dots, \alpha_q^{\lambda\mu}$ , wo die Punkte  $\alpha_k^{\lambda}$  und  $\alpha_k^{\lambda\mu}$  ( $k=0, \dots, q$ ) den Congruenzen genügen:

$$\sum_{k=0}^q \int_{\alpha_k}^{\alpha_k^{\lambda}} du_h = \frac{1}{2} A_h^{\lambda}, \quad \sum_{k=0}^q \int_{\alpha_k}^{\alpha_k^{\lambda\mu}} du_h = \frac{1}{2} (A_h^{\lambda} + A_h^{\mu} + A_h^{\nu}), \quad (10)$$

während  $\frac{1}{2} A_h^{\lambda}, \frac{1}{2} A_h^{\mu}, \frac{1}{2} A_h^{\nu}$  halbe Periodensysteme sind, die den Charakteristiken  $\lambda, \mu, \nu$  entsprechen (vgl. (36) § 26). Dann erhält man durch die beiden Substitutionen nach (40) § 26 aus (9) Gleichungen von der Form:

$$\frac{\vartheta_{\lambda\mu}}{\vartheta_{\lambda\nu}} = \frac{C_{\mu\nu}}{P_{\nu\mu}} \quad \text{und} \quad \frac{\vartheta_{\lambda\nu}}{\vartheta_{\lambda\mu}} = \frac{C_{\mu\nu}}{P_{\mu\nu}}, \quad (11)$$

wo  $P_{\nu\mu}$  und  $P_{\mu\nu}$  vollkommen bestimmte, algebraische Ausdrücke sind, symmetrisch für jedes einzelne System der Punkte  $\alpha_k, \alpha_k^{\lambda}, \alpha_k^{\lambda\mu}$ . Durch Multiplication und Division ergibt sich aus (11):

$$\frac{\vartheta_{\lambda\mu}^2}{\vartheta_{\lambda\nu}^2} = \frac{P_{\mu\nu}}{P_{\nu\mu}} \quad \text{und} \quad C_{\mu\nu}^2 = P_{\mu\nu} P_{\nu\mu}. \quad (12)$$

Hierdurch ist  $C_{\mu\nu}$  bis auf das Vorzeichen bestimmt. Das letztere ist durch directe Vergleichung der beiden Seiten in (9) zu ermitteln. Durch Einführung von  $C_{\mu\nu}$  in (9) muss die rechte Seite dieser Gleichung auch in den  $q+1$  Punkten  $\alpha_k$  symmetrisch werden, da dies für die linke Seite bereits zutrifft. Das Vorstehende, zusammengefasst, gibt den Satz:

(I) Der Quotient zweier Thetafunctionen mit beliebigen, zweitheiligen Charakteristiken  $\mu$  und  $\nu$ , deren Argumente Integralsummen 1. Gattung mit einer beliebigen Zahl  $q+1$  von Gliedern und mit beliebigen oberen und unteren Grenzpunkten  $x_k$  und  $\alpha_k$  ( $k=0, 1, \dots, q$ ) sind, lässt sich

1) H. Stahl, l. c. S. 104.

symmetrisch in den Coordinaten dieser zwei Punktsysteme darstellen durch rationale Functionen in Verbindung mit Quadratwurzeln aus solchen Functionen.

Dieser Satz wird in § 35 bedeutend verallgemeinert.

Aus der Gleichung (9) lassen sich in mehrfacher Weise specielle Formeln ableiten. Dabei kann man, wenn  $q$  besondere Werthe hat und die bisher willkürlichen, untern Grenzpunkte  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_q$  der Integrale in (1) passend gewählt werden, die rationalen Functionen in (9) auch durch Wurzelfunctionen ersetzen. Die zwei einfachsten Fälle sind folgende.

Erstens sei  $q = p$  und  $\alpha_1, \dots, \alpha_p = \alpha_1^0, \dots, \alpha_p^0$ , d. h. = den  $0^1$  Punkten der von  $\alpha$  abhängigen Function  $\vartheta_0(u)$  oder  $\sqrt{\psi_0(x)}$ . An Stelle von (1) tritt jetzt ( $h = 1, \dots, p$ ):

$$(13) \quad \int_{\alpha}^x du_h + \sum_{i=1}^p \int_{\alpha_i^0}^{x_i} du_h \equiv V_h$$

und an Stelle von (9) die Gleichung<sup>1)</sup>

$$(14) \quad \frac{\vartheta_{\mu}(V_1, \dots, V_p)}{\vartheta_r(V_1, \dots, V_p)} = C_{\mu} \frac{\vartheta_{\mu}(x, x_1, \dots, x_p)}{\vartheta_r(x, x_1, \dots, x_p)} \prod_{i=0}^p \frac{\vartheta_r(x_i)}{\vartheta_{\mu}(x_i)} \sqrt{\frac{\psi_{\mu}(x_i)}{\psi_r(x_i)}}.$$

Die oben angegebene Bildung der rationalen Functionen  $\vartheta$  kann hier folgendermassen modificirt werden. Man bilde  $\vartheta_{\mu}(x) = 0$  als Curve des  $3(n-2)^{\text{ten}}$  Grades in  $x$  so, dass sie durch jeden der  $r$  Doppelpunkte  $\delta$  von  $F=0$  und ebenso durch jeden der  $n-2$  Schnittpunkte  $\varepsilon$  der Tangente  $(\alpha x) = 0$  mit  $F=0$  je dreimal hindurchgeht. Die noch freien Coefficienten lassen sich dann gerade noch so bestimmen, dass diese Curve durch die  $p$  Punkte  $\alpha_i^{\mu}$  und die  $p$  Punkte  $\alpha_i^0$  hindurchgeht. Sie ist damit vollständig bestimmt und schneidet  $F=0$  noch in  $p$  Punkten  $\xi_1, \dots, \xi_p$ , die von den Punktsystemen  $\alpha_i^{\mu}$  und  $\alpha_i^0$  abhängen. Die Curve  $\vartheta_{\mu}(x, x_1, \dots, x_p) = 0$  ist alsdann von demselben Grad  $3(n-2)$  in  $x$  zu wählen und dreifach durch jeden der Punkte  $\delta$  und  $\varepsilon$  und einfach durch die  $p$  Punkte  $\xi_1, \dots, \xi_p$  und die  $p$  Punkte  $x_1, \dots, x_p$  zu legen, wodurch sie vollständig bestimmt ist. Ebenso hat man  $\vartheta_r(x)$  und  $\vartheta_r(x, x_1, \dots, x_p)$  zu bilden mit dem Unterschied, dass hier statt der  $p$  Punkte  $\alpha_i^{\mu}$  die  $p$  Punkte  $\alpha_i^r$  zu nehmen sind, in Folge dessen auch die  $p$  Punkte  $\xi_i$  andere werden. Aus dieser Bildungsweise geht hervor, dass sich die Func-

1) H. Stahl, Diss. Berlin 1882. S. 15.

tionen  $\mathcal{P}$  in (14) als homogene Functionen des dritten Grades in den zu  $\alpha$  gehörigen, adjungirten Functionen  $\psi$  allein darstellen lassen. Hiernach hat man den Satz:

(II) Der Quotient zweier Thetafunctionen mit beliebigen, zweitheiligen Charakteristiken  $\mu$  und  $\nu$ , in welchen die Argumente  $p+1$ -gliedrige Integralsummen 1. Gattung sind, deren obere Grenzpunkte beliebig, deren untere Grenzpunkte der beliebige Punkt  $\alpha$  und das System der  $p$   $0^1$  Punkte der zu  $\alpha$  gehörigen Berührungsfunktion  $\psi_0$  sind, lässt sich algebraisch darstellen durch das System der zu  $\alpha$  gehörigen Functionen  $\psi$  und durch die Coordinaten der Berührungspunkte dieser  $\psi$ -Curven.

Man kann indess die rechte Seite in (14) auch durch lauter Wurzelfunctionen darstellen. Die Function  $\mathcal{P}_\mu(x, x_1, \dots, x_p) : \mathcal{P}_\mu(x)$  ist als rationale Function von  $x$  definiert durch ihre  $2p \infty^1$  Punkte  $\alpha_i^0$  und  $\alpha_i^\mu$  und durch  $p$  ihrer  $2p$   $0^1$  Punkte, nämlich  $x_1, \dots, x_p$ . Man kann nun den Nenner  $\mathcal{P}_\mu(x)$  ersetzen durch  $\sqrt{\psi_0(x)} \psi_\mu(x)$ . Dies ist eine besondere, aus zwei Berührungsfunktionen  $\psi$  gebildete Wurzelfunction von der Charakteristik  $\mu$ . Um den Zähler  $\mathcal{P}_\mu(x, x_1, \dots, x_p)$  zu erhalten, hat man eine entsprechende, allgemeine Wurzelfunction mit derselben Charakteristik  $\mu$  zu bilden. Eine solche lässt sich nach (I) § 30 durch  $p+1$  linear unabhängige Wurzelfunctionen derselben Art darstellen, also nach (9) § 30 durch einen Ausdruck von der Form

$$\sum_{i=0}^p l_i \sqrt{S_\mu^i(x)}, \quad (15)$$

wo  $S_\mu^i(x) = \psi_{\mu_1^i}(x) \psi_{\mu_2^i}(x)$  und  $\mu_1^i \mu_2^i \equiv \mu$  ( $i = 0, 1, \dots, p$ ) ist. Bestimmt man die Coefficienten  $l_i$  so, dass der Ausdruck (15) für  $x = x_1, \dots, x_p$  verschwindet, so hat man den Zähler  $\mathcal{P}_\mu(x, x_1, \dots, x_p)$ . Hiernach erhält man an Stelle von (14) die Gleichung

$$\frac{\mathcal{P}_\mu(V_1, \dots, V_p)}{\mathcal{P}_\nu(V_1, \dots, V_p)} = C_{\mu\nu} \frac{\sum \pm \sqrt{S_\mu^0(x)} \dots \sqrt{S_\mu^p(x_p)}}{\sum \pm \sqrt{S_\nu^0(x)} \dots \sqrt{S_\nu^p(x_p)}}, \quad (16)$$

deren rechte Seite der Quotient zweier Determinanten ist, gebildet aus den Wurzelfunctionen  $\sqrt{S_\mu^i(x)}$  und  $\sqrt{S_\nu^i(x)}$  mit den Argumenten  $x, x_1, \dots, x_p$ . Die Constante  $C_{\mu\nu}$  bestimmt sich wieder am einfachsten durch die Substitutionen  $x, x_1, \dots, x_p = \alpha, \alpha_1^\lambda, \dots, \alpha_p^\lambda$  und  $x, x_1, \dots, x_p = \alpha, \alpha_1^{\lambda\nu}, \dots, \alpha_p^{\lambda\nu}$ , mit der Voraussetzung, dass  $\lambda\mu$  und  $\lambda\nu$  gerade Charakteristiken sind.

Zweitens sei in (9)  $q = q(2p - 2)$  und die  $q$  Punkte  $\alpha_k$  seien die Schnittpunkte von  $F = 0$  mit einer Curve  $\Phi(x) = 0$  vom Grade  $q(n - 3)$  in  $x$ , die ausserdem  $F = 0$  in den  $r$  Doppelpunkten  $\delta$  je  $q$ -fach schneidet.

Dann lässt sich der Nenner  $\Psi_\mu(x)$  in (9) ersetzen durch  $\Phi \sqrt{\Psi_\mu(x)}$ . Dies ist eine Wurzelfunction mit der Charakteristik  $\mu$ , die in den  $q$  Punkten  $\alpha_k$  ( $k=1, \dots, q$ ) und den  $p$  Punkten  $\alpha_i''$  ( $i=1, \dots, p$ ) in erster Ordnung verschwindet und ausserdem noch in gewissen Punkten, nämlich in jedem der  $r$  Doppelpunkte  $\delta$  von  $F = 0$  in der Ordnung  $q + \frac{1}{2}$  (für jeden der beiden Zweige) und in jedem der  $n - 2$  Schnittpunkte  $\varepsilon$  der Tangente  $(\alpha x) = 0$  mit  $F = 0$  je in der Ordnung  $\frac{1}{2}$  verschwindet. Um den zugehörigen Zähler  $\Psi_\mu(x, x_1, \dots, x_p)$  in (9) zu erhalten, hat man eine allgemeine Wurzelfunction mit derselben Charakteristik  $\mu$  zu bilden, welche in den Punkten  $\delta$  und  $\varepsilon$  in derselben Ordnung wie  $\Psi_\mu(x)$  und in  $q + p$  weiteren Punkten verschwindet. Eine solche Function drückt sich nach (I) § 30 durch  $q + 1$  linear unabhängige Functionen derselben Art aus in der Form:

$$(17) \quad \sqrt{R_\mu(x)} + \sqrt{(\alpha x)} \sum_{k=1}^q l_k \sqrt{T_\mu^k(x)}.$$

Dabei ist die Function  $R_\mu(x)$  vom Grade  $2q(n - 3) + (n - 2)$  in  $x$  und von  $\alpha$  abhängig. Die Functionen  $T_\mu^k(x)$  sind vom Grade  $(2q + 1)(n - 3)$  und von  $\alpha$  unabhängig; sie lassen sich durch homogene Ausdrücke der  $(2q + 1)^{\text{ten}}$  Dimension in den adjungirten Functionen  $\varphi$  von  $n - 3^{\text{ten}}$  Grade darstellen. Bestimmt man die Coefficienten  $l_k$  so, dass der Ausdruck (17) für  $x = x_1, \dots, x_q$  verschwindet, so hat man den Zähler  $\Psi_\mu(x, x_1, \dots, x_q)$  in (9). Da  $(\alpha x)$  verschwindet für  $x = \alpha$ , so erhält man  $\Psi_\mu(\alpha, x_1, \dots, x_q)$  in Form einer Determinante, nämlich:

$$\Psi_\mu(\alpha, x_1, \dots, x_q) = \sqrt{R_\mu(\alpha)} \prod_{k=1}^q \sqrt{(\alpha x_k)} \sum \pm \sqrt{T_\mu^1(x_1)} \dots \sqrt{T_\mu^q(x_q)}.$$

Ebenso ist mit  $\Psi_\nu(x)$  und  $\Psi_\nu(x, x_1, \dots, x_q)$  zu verfahren. Setzt man nunmehr in (9)  $x = \alpha$ , also an Stelle von (1) ( $h = 1, \dots, p$ ):

$$(18) \quad V_h = \sum_{k=1}^q \int_{\alpha_k}^{x_k} du_h \quad (q = q(2p - 2)),$$

so erhält man statt (9):



$$\frac{\vartheta_u(V_1, \dots, V_p)}{\vartheta_v(V_1, \dots, V_p)} = C_{uv} \frac{\sum \pm \sqrt{T'_u(x_1)} \dots \sqrt{T'_u(x_q)}}{\sum \pm \sqrt{T'_v(x_1)} \dots \sqrt{T'_v(x_q)}} \quad (19)$$

wo  $C_{uv}$  wieder wie früher bestimmt werden kann. Für  $q = 1$  hat man den Satz<sup>1)</sup>:

(III) Der Quotient zweier Thetafunctionen mit beliebigen, zweitheiligen Charakteristiken  $\mu$  und  $\nu$ , in welchen die Argumente  $2p - 2$ -gliedrige Integralsummen 1. Gattung (18) sind, deren obere Grenzpunkte  $x_k$  beliebig, deren untere Grenzpunkte  $\alpha_k$  die 0<sup>1</sup> Punkte einer  $\varphi$ -Function sind, lässt sich symmetrisch in den Coordinaten der Punkte  $x_i$  darstellen durch Wurzelfunctionen, die sich allein aus Wurzelfunctionen  $\sqrt{\varphi_v}$  zusammensetzen.

Ist  $q = 1$ ,  $q = 2p - 2$ , sind  $\mu$  und  $\nu$  ungrade Charakteristiken,  $\sqrt{\varphi_u}$  und  $\sqrt{\varphi_v}$  die zugehörigen Wurzelfunctionen und setzt man

$$\sqrt{\frac{T'_u(x)}{\varphi_u(x)}} = M_i(x), \quad \sqrt{\frac{T'_v(x)}{\varphi_v(x)}} = N_i(x), \quad (20)$$

so dass  $M_i(x)$  und  $N_i(x)$  rationale Functionen sind, die sich allein aus  $\varphi$ -Functionen zusammensetzen lassen, so geht unter Voraussetzung von (18) die Gleichung (19) über in

$$\frac{\vartheta_u(V_1, \dots, V_p)}{\vartheta_v(V_1, \dots, V_p)} = C_{uv} \frac{\sum \pm M_1(x_1) \dots M_q(x_q)}{\sum \pm N_1(x_1) \dots N_q(x_q)} \sqrt{\frac{\varphi_u(x_1) \dots \varphi_u(x_q)}{\varphi_v(x_1) \dots \varphi_v(x_q)}} \quad (21)$$

Handelt es sich nun um die Lösung des Jacobi'schen Umkehrproblems (1) § 30, so kann man jede der entwickelten Gleichungen (14), (16), (19) oder (21) verwenden, indem man einen Theil der oberen Grenzpunkte  $x_i$  mit unteren Grenzpunkten zusammenfallen lässt. Die Formel (19) oder (21) hat den Vorzug, dass sie nur Quotienten von  $\varphi$ -Functionen, also nur Elemente enthält, die der eindeutigen Transformation gegenüber invariant sind (§ 23). Wir werden

1) Die Formel (19) wurde zuerst von Herrn Weber für  $p = 3$ ,  $q = 4$  (Theorie der Ab. F.  $p = 3$ , § 24, 1876) aufgestellt und zur Lösung des Umkehrproblems verwerthet; später von Herrn Nöther für  $q = 2p - 2$  (Math. Ann. Bd. 28, S. 367, 1887) und von Herrn Klein für  $q = q(2p - 2)$  (Math. Ann. Bd. 36, S. 40, 1890) verallgemeinert. Für die obige Herleitung aus allgemeineren Formeln vgl. H. Stahl, Journ. für Math. Bd. 111, S. 106, 1892. Es ist von Interesse, dass dieselbe Formel für  $q = 2p - 2$  und für ungrade Charakteristiken  $\mu$  und  $\nu$  in der obigen Fassung (21) aber etwas anderer Herleitung bereits von Riemann in einer Vorlesung Winter 1861/62 (s. Vorwort) entwickelt wurde.

indess in den folgenden §§ die Gleichung (14) zu Grunde legen, weil sich an ihr die weitere Discussion des Umkehrproblems in ihren Grundzügen einfacher und symmetrischer entwickeln lässt, als an der Gleichung (19) oder (21). Zudem schliesst sich diese Behandlung am engsten an die Theorie der elliptischen Functionen an.

Setzt man in (13) und (14)  $x = \alpha$  und bildet alsdann die Gleichung (14) für  $p$  verschiedene Charakteristiken  $\mu_1, \dots, \mu_p$  und dieselbe Charakteristik  $\nu$ , so hat man, in Verbindung mit

$$(22) \quad F(x_1) = 0, \dots, F(x_p) = 0,$$

$2p$  Gleichungen, aus denen sich auf algebraischem Wege die Coordinaten der  $p$  Punkte  $x_1, \dots, x_p$  als Functionen der Argumente  $V_h$  (oder  $U_h$  in (1) § 30) darstellen lassen. Diese Darstellung muss eindeutig sein, da die Lösung des Umkehrproblems (13) nach X § 28 eindeutig ist.

Wir erwähnen noch eine andere Bestimmungsweise<sup>1)</sup> der  $p$  Punkte  $x_i$  als Functionen der Argumente  $U_h$  aus den Gleichungen (14). Dieselbe gründet sich auf das Additionstheorem der Thetafunctionen, das wir, ohne einen Beweis zu geben, voraussetzen. Versteht man unter  $u_h$  und  $U_h$  die Werthe (2) und (1) § 30, nachdem in  $U_h$  die unteren Grenzpunkte durch  $\alpha_1^0, \dots, \alpha_p^0$  ersetzt sind, so sind die  $p$  Punkte  $x_i$  in den Gleichungen (1) § 30 gerade die  $p$  0<sup>ten</sup> Punkte der Function  $\vartheta(u - U)$ , betrachtet als Function von  $x$  (I § 29). Nun gibt das Additionstheorem der Thetafunctionen Gleichungen der Form ( $i = 1, \dots, 2^p$ ):

$$(23) \quad \vartheta(u - U) \vartheta_x(u + U) = \sum_i A_i \vartheta_{\lambda_i}(U) \vartheta_{x\lambda_i}(U) \vartheta_{\mu_i}(u) \vartheta_{x\mu_i}(u),$$

in welchen  $A_i$  constante Coefficienten und  $x, \lambda_i, \mu_i$  zweitheilige Charakteristiken sind. Bildet man die in die rechte Seite eingehenden Thetafunctionen mit den Argumenten  $u$  aus (5) § 30 (indem man für  $u$  der Reihe nach  $\mu_i$  und  $x\mu_i$  setzt, während die Charakteristik  $\nu$  im Nenner bleibt), so bestimmen sich die  $p$  Punkte  $x_i$  aus einer Gleichung der Form ( $i = 1, \dots, 2^p$ ):

$$(24) \quad \sum_i B_i \vartheta_{\lambda_i}(U) \vartheta_{x\lambda_i}(U) \psi_{\mu_i}(x) \overline{\psi_{x\mu_i}(x)} = 0,$$

in welcher die Argumente  $U_1, \dots, U_p$  gegebene Grössen sind. Diese Gleichung lässt sich mit Hilfe von  $F' = 0$  rational machen in den Coordinaten des Punktes  $x$ . Denn dividirt man die linke Seite durch

1) Weber, Ab. F. ( $p = 3$ ) § 26.

die Wurzelfunction irgend eines Gliedes, so hat man eine in  $x$  rationale Function, die in je  $2p$  Punkten  $= 0^1$  und  $= \infty^1$  wird. Auf rationale Form gebracht, stellt (24) eine Curve dar, die  $F' = 0$  in den  $p$  Punkten  $x_i$  und ausserdem in  $p$  andern Punkten schneidet. Die letzteren sondert man ab, indem man die Gleichung (24) für zwei verschiedene Charakteristiken  $\alpha$  bildet; die gemeinsamen Schnittpunkte dieser beiden Gleichungen mit  $F' = 0$  sind die gesuchten Punkte  $x_i$ . Eine dieser Gleichungen, nämlich die für  $\alpha = 0$  gebildete, ist bereits rational.

Zur vollständigen Lösung des Umkehrproblems sind noch gewisse Bestimmungen zu leisten, die bei der Aufstellung der Gleichung (9) und der aus ihr folgenden Gleichungen (14), (16), (19) oder (21) vorausgesetzt wurden, nämlich

- 1) die algebraische Bestimmung der Wurzelfunctionen  $\sqrt{\psi_\mu(x)}$  und ihre Zuordnung zu den zweitheiligen Charakteristiken  $\mu$  (s. § 32);
- 2) die Aufstellung der Normalintegrale 1. Gattung und die Bestimmung der Thetamoduln durch die Klassenmoduln (s. § 33).

### § 32. Bestimmung der Berührungsfuctionen $\psi_\mu$ . Zuordnung zu den Thetacharakteristiken $\mu$ .

Die erste der Fragen, die nach der Schlussbemerkung von § 31 für das Umkehrproblem noch zu lösen sind, ist eine algebraische; sie betrifft die Herstellung des den zweitheiligen Charakteristiken  $\mu$  entsprechenden Systemes von Berührungscurven  $\psi_\mu$  und die Zuordnung derselben zu den Thetafunctionen  $\vartheta_\mu$  bei gegebenem Querschnittsystem. Wir knüpfen zur Lösung dieser Aufgabe<sup>1)</sup> an die Betrachtungen des § 29 an. Nach denselben hat man, um die Functionen  $\psi_\mu$  zu finden, in dem willkürlich gewählten Punkte  $\alpha$  die Tangente an  $F' = 0$  zu ziehen und durch die übrigen  $n - 2$  Schnittpunkte  $\varepsilon$  derselben, sowie durch die  $r$  Doppelpunkte von  $F'$  alle Curven  $\psi$  vom Grade  $n - 2$  zu legen, die  $F = 0$  in  $p$  Punkten berühren. Eine Curve des  $n - 2^{\text{ten}}$  Grades, die durch die  $r$  Doppelpunkte  $\delta$  geht, hat nach Satz II § 10 noch  $n(n - 2) - 2r - p + 1$  oder, da nach (6) § 5  $(n - 1)(n - 2) = 2p + 2r$  ist, noch  $p + n - 1$  nicht homogene, lineare Coefficienten. Legt man diese Curve noch durch die  $n - 2$  Punkte  $\varepsilon$ , so bleiben  $p + 1$  solcher Coefficienten oder die Function  $\psi$  lässt sich durch

1) Clebsch u. Gordan, Ab. F. S. 233 u. 266 (1866). H. Stahl, Diss. Berlin. S. 17 ff. (1882).

$p + 1$  linear unabhängige Functionen derselben Art  $\psi^{(0)}, \psi^{(1)}, \dots, \psi^{(p)}$  darstellen in der Form

$$(1) \quad \psi = \psi^{(0)} + r_1 \psi^{(1)} + \dots + r_p \psi^{(p)}.$$

Die Functionen  $\psi^{(i)}$  sind nach § 9 S. 74 rational gebildet in den Coefficienten von  $F = 0$  und den Coordinaten des Punktes  $\alpha$ . Die Coefficienten  $r_1, \dots, r_p$  heissen das Coefficientensystem von  $\psi$ , bezogen auf  $\psi^0, \psi^1, \dots, \psi^{(p)}$ . Dasselbe ist so zu bestimmen, dass die  $2p$  Schnittpunkte der Curve  $\psi = 0$  mit  $F = 0$  paarweise zusammenfallen. Hierzu bilde man die drei Gleichungen

$$(2) \quad \psi = 0, \quad F = 0, \quad p + \lambda q = 0,$$

wo die letzte Gleichung ein beliebiges Strahlenbüschel mit dem Parameter  $\lambda$  vorstellt und unterwerfe dieselben drei Eliminationsprocessen.

Erstens eliminire man die Coordinaten des variablen Punktes  $x$ . Dies gibt eine Gleichung in  $\lambda$ , welche die Parameter der nach den Schnittpunkten von  $F$  und  $\psi$  gehenden Strahlen bestimmt. Nach Absonderung der bekannten, den festen Punkten  $\delta$  und  $\varepsilon$  entsprechenden Factoren ist diese Gleichung vom Grade  $2p$  in  $\lambda$ , also von der Form

$$(3) \quad A = \lambda^{2p} + A_1 \lambda^{2p-1} + \dots + A_{2p-1} \lambda + A_{2p} = 0,$$

wo die Coefficienten  $A$  rationale Functionen der  $p$  Grössen  $r_1, \dots, r_p$  in (1) sind. Da die  $2p$  durch (3) bestimmten Strahlen paarweise zusammenfallen sollen, so muss  $A$  die zweite Potenz eines Ausdrucks  $\mathfrak{L}$  vom Grade  $p$  in  $\lambda$  sein von der Form

$$(4) \quad \mathfrak{L} = \lambda^p + a_1 \lambda^{p-1} + \dots + a_{p-1} \lambda + a_p.$$

Diese Bedingung gibt  $2p$  Gleichungen zwischen den Coefficienten von  $\mathfrak{L}$  und  $A$  oder  $2p$  Gleichungen, in welche die Coefficienten  $a_i$  von (4) und die Coefficienten  $r_i$  von (1) rational eingehen. Man eliminire zweitens aus diesen  $2p$  Gleichungen zwischen  $a_i$  und  $r_i$  die  $p$  Grössen  $a_i$  und erhält dann  $p$  Gleichungen, die rational in den  $r_i$  sind. Zu diesen  $p$  Gleichungen füge man der Symmetrie halber die Gleichung

$$(5) \quad r = \gamma_1 r_1 + \dots + \gamma_p r_p,$$

hinzuzusetzen, wo die  $\gamma_i$  beliebige Zahlenwerthe sind und eliminire

drittens die  $p$  Grössen  $r_i$ ; dann bleibt eine einzige Gleichung in  $r$  übrig

$$(6) \quad R = 0,$$

deren Coefficienten rational gebildet sind in den Coefficienten von  $F = 0$  und in den Coordinaten des Punktes  $\alpha$ .

Die Bestimmung des Systems der Berührungsfuctionen  $\psi_\mu$  hängt nun lediglich von der Lösung der Gleichung  $R = 0$  (6) ab. Denn geht man den beschriebenen Weg zurück, so ergibt sich Folgendes:

- 1) Jeder Wurzel  $r^{(\mu)}$  von  $R = 0$  entspricht eindeutig eine Berührungsfuction  $\psi_\mu$ . Da es  $2^{2p}$  solcher Functionen gibt (S. 239), so ist die Gleichung  $R = 0$  vom Grade  $2^{2p}$  in  $r$ .

In der That drückt sich im Laufe der dritten Elimination das Coefficientensystem  $r_1^{(\mu)}, \dots, r_p^{(\mu)}$  von  $\psi_\mu$  rational durch die zugehörige Wurzel  $r^{(\mu)}$  von  $R = 0$  aus.

Man sieht zugleich, dass sich  $r^{(\mu)}$  stets auf mannigfache Weise rational und symmetrisch durch das zugehörige Coefficientensystem  $r_1^{(\mu)}, \dots, r_p^{(\mu)}$  von  $\psi_\mu$  darstellen lässt.

- 2) Jeder Wurzel  $r^{(\mu)}$  von  $R = 0$  oder jeder Berührungscurve  $\psi_\mu$  entspricht ferner eindeutig eine Gleichung  $\mathfrak{L}_\mu = 0$  vom Grade  $p$  in  $\lambda$ .

Denn im Laufe der zweiten Elimination stellen sich die  $p$  Coefficienten  $\alpha_i^{(\mu)}$  von  $\mathfrak{L}_\mu = 0$  rational dar durch die  $p$  Grössen  $r_1^{(\mu)}, \dots, r_p^{(\mu)}$ , also auch rational durch die eine Wurzel  $r^{(\mu)}$ .

Hieraus folgt, dass auch die rationalen und symmetrischen Functionen der  $p$  Wurzeln  $\lambda_1^{(\mu)}, \dots, \lambda_p^{(\mu)}$  von  $\mathfrak{L}_\mu = 0$  rationale Functionen von  $r^{(\mu)}$  sind.

- 3) Jeder der  $p$  Wurzeln  $\lambda_1^{(\mu)}, \dots, \lambda_p^{(\mu)}$  von  $\mathfrak{L}_\mu = 0$  endlich entspricht eindeutig einer der  $p$  Berührungspunkte  $\alpha_1^{(\mu)}, \dots, \alpha_p^{(\mu)}$  der Curve  $\psi_\mu$ .

Denn im Laufe der ersten Elimination ergeben sich die Coordinaten eines solchen Berührungspunktes  $\alpha_i^{(\mu)}$  als rationale Functionen des zugehörigen Parameters  $\lambda_i^{(\mu)}$  und der  $p$  Coefficienten  $r_1^{(\mu)}, \dots, r_p^{(\mu)}$  von  $\psi_\mu$  oder auch nach 1) als rationale Functionen von  $\lambda_i^{(\mu)}$  und der Wurzel  $r^{(\mu)}$ . Es stellen sich also die rationalen und symmetrischen Functionen der Coordinaten der  $p$  Berührungspunkte  $\alpha_1^{(\mu)}, \dots, \alpha_p^{(\mu)}$  der Curve  $\psi_\mu$  rational durch die Wurzel  $r^{(\mu)}$  und durch die rationalen und symmetrischen Functionen der  $p$  Wurzeln  $\lambda_1^{(\mu)}, \dots, \lambda_p^{(\mu)}$  oder nach 2) auch rational durch die Wurzel  $r^{(\mu)}$  allein dar.

Umgekehrt lässt sich auf unendlich viele Arten jede rationale Function von  $r^{(\mu)}$ , wie oben durch das zugehörige Coefficientensystem  $r_1^{(\mu)}, \dots, r_p^{(\mu)}$ , so auch durch die Coordinaten der  $p$  Berührungspunkte  $\alpha_1^{(\mu)}, \dots, \alpha_p^{(\mu)}$  der Curve  $\psi_\mu$  rational und sym-

metrisch darstellen. Wir drücken dies, indem wir eine rationale Function durch  $fr$ , eine rationale und symmetrische Function durch  $frs$  bezeichnen, aus durch die Gleichungen:

$$(7) \quad \begin{cases} frs(\alpha_1^{(u)}, \dots, \alpha_p^{(u)}) = fr(r^{(u)}); \\ r^{(u)} = Frs(r_1^{(u)}, \dots, r_p^{(u)}) = \Phi rs(\alpha_1^{(u)}, \dots, \alpha_p^{(u)}). \end{cases}$$

Für die Bildung des Umkehrproblems ist die Kenntniss der einzelnen Berührungspunkte einer Curve  $\psi_\mu$  und folglich auch die Lösung der Gleichung  $\mathfrak{L}_\mu = 0$  nicht nöthig; es handelt sich dort nur um rationale und symmetrische Functionen dieser Berührungspunkte.

Diese Betrachtungen erhalten eine schärfere Fassung, wenn man die Fälle unterscheidet, wo die zweitheilige Charakteristik  $\mu$  gerade oder ungrade ist. Es wurde in § 29 gezeigt, dass die einer ungraden Charakteristik  $\nu$  entsprechende Function  $\psi_\nu(x)$  von der Form  $(\alpha x) \varphi_\nu(x) = 0$  ist, wo  $(\alpha x) = 0$  die Gleichung der Tangente im Punkte  $\alpha$  und  $\varphi_\nu(x) = 0$  eine von  $\alpha$  ganz unabhängige, der ungraden Charakteristik  $\nu$  zugeordnete, adjungirte Curve vom  $n - 3^{\text{ten}}$  Grade ist, die  $F = 0$  in  $p - 1$  Punkten  $\alpha_1^{(v)}, \dots, \alpha_{p-1}^{(v)}$  berührt. Hieraus folgt, dass die Gleichung  $R = 0$  vom Grade  $2^{2p}$  in  $r$  in zwei Gleichungen zerfallen muss.

Die erste Gleichung  $R_1 = 0$  ist entsprechend der Zahl der geraden Charakteristiken (S. 239) vom Grade  $2^{p-1}(2^p + 1)$  in  $r$  und gibt die den geraden Charakteristiken  $\mu$  zugeordneten Functionen  $\psi_\mu$ ; ihre Coefficienten enthalten rational die Coordinaten des Punktes  $\alpha$ . Für die Gleichung  $R_1 = 0$  gelten ohne Aenderung die obigen Betrachtungen; man hat demnach den Satz:

(1a) Die algebraische Bestimmung des Systems der Berührungsfunktionen  $\psi_\mu$ , die den geraden, zweitheiligen Charakteristiken  $\mu$  entsprechen, hängt ab von der Lösung der Gleichung  $R_1 = 0$  vom Grade  $2^{p-1}(2^p + 1)$  in  $r$ , deren Coefficienten rational gebildet sind in den Coefficienten der Gleichung  $F = 0$  und den Coordinaten des Punktes  $\alpha$ . Durch je eine Wurzel  $r^{(u)}$  dieser Gleichung drücken sich rational aus:

- 1) Die Coefficienten  $r_1^{(u)}, \dots, r_p^{(u)}$  der zugehörigen Berührungsfunktion  $\psi_\mu$ ,
- 2) die rationalen und symmetrischen Functionen der  $p$  Berührungspunkte  $\alpha_1^{(u)}, \dots, \alpha_p^{(u)}$  der Curve  $\psi_\mu$ .

In diese Darstellungen gehen die Coefficienten von  $F = 0$  und ausserdem die Coordinaten des Punktes  $\alpha$  in rationaler Weise ein.

Die zweite Gleichung  $R_2 = 0$  ist, entsprechend der Zahl der ungraden Charakteristiken (S. 239), vom Grade  $2^{p-1}(2^p - 1)$  in  $r$  und liefert die den ungraden Charakteristiken  $\nu$  zugeordneten Functionen  $\varphi_\nu$ . Die Coefficienten von  $R_2 = 0$  sind unabhängig von den Coordinaten des Punktes  $\alpha$ .

Um das System der Berührungscurven  $\varphi_\nu$  direct zu erhalten, hat man nur die Gleichung (1) zu ersetzen durch

$$\varphi = \varphi^{(0)} + r_1 \varphi^{(1)} + \dots + r_{p-1} \varphi^{(p-1)}, \quad (8)$$

wo die  $\varphi^{(i)}$   $p$  linear unabhängige, adjungirte Functionen vom  $n - 3^{\text{ten}}$  Grade vorstellen, deren Coefficienten nach § 9 rational in den Coefficienten von  $F$  gebildet sind. Dann erhält man durch dieselbe Behandlung wie oben statt  $A = 0$  eine Gleichung  $A_2 = 0$  vom Grade  $2p - 2$  in  $\lambda$  oder statt  $\mathfrak{L} = 0$  eine Gleichung  $\mathfrak{L}_2 = 0$  vom Grade  $p - 1$  in  $\lambda$ . Setzt man endlich statt (5)  $r = \gamma_1 r_1 + \dots + \gamma_{p-1} r_{p-1}$ , so ergibt sich durch Elimination der  $r_i$  die Gleichung  $R_2 = 0$  in  $r$  vom Grade  $2^{p-1}(2^p - 1)$ . Jeder Wurzel  $r^{(\nu)}$  dieser Gleichung entspricht eindeutig eine Berührungsfuction  $\varphi_\nu$  mit den Berührungspunkten  $\alpha_1^{(\nu)}, \dots, \alpha_{p-1}^{(\nu)}$ . Dabei ist

$$\left. \begin{aligned} f r s(\alpha_1^{(\nu)}, \dots, \alpha_{p-1}^{(\nu)}) &= f r(r^{(\nu)}; \\ r^{(\nu)} = F r s(r_1^{(\nu)}, \dots, r_{p-1}^{(\nu)}) &= \Phi r s(\alpha_1^{(\nu)}, \dots, \alpha_{p-1}^{(\nu)}) \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Für die Gleichung  $R_2 = 0$  gilt daher der Satz:

(Ib) Die algebraische Bestimmung des Systems der Berührungsfuctionen  $\varphi_\nu$ , die den ungraden Charakteristiken  $\nu$  entsprechen, hängt ab von der Lösung einer Gleichung  $R_2 = 0$  vom Grade  $2^{p-1}(2^p - 1)$  in  $r$ , deren Coefficienten rational gebildet sind in den Coefficienten von  $F = 0$ . Durch je eine Wurzel  $r^{(\nu)}$  dieser Gleichung drücken sich rational aus:

- 1) Die Coefficienten  $r_1^{(\nu)}, \dots, r_{p-1}^{(\nu)}$  der zugehörigen Berührungsfuction  $\varphi_\nu$ ,
- 2) die rationalen und symmetrischen Functionen der  $p - 1$  Berührungspunkte  $\alpha_1^{(\nu)}, \dots, \alpha_{p-1}^{(\nu)}$  der Curve  $\varphi_\nu$ .

In diese Darstellungen gehen nur noch die Coefficienten von  $F = 0$  in rationaler Weise ein.

Aus den vorstehenden Sätzen zieht man Folgerungen über die Abhängigkeit der Wurzeln  $r^{(\nu)}$  der Gleichung  $R = 0$  von einander und über die Beziehungen der zugehörigen Wurzelfunctionen  $\sqrt{\psi_\mu}$  zu einander<sup>1)</sup>.

1) H. Stahl, l. c. S. 20.

Es seien, wie in § 30,

(10)  $\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_{2\lambda+1}$  eine gerade Anzahl von Charakteristiken,

(11)  $r^{(\mu_0)}, r^{(\mu_1)}, \dots, r^{(\mu_{2\lambda+1})}$  die entsprechenden Wurzeln von  $R = 0$ ,

(12)  $\psi_{\mu_0}, \psi_{\mu_1}, \dots, \psi_{\mu_{2\lambda+1}}$  die entsprechenden Functionen  $\psi_{\mu}$ ,

(13)  $r_i^{(\mu_0)}, r_i^{(\mu_1)}, \dots, r_i^{(\mu_{2\lambda+1})}$  die Coefficientensysteme derselben,

(14)  $\alpha_i^{\mu_0}, \alpha_i^{\mu_1}, \dots, \alpha_i^{\mu_{2\lambda+1}}$  die Systeme von Berührungspunkten derselben.

Setzt man voraus, dass die Summe der Charakteristiken (10) congruent 0 sei, also

$$(15) \quad \mu_0 \mu_1 \dots \mu_{2\lambda+1} \equiv 0 \pmod{2} \quad (\lambda > 0)$$

und betrachtet demgemäss die  $2\lambda + 1$  ersten Charakteristiken (10) als unabhängig, die letzte  $\mu_{2\lambda+1}$  als abhängig, ebenso in (11) bis (14) die letzten Werthsysteme  $r^{(\mu_{2\lambda+1})}$ ,  $\psi_{\mu_{2\lambda+1}}$ ,  $r_i^{(\mu_{2\lambda+1})}$ ,  $\alpha_i^{\mu_{2\lambda+1}}$  als abhängige, die andern als unabhängige Elemente und berücksichtigt man, dass nach (17) § 30 das Product der zu den Functionen (12) gehörigen Wurzelfunctionen eine ganze, rationale Function der Coordinaten von  $x$  ist, nämlich

$$(16) \quad \sqrt{\psi_{\mu_0} \psi_{\mu_1} \dots \psi_{\mu_{2\lambda+1}}} \equiv P(x, \alpha_i^{\mu_0}, \dots, \alpha_i^{\mu_{2\lambda}}),$$

so ergibt sich Folgendes:

Nach (16) ist jede rationale und symmetrische Function der Coordinaten der  $p$  Punkte  $\alpha_i^{\mu_{2\lambda+1}}, \dots, \alpha_p^{\mu_{2\lambda+1}}$  des letzten Punktsystems in (14) eine rationale Function der Coefficienten in  $P$  oder auch eine rationale und symmetrische Function der Coordinaten eines jeden der  $2\lambda + 1$  ersten Punktsysteme in (14). Nach den Gleichungen (7) ist also die letzte Wurzel  $r^{(\mu_{2\lambda+1})}$  in (11) eine rationale und symmetrische Function der übrigen  $2\lambda + 1$  Wurzeln  $r^{(\mu_i)}$  und die  $p$  Coefficienten  $r_i^{(\mu_{2\lambda+1})}$  ( $i = 1, \dots, p$ ) der letzten Function  $\psi_{\mu_{2\lambda+1}}$  sind rationale und symmetrische Functionen eines jeden der Coefficientensysteme  $r_i^{(\mu_0)}, \dots, r_i^{(\mu_{2\lambda})}$  der Functionen  $\psi_{\mu_0}, \dots, \psi_{\mu_{2\lambda}}$ . Trennt man wieder die Fälle, wo die Charakteristiken (10) gerade oder ungrade sind, so folgen die Sätze:

(IIa) Hat man eine gerade Anzahl  $2\lambda + 2$  von geraden Charakteristiken (10), deren Summe  $\equiv 0$  ist (mod 2), so drückt sich jede der zugehörigen Wurzeln  $r^{(\mu_0)}, \dots, r^{(\mu_{2\lambda+1})}$  der Gleichung  $R_1 = 0$  rational und symmetrisch durch die  $2\lambda + 1$  übrigen Wurzeln aus und das Coefficientensystem



jeder der zugehörigen Functionen  $\psi_{\mu_0}, \dots, \psi_{\mu_{2\lambda+1}}$  rational und symmetrisch durch die Coefficientensysteme der  $2\lambda + 1$  übrigen  $\psi$ -Functionen. In diese Darstellungen gehen die Coefficienten von  $F=0$  und ausserdem die Coordinaten des Punktes  $\alpha$  in rationaler Weise ein.

(IIb) Hat man eine gerade Anzahl  $2\lambda + 2$  von ungraden Charakteristiken, deren Summe  $\equiv 0$  ist (mod 2), so drückt sich jede der zugehörigen Wurzeln von  $R_2 = 0$  rational und symmetrisch durch die übrigen  $2\lambda + 1$  Wurzeln aus und das Coefficientensystem jeder der zugehörigen Functionen  $\varphi$  rational und symmetrisch durch die Coefficientensysteme der  $2\lambda + 1$  übrigen Functionen  $\varphi$ . In diese Darstellungen gehen nur noch die Coefficienten von  $F=0$  in rationaler Weise ein.

Diese Sätze enthalten alle möglichen, rationalen Beziehungen zwischen den Wurzeln von  $R_1 = 0$  (oder  $R_2 = 0$ ) und ebenso zwischen den Coefficientensystemen der Berührungsfuctionen  $\psi$  (oder  $\varphi$ ). Da  $\lambda > 0$  (15), so lässt sich niedrigsten Falles eine Wurzel von  $R_1 = 0$  (oder  $R_2 = 0$ ) rational durch drei andere und das Coefficientensystem einer  $\psi$ - (oder  $\varphi$ -) Function durch die Coefficientensysteme von drei anderen  $\psi$ - (oder  $\varphi$ -) Functionen ausdrücken.

Für die vorstehenden Sätze ist wesentlich, dass die Summe einer geraden Anzahl von Charakteristiken (10) congruent 0 ist (mod 2), dass sich also eine dieser Charakteristiken als Summe einer ungraden Anzahl von anderen Charakteristiken darstellt oder, wie man auch sagt, dass sich eine dieser Charakteristiken als wesentliche Combination von andern Charakteristiken darstellt. Besondere Bedeutung gewinnen daher diese Sätze, wenn man solche Systeme von Charakteristiken betrachtet, die die Eigenschaft haben, dass sich jede weitere Charakteristik aus ihnen als wesentliche Combination oder durch eine ungrade Anzahl zusammensetzt. Solche Systeme bestehen aus  $2p + 2$  Charakteristiken und heissen allgemeine Fundamentalsysteme. Wir kommen auf sie im Abschnitt VIII § 41 ausführlicher zurück und führen hier nur das Wichtigste über sie an. Setzt man, wenn  $\mu, \nu, \varrho, \dots$  beliebige, zweitheilige Charakteristiken sind (die Congruenzen im Folgenden sind stets (mod 2) zu nehmen):

$$\left. \begin{aligned} |\mu| &\equiv \sum_i \mu_i \mu'_i, & |\mu, \nu| &\equiv \sum_i (\mu_i \nu'_i \pm \nu_i \mu'_i), \\ |\mu, \nu, \varrho| &\equiv |\nu, \varrho| + |\varrho, \mu| + |\mu, \nu| \equiv |\mu| + |\nu| + |\varrho| + \mu \nu \varrho, \end{aligned} \right\} (17)$$



Um diese Bemerkungen auf unsere Frage anzuwenden, nennen wir das dem Fundamentalsystem (18) von Charakteristiken entsprechende System von Wurzeln der Gleichung  $R = 0$

$$r^{(\mu_0)}, r^{(\mu_1)}, \dots, r^{(\mu_{2p+1})} \quad (24)$$

ein Fundamentalsystem von Wurzeln der Gleichung  $R = 0$ . Dabei entspricht jeder geraden Charakteristik eine Wurzel von  $R_1 = 0$ , jeder ungeraden eine Wurzel von  $R_2 = 0$ . Wir nennen ferner das dem Fundamentalsystem (18) entsprechende System von Berührungsfunktionen  $\psi$

$$\psi_{\mu_0}, \psi_{\mu_1}, \dots, \psi_{\mu_{2p+1}} \quad (25)$$

ein Fundamentalsystem von  $\psi$ -Functionen. Dabei entspricht jeder geraden Charakteristik eine eigentliche Function  $\psi(x)$ , jeder ungeraden eine zerfallende Function  $(ax)\varphi(x)$ .

Es gibt ebensoviele Fundamentalsysteme von Wurzeln der Gleichung  $R = 0$  und Fundamentalsysteme von  $\psi$ -Functionen, wie Fundamentalsysteme von Charakteristiken. Wie jede weitere Charakteristik  $\mu$  sich nach (23) aus einer ungeraden Anzahl von bestimmten Charakteristiken des Systems (18) zusammensetzt, so gehört zu jeder weiteren Wurzel  $r$  von  $R = 0$  eine ungerade Anzahl von bestimmten Wurzeln des Systems (24) und zu jeder weiteren Function  $\psi$  eine ungerade Anzahl von bestimmten Functionen des Systems (25). Nach (IIa) und (IIb) gilt der Satz:

(III) Ein Fundamentalsystem von  $2p + 2$  Wurzeln von  $R = 0$  hat die Eigenschaft, dass sich durch sie alle übrigen Wurzeln von  $R = 0$  rational ausdrücken, und ein Fundamentalsystem von  $2p + 2$  Functionen  $\psi$  hat die Eigenschaft, dass sich durch ihre Coefficientensysteme die Coefficientensysteme alle übrigen Functionen  $\psi$  rational darstellen.

Dieser Satz legt die Frage nahe, ob sich die Fundamentalsysteme der Wurzeln von  $R = 0$  oder die Fundamentalsysteme der  $\psi$ -Functionen nicht rein algebraisch und unabhängig von den Fundamentalsystemen der Charakteristiken definiren lassen. Um dies zu prüfen, gehen wir auf die Gleichungen (19) zurück. Nach ihnen ist ein Fundamentalsystem von Charakteristiken definirt als ein System von  $2p + 2$  Charakteristiken von der Beschaffenheit, dass sich unter je dreien derselben und ihrer Summe, also unter den vier Charakteristiken  $\mu_i, \mu_k, \mu_l, \mu_i\mu_k\mu_l$  entweder eine ungerade und drei gerade oder drei ungerade und eine gerade Charakteristik befinden.

Nun drückt sich nach (III) die zur Charakteristik  $\mu_i \mu_k \mu_l$  gehörige Wurzel von  $R=0$  rational durch die zu den Charakteristiken  $\mu_i, \mu_k, \mu_l$  gehörigen Wurzeln aus. Daher folgt für ein Fundamentalsystem von Wurzeln der Gleichung  $R=0$  der Satz:

- (IV) Fügt man zu drei beliebigen Wurzeln eines Fundamentalsystems diejenige, nicht dem System angehörige, vierte Wurzel von  $R=0$ , die sich durch die drei ersten rational ausdrückt, hinzu, so gehören von diesen vier Wurzeln entweder eine zu  $R_2=0$  und drei zu  $R_1=0$  oder drei zu  $R_2=0$  und eine zu  $R_1=0$ .

Man hat ferner für die  $\psi$ -Functionen nach (17) § 30 die Gleichung

$$(26) \quad \sqrt{\psi_{\mu_i} \psi_{\mu_k} \psi_{\mu_l} \psi_{\mu_i \mu_k \mu_l}} \equiv P(x, \alpha_i^{(u_i)} \alpha_i^{(u_k)} \alpha_i^{(u_l)}),$$

wo die rationale Function  $P$  vom Grade  $2(n-2)$  in  $x$  ist. Hieraus folgt für ein Fundamentalsystem von  $\psi$ -Functionen der Satz:

- (V) Fügt man zu drei beliebigen  $\psi$ -Functionen eines Fundamentalsystems diejenige, nicht dem System angehörige, vierte  $\psi$ -Function, die mit den drei ersten multiplicirt das Quadrat einer rationalen Function  $P$  von dem Grade  $2(n-2)$  gibt, hinzu, so befinden sich unter diesen vier  $\psi$ -Functionen entweder eine oder drei eigentliche und drei oder eine zerfallende  $\psi$ -Functionen.

Man kann diese Eigenschaft der Fundamentalsysteme auch auf die Berührungspunkte der  $\psi$ -Functionen übertragen. Unter den vier Charakteristiken  $\mu_i, \mu_k, \mu_l, \mu_i \mu_k \mu_l$  befinden sich stets entweder eine oder drei ungrade. Ist eine ungrade, so bleibt  $P$  in (26) vom Grade  $2n-4$ ; sind drei ungrade, so reducirt sich, in Folge des Ausscheidens von  $(\alpha x)$  in (26),  $P$  auf den Grad  $2n-5$ . Ebenso würde sich der Grad von  $P$  beim Auftreten von zwei ungraden unter den vier Charakteristiken auf  $2n-5$ , von vier ungraden auf  $2n-6$  reduciren. Die beiden letzten Fälle aber treten nicht ein. Daher folgt für die Berührungspunkte der  $\psi$ -Functionen eines Fundamentalsystems der Satz:

- (VI) Die Berührungspunkte von je drei  $\psi$ -Functionen eines Fundamentalsystems können nicht auf einer Curve vom Grade  $2n-5$  liegen, wenn unter diesen  $\psi$ -Functionen zwei sind, die geraden Charakteristiken entsprechen, und sie können nicht auf einer Curve vom Grade  $2n-6$  liegen, wenn unter den  $\psi$ -Functionen zwei sind, die ungraden Charakteristiken entsprechen.

Um nun die oben aufgeworfene Frage nach einer rein algebraischen Definition eines Fundamentalsystems von Wurzeln der Gleichung  $R = 0$  oder eines Fundamentalsystems von  $\psi$ -Functionen zu beantworten, wäre mit Hilfe der zwischen den Wurzelfunctionen  $\sqrt{\psi_\mu}$  und  $\sqrt{\varphi}$ , bestehenden Relationen (9) § 30 zu untersuchen, ob die in den Sätzen (IV) und (V) angegebenen, nothwendigen Eigenschaften zur Definition solcher Fundamentalsysteme auch hinreichend sind. Diese Untersuchung für allgemeines  $p$  durchzuführen, bietet grosse, algebraische Schwierigkeiten. Wenn aber die Antwort, wie dies für  $p = 3$  der Fall ist, bejahend ausfällt, so lässt sich noch eine weitere wichtige Frage, nämlich die nach der Zuordnung der Berührungsfunktion  $\psi_\mu$  zu den Charakteristiken  $\mu$ , auf eine einfachere Art wie früher beantworten. Wir haben in § 30 S. 243 gesehen, wie sich bei gegebenem, kanonischem Querschnittsystem die  $2^{2\nu}$  Berührungsfunktionen  $\psi_\mu$  auf algebraischem Wege den  $2^{2\nu}$  Thetacharakteristiken  $\mu$  eindeutig zuordnen lassen. Diese Zuordnung ändert sich, sobald man für das ursprüngliche, kanonische Querschnittsystem ein anderes substituiert. Es zeigt sich nun (worauf wir im Abschnitt VIII näher eingehen), dass bei einer solchen Substitution nicht bloss der gerade oder ungrade Charakter einer Thetacharakteristik erhalten bleibt, sondern dass auch jedes Fundamentalsystem von Thetacharakteristiken und folglich auch jedes Fundamentalsystem der Wurzeln von  $R = 0$  und jedes Fundamentalsystem von  $\psi$ -Functionen in ein anderes Fundamentalsystem derselben Grössen übergeht und dass umgekehrt zu jeder Ueberführung eines Fundamentalsystems der genannten Elemente in ein anderes eine entsprechende Substitution von einem kanonischen Querschnittsystem durch ein anderes existirt. Hieraus folgt der Satz:

(VII) Man kann bei der Lösung des Umkehrproblems von vornherein einem beliebigen Fundamentalsystem von Thetacharakteristiken  $\mu$  (18), definirt durch die Relationen (19), ein beliebiges Fundamentalsystem von Berührungsfunktionen  $\psi_\mu$  zuordnen, definirt durch die in Satz V ausgesprochene, rein algebraische Eigenschaft (vorausgesetzt, dass diese als hinreichend zur Definition eines Fundamentalsystems von Berührungsfunktionen  $\psi_\mu$  erkannt ist). Für eine jede solche Zuordnung kann man nachträglich das entsprechende, kanonische Querschnittsystem angeben.

Die letzte Betrachtung setzt uns in den Stand, der Lösung des Umkehrproblems oder dem Satze II § 31 eine andere Form zu geben.

Sei wieder (18) ein Fundamentalsystem von Charakteristiken, (24) das zugehörige Fundamentalsystem von Wurzeln von  $R = 0$  und (25) das zugehörige Fundamentalsystem von  $\psi$ -Functionen. Man kann offenbar alle Charakteristiken als wesentliche Combinationen der  $2p + 1$  ersten Charakteristiken (18) allein, nämlich

$$(27) \quad \mu_0, \mu_1, \dots, \mu_{2p}$$

darstellen, indem man in den Formen (23)  $\mu_{2p+1}$  nach (20) durch  $\mu_{2i+1} \dots \mu_{2p}$ , also durch eine gerade Zahl von Charakteristiken ersetzt, während  $\mu_{2p+1}$  selber sich nach (21) durch die Summe der Charakteristiken (27) darstellt. Demgemäss drücken sich alle Wurzeln von  $R = 0$  rational durch die  $2p + 1$  ersten Wurzeln (24) und die Coefficientensysteme aller  $\psi$ -Functionen rational durch die der  $2p + 1$  ersten Functionen (25) aus.

Nun waren in (1) alle Berührungsfunktionen  $\psi_\mu$  dargestellt durch  $p + 1$  linear unabhängige, adjungirte Functionen  $\psi^{(0)}, \psi^{(1)}, \dots, \psi^{(p)}$  vom Grade  $n - 2$ , die rational in den Coefficienten von  $F = 0$  und den Coordinaten des Punktes  $\alpha$  gebildet sind. Hiernach hat man die den  $2p + 1$  Charakteristiken (27) entsprechenden Berührungsfunktionen  $\psi_\mu$  in der Form ( $i = 0, 1, \dots, 2p$ ):

$$(28) \quad \psi_{\mu_i} = \psi^{(0)} + r_1^{(\mu_i)} \psi^{(1)} + \dots + r_p^{(\mu_i)} \psi^{(p)},$$

wo das Coefficientensystem  $r_1^{(\mu_i)}, \dots, r_p^{(\mu_i)}$  sich nach (1a) rational ausdrückt in den Coefficienten von  $F = 0$ , in den Coordinaten des Punktes  $\alpha$  und in der zur Charakteristik  $\mu_i$  gehörigen Wurzel  $r^{(\mu_i)}$  der Gleichung  $R = 0$ , deren Coefficienten ebenfalls die Coefficienten von  $F$  und die Coordinaten von  $\alpha$  rational enthalten. Eliminirt man aus den  $2p + 1$  Gleichungen (28) die Functionen  $\psi^{(0)}, \psi^{(1)}, \dots, \psi^{(p)}$ , so erhält man  $p$  Gleichungen von der Form ( $m = 1, \dots, p$ ):

$$(29) \quad \psi_{\mu_{p+m}} = r_{0m} \psi_{\mu_0} + \dots + r_{pm} \psi_{\mu_p}.$$

Bezieht man ebenso alle übrigen Functionen des Berührungssystemes  $\psi_\mu$  auf die  $p + 1$  Functionen  $\psi_{\mu_0}, \dots, \psi_{\mu_p}$ , so drücken sich die Coefficientensysteme und ebenso die rationalen und symmetrischen Functionen der Coordinaten der Berührungspunkte einer jeden solchen Function  $\psi_\mu$  rational durch die  $p(p + 1)$  Coefficienten  $r_{im}$  in (29) aus. Dies angewandt auf die Gleichung (14), § 31, gibt folgende Ergänzung des Satzes II § 31:

(VIII) In der Lösung (14) § 31 des Umkehrproblems lassen sich die auf der rechten Seite auftretenden Functionen ausdrücken durch die  $p + 1$  Functionen  $\psi_{\mu_0}, \psi_{\mu_1}, \dots, \psi_{\mu_p}$

ferner alle dabei auftretenden Coefficientensysteme und ebenso die rationalen und symmetrischen Functionen der Berührungspunkte jeder  $\psi$ -Curve rational darstellen durch die Coefficienten von  $F=0$ , die Coordinaten des Punktes  $\alpha$  und die  $p(p+1)$  Coefficienten, welche die linearen Relationen (29) zwischen  $2p+1$   $\psi$ -Functionen eines Fundamentalsystems vermitteln.

Legt man statt der Gleichung (14) § 31 die Gleichung (19) oder (21) § 31 der Lösung des Umkehrproblems zu Grunde, so hat man, statt mit den allgemeinen  $\psi$ -Functionen, nur mit den von  $\alpha$  ganz unabhängigen, für eindeutige Transformation invarianten  $\varphi$ -Functionen zu operiren und wird dem entsprechend zu den Charakteristiken (27) möglichst viel ungrade nehmen. Nun gibt es nach (22) nur für bestimmte Werthe von  $p$  Fundamentalsysteme, die  $2p+1$  ungrade Charakteristiken enthalten. Wohl aber lassen sich für alle Werthe von  $p$  mit Hilfe der Fundamentalsysteme andere Systeme von  $2p+1$  ungraden Charakteristiken bilden, deren wesentliche Combinationen sämtliche Charakteristiken ergeben. Ihnen entsprechen solche Systeme von  $2p+1$  Functionen  $\varphi$ , durch deren Coefficientensysteme sich die Coefficientensysteme aller übrigen  $\varphi$ -Functionen rational ausdrücken. Es würde sich dann noch um die Frage handeln, ob die Gleichung  $F=0$  durch ein solches System von  $2p+1$  Functionen  $\varphi$  eindeutig bestimmt ist und ob sich die Coefficienten von  $F=0$  ebenfalls rational durch die  $p(p+1)$  Coefficienten, welche die linearen Relationen zwischen solchen  $2p+1$   $\varphi$ -Functionen vermitteln, ausdrücken lassen, ob man also diese  $p(p+1)$  Coefficienten allein als das System der Klassenmoduli ansehen kann. Auch diese Untersuchung, die an die Relationen (10) § 30 zwischen den Wurzelfunctionen  $\sqrt[p]{\varphi_r}$  anzuschließen hat, ist bis jetzt nur für  $p=3$  durchgeführt und die Antwort bejahend.

Wir gehen auf die Behandlung des Falles  $p=3$  etwas näher ein.

Für  $p=3$  ist  $F(x)=0$  eine Curve 4. Grades ohne singuläre Punkte ( $n=4$ ;  $r=0$ ); die Zahl der Klassenmoduli (§ 22) ist  $3p-3=6$ . Die den ungraden Charakteristiken  $\nu$  entsprechenden Berührungscurven  $\varphi_\nu(x)=0$  (§ 29) sind vom Grade  $n-3=1$ ; sie berühren  $F=0$  in  $p-1=2$  Punkten; ihre Zahl ist  $2^{p-1}(2^p-1)=28$ . Es sind dies die 28 Doppeltangenten der Curve 4. Ordnung. Für  $p=3$  kann ein Fundamentalsystem nach (22) d. §  $2p+1=7$  ungrade Charakteristiken  $\nu_1, \dots, \nu_7$  enthalten, deren Summe  $=0$  ist. Ihnen entsprechen 7 unter den 28 Doppeltangenten von der Art, dass niemals die Berührungspunkte von dreien derselben auf einem Kegel-

schnitt liegen (Satz VI). Umgekehrt lässt sich zeigen, dass durch 7 solcher Doppeltangenten die Curve  $F = 0$  eindeutig bestimmt ist. Drückt man die 4 letzten Doppeltangenten des Fundamentalsystems durch die 3 ersten aus, so hat man die (29) entsprechenden Gleichungen ( $m = 1, \dots, 4$ ):

$$\psi_{r_{3+m}} = r_{1m} \varphi_{r_1} + r_{2m} \varphi_{r_2} + r_{3m} \varphi_{r_3}$$

mit  $p(p+1) = 12$  Coefficienten. Von diesen kann man die drei letzten  $r_{14}, r_{24}, r_{34}$  gleich 1 setzen. Zwischen den übrigen 9 Coefficienten bestehen, wie die Gleichungen (10) § 30, deren jede für  $p = 3$  die Gleichung  $F = 0$  ersetzen kann, zeigen, drei algebraische Relationen. Die 6 unabhängigen Coefficienten sind die oben erwähnten 6 Klassenmoduln. Durch die 3 Functionen  $\varphi_{r_1}, \varphi_{r_2}, \varphi_{r_3}$  lassen sich nun sämtliche 28 Doppeltangenten  $\varphi_v$  linear ausdrücken; die Coefficienten in dieser Darstellung sind rationale Functionen der 9 Coefficienten  $r_{im}$  oder algebraische Functionen der 6 Klassenmoduln. Zur Lösung des Umkehrproblems hat man die zugehörigen Wurzelfunctionen  $\sqrt{\varphi_v}$  in die Gleichungen (19) oder (21) § 31 einzuführen und die Constante  $C_{\mu v}$  in der früher angegebenen Weise zu bestimmen.

Die Litteratur, die sich auf diese Behandlung des Falles  $p = 3$  bezieht, ist im Wesentlichen folgende. Die Gruppierung der 28 Doppeltangenten der Curve 4. Ordnung ist zuerst untersucht von Hesse, Journ. für Math. Bd. 49, S. 243 u. 273 (1853) und von Steiner (ibid. S. 265). Riemann (Ges. W. S. 459 ff.) hat durch Zuordnung der 28 Doppeltangenten zu den 28 ungraden Thetacharakteristiken die Uebersicht über ihre Gruppierung erleichtert und die Gleichungen der 28 Doppeltangenten oder die linearen Relationen zwischen den Berührungsfunktionen  $\varphi_v$  in einfacher Form aufgestellt. Herr Weber (Ab. Funct.  $p = 3$  S. 85 ff.) vereinfacht die Herleitung noch weiter mit Hilfe der Fundamentalsysteme von 7 Charakteristiken, deren Summe  $\equiv 0$  ist (dort „vollständige“ Systeme genannt) und gibt (l. c. S. 153 ff.) die Einführung der Wurzelfunctionen  $\sqrt{\varphi_v}$  in die Gleichung (19) § 31 mit den zugehörigen Constantenbestimmungen. Herr Schottky (Abriss einer Theorie der Ab. F. von 3 Variabeln, Leipzig 1880) entwickelt die Relationen zwischen den Functionen  $\sqrt{\varphi_v}$  und die Lösung des Umkehrproblems unmittelbar aus dem Additionstheorem der Thetafunctionen.

### § 33. Die Normalintegrale 1. Gattung und die Thetamoduln.

Die zweite Frage, die nach der Schlussbemerkung von § 31 für das Umkehrproblem zu erledigen ist, betrifft die Bestimmung gewisser transcenderter Elemente, nämlich der  $p$  Normalintegrale



1. Gattung  $u_h$  und der Thetamoduln  $a_{hk}$ , die bei der Aufstellung der Formeln in § 31 als gegeben vorausgesetzt wurden. Zur Bestimmung dieser beiden Elemente hätte man, wie in § 15 angegeben wurde,  $p$  beliebige, linear unabhängige Integrale 1. Gattung  $v_1, \dots, v_p$  zu bilden, die Periodicitätsmoduln  $A_{mn}$  und  $B_{mn}$  von  $v_n$  an den Querschnitten  $a_m$  und  $b_m$  durch bestimmte, zwischen den Verzweigungspunkten verlaufende Integrale auszudrücken und durch lineare Combination der  $v$   $p$  neue Integrale  $u_1, \dots, u_p$  herzuleiten, von denen  $u_h$  an den Querschnitten  $a_k$  die Periodicitätsmoduln 0, nur an  $a_h$  den Modul  $\pi i$  hat. Die Integrale  $u_h$  sind alsdann die Normalintegrale 1. Gattung und ihre Periodicitätsmoduln  $a_{kh}$  an den Querschnitten  $b_k$  die Thetamoduln (§ 27 S. 218). Diese Operationen lassen sich in der That bei den hyperelliptischen und ähnlichen, explicite gegebenen Integralen in der angegebenen Weise vollständig durchführen<sup>1)</sup>. Im allgemeinen Falle aber wird man dieselben durch andere zu ersetzen suchen<sup>2)</sup>.

Wir ziehen zunächst einige Folgerungen aus der Gleichung (5) § 30, nämlich

$$\frac{\vartheta_\mu(u_1, \dots, u_p)}{\vartheta_\nu(u_1, \dots, u_p)} = c_{\mu\nu} \sqrt{\frac{\psi_\mu(x)}{\psi_\nu(x)}}, \quad (1)$$

indem wir  $x = \alpha$  setzen. Wir unterscheiden hierbei nach dem Charakter von  $\mu$  und  $\nu$  drei Fälle und ersetzen jedesmal die Gleichung (1) durch Zufügung gewisser Constanten durch eine andere Gleichung, wobei sich nur die Bedeutung der Constanten  $c_{\mu\nu}$  ändert; wir schreiben daher  $e_{\mu\nu}$  statt  $c_{\mu\nu}$ .

1. Fall.  $\mu$  und  $\nu$  sind beide gerade Charakteristiken. Wir schreiben die Gleichung (1) in der Form

$$\frac{\vartheta_\mu(u_1, \dots, u_p)}{\vartheta_\nu(u_1, \dots, u_p)} = e_{\mu\nu} \sqrt{\frac{\psi_\mu(x) \psi_\mu(\alpha)}{\psi_\nu(x) \psi_\nu(\alpha)}}. \quad (2)$$

Die Substitution  $x = \alpha$  ergibt, wenn zur Abkürzung  $\vartheta_\mu(0, \dots, 0) = \vartheta_\mu$  gesetzt wird,

$$\frac{\vartheta_\mu}{\vartheta_\nu} = e_{\mu\nu} \frac{\psi_\mu(\alpha)}{\psi_\nu(\alpha)}. \quad (3)$$

2. Fall.  $\mu$  und  $\nu$  sind beide ungrade Charakteristiken. Dann ist  $\psi_\mu(x) = (\alpha x) \varphi_\mu(x)$  und  $\psi_\nu(x) = (\alpha x) \varphi_\nu(x)$ ; ferner  $\alpha_p^\mu = \alpha$  und  $\alpha_p^\nu = \alpha$  (§ 29). Wir schreiben an Stelle von (1)

1) Vgl. z. B. Prym, Theorie der Functionen in einer zweiblättr. Fläche Zürich 1866. S. 5 ff. Thomae, Ueber eine specielle Klasse Abel'scher Functionen Halle 1877. S. 11 ff.

2) H. Stahl, Diss. Berlin. 1882. S. 30 ff.

$$(4) \quad \frac{\vartheta_\mu(u_1, \dots, u_p)}{\vartheta_\nu(u_1, \dots, u_p)} = e_{\mu\nu} \sqrt{\frac{\overline{\varphi_\mu(x)} \varphi_\mu(\alpha)}{\varphi_\nu(x) \overline{\varphi_\nu(\alpha)}}}.$$

Hier ist  $e_{\mu\nu}$  wie von  $x$  so auch von  $\alpha$  unabhängig, weil die Function der linken wie der rechten Seite für  $x$  und  $\alpha$  symmetrisch ist und  $\varphi_\mu$  und  $\varphi_\nu$  unabhängig von  $\alpha$  sind. Setzt man  $x = \alpha$ , so nimmt die linke Seite die Form  $0:0$  an. Man hat also Zähler und Nenner einzeln nach  $x$  zu differenziren und dann  $x = \alpha$  zu setzen. Mit Hilfe der Bezeichnung ( $i = 1, \dots, p$ ):

$$(5) \quad \left[ \frac{\partial \vartheta_\mu(u_1, \dots, u_p)}{\partial u_i} \right]_{u_1=0, \dots, u_p=0} = \vartheta_\mu^{(i)}$$

und mit Rücksicht auf die aus (10) § 15 hervorgehenden Gleichungen

$$(6) \quad \frac{du_1}{dx} = \frac{f_1(x)}{F'y}, \dots, \frac{du_p}{dx} = \frac{f_p(x)}{F'y}$$

erhält man

$$(7) \quad \frac{\sum_i \vartheta_\mu^{(i)} f_i(\alpha)}{\sum_i \vartheta_\nu^{(i)} f_i(\alpha)} = e_{\mu\nu} \frac{\varphi_\mu(\alpha)}{\varphi_\nu(\alpha)}.$$

Da  $\alpha$  ein ganz beliebiger Punkt der Curve  $F=0$  und  $e_{\mu\nu}$  unabhängig von  $\alpha$  ist, so muss die Gleichung (7) für jeden Punkt der Curve  $F(x)=0$  eine identische Gleichung sein. Folglich hat man für jede ungrade Charakteristik  $\nu$ :

$$(8) \quad \varphi_\nu(x) = a_\nu \sum_i \vartheta_\nu^{(i)} f_i(x),$$

wo  $a_\nu$  eine zu der ungraden Charakteristik  $\nu$  gehörige, von  $\alpha$  unabhängige Constante ist. Durch die Gleichung (8) sind die Functionen  $\varphi_\nu(x)$  in der § 29 (15) angegebenen Form, jede bis auf einen noch zu bestimmenden Factor  $a_\nu$ , dargestellt. Nach (7) und (8) ist  $e_{\mu\nu} = a_\nu : a_\mu$ .

3. Fall.  $\mu$  ist eine gerade,  $\nu$  eine ungrade Charakteristik. Dann ist  $\psi_\nu(x) = (\alpha x) \varphi_\nu(x)$  und  $\alpha_\nu^r = \alpha$ . Hier muss man ausser den  $\psi$ -Functionen noch andere Elemente von  $F(x)=0$  ziehen. Wir schreiben an Stelle von (1)

$$(9) \quad \frac{\vartheta_\mu(u_1, \dots, u_p)}{\vartheta_\nu(u_1, \dots, u_p)} = \frac{e_{\mu\nu}}{\sqrt{(\alpha x)}} \sqrt{\frac{\overline{\psi_\mu(x)} \psi_\mu(\alpha)}{\varphi_\nu(x) \overline{\varphi_\nu(\alpha)}}}.$$

Setzt man  $x = \alpha$ , so verschwinden  $\vartheta_\nu(u_1, \dots, u_p)$  und  $\sqrt{(\alpha x)}$ , jedes in 1. Ordnung. Es handelt sich also um die Werthbestimmung des Quotienten dieser zwei Functionen, wozu eine Entwicklung von

$F(x) = 0$  oder  $F(x, y) = 0$  in der Nähe des Punktes  $\alpha$  nöthig ist. Dieselbe lautet, wenn man die Coordinaten von  $\alpha$  durch  $(\alpha, \beta)$  bezeichnet und der Einfachheit halber  $(\alpha, \beta)$  als einen regulären Punkt der Fläche  $T$  voraussetzt:

$$F(x, y) = (x - \alpha) F'(\alpha) + (y - \beta) F'(\beta) + \frac{1}{2} [(x - \alpha)^2 F''(\alpha, \alpha) + 2(x - \alpha)(y - \beta) F''(\alpha, \beta) + (y - \beta)^2 F''(\beta, \beta)] + \dots$$

Nimmt man nun den Ausdruck  $(\alpha x)$  für die Tangente des Punktes  $\alpha$  in der Form an

$$(\alpha x) = (x - \alpha) F'(\alpha) + (y - \beta) F'(\beta),$$

so hat man in der Umgebung von  $\alpha$

$$V(\alpha x) = \frac{T}{F'(\beta)} (x - \alpha), \quad \left( \frac{dV(\alpha x)}{dx} \right)_{x=\alpha} = \frac{T}{F'(\beta)},$$

wo

$$T^2 = -\frac{1}{2} [F''(\alpha, \alpha) F''(\beta) F'(\beta) - 2F''(\alpha, \beta) F'(\alpha) F'(\beta) + F''(\beta, \beta) F'(\alpha) F'(\alpha)].$$

Ferner ist nach (5) und (6)

$$\left[ \frac{d\vartheta_r(u_1, \dots, u_p)}{dx} \right]_{x=\alpha} = \frac{\sum_{i=1}^p \vartheta_r^{(i)} f_i(\alpha)}{F'(\beta)}.$$

Aus (9) folgt daher, wenn man  $x = \alpha$  setzt,

$$\sum_{i=1}^p \vartheta_r^{(i)} f_i(\alpha) = \frac{T \varphi_r(\alpha) \vartheta_\mu}{e_{\mu r} \psi_\mu(\alpha)}, \quad (10)$$

oder, wenn man von Gleichung (8) Gebrauch macht,

$$\alpha_r = \frac{e_{\mu r} \psi_\mu(\alpha)}{T \vartheta_\mu}. \quad (11)$$

Nach diesen Vorbereitungen gehen wir über zu der allgemeinen Gleichung (14) § 31, nämlich:

$$\frac{\vartheta_\mu(U_1, \dots, U_p)}{\vartheta_\nu(U_1, \dots, U_p)} = C_{\mu\nu} \frac{\varphi_\mu(x, x_1, \dots, x_p)}{\varphi_\nu(x, x_1, \dots, x_p)} \prod_{i=0}^p \frac{\varphi_\nu(x_i)}{\varphi_\mu(x_i)} \sqrt{\frac{\psi_\mu(x_i)}{\psi_\nu(x_i)}}, \quad (12)$$

in welcher ( $h = 1, \dots, p$ ):

$$U_h = \int_{\alpha}^x du_h + \sum_{i=1}^p \int_{\alpha_0^i}^{x_i} du_h. \quad (13)$$

Aus der Bildung der  $\varphi$  als Functionen von  $x$  geht hervor, dass der Quotient

$$\begin{aligned}
 (14a) \quad & \Psi_\mu(x, x_1, \dots, x_p) : \Psi_\mu(x) \\
 & = 0^1 \text{ in den } 2p \text{ Punkten } x_i \text{ und } y_i; \\
 & = \infty^1 \text{ in den } 2p \text{ Punkten } \alpha_i^0 \text{ und } \alpha_i^u
 \end{aligned}$$

und der Quotient

$$\begin{aligned}
 (14b) \quad & \Psi_\nu(x, x_1, \dots, x_p) : \Psi_\nu(x) \\
 & = 0^1 \text{ in den } 2p \text{ Punkten } x_i \text{ und } z_i; \\
 & = \infty^1 \text{ in den } 2p \text{ Punkten } \alpha_i^0 \text{ und } \alpha_i^v
 \end{aligned}$$

ist. Die Punkte  $y_i$  und  $z_i$  waren mit  $x_i$  verbunden durch die Congruenzen (4) § 31, die wir schreiben ( $i, h = 1, \dots, p$ ):

$$(15) \quad \left\{ \begin{aligned} \sum_i \int_{\alpha_i^0}^{y_i} du_h + \sum_i \int_{\alpha_i^0}^{x_i} du_h &\equiv \sum_i \int_{\alpha_i^0}^{\alpha_i^u} du_h \equiv \frac{A_h^u}{2} \\ \sum_i \int_{\alpha_i^0}^{z_i} du_h + \sum_i \int_{\alpha_i^0}^{x_i} du_h &\equiv \sum_i \int_{\alpha_i^0}^{\alpha_i^v} du_h \equiv \frac{A_h^v}{2} \end{aligned} \right.$$

Wir bestimmen zuerst die Constante  $C_{\mu\nu}$  in (12). (Vgl. S. 251.)

Lässt man erstens die Punkte  $x_1, \dots, x_p$  zusammenfallen mit  $\alpha_1^0, \dots, \alpha_p^0$ , so kommt die Gleichung (12) auf die Gleichung (1) zurück. Denn nach (15) fallen alsdann die Punkte  $y_i$  mit  $\alpha_i^u$  und die Punkte  $z_i$  mit  $\alpha_i^v$  zusammen, so dass sich die beiden Quotienten (14a) und (14b) auf Constanten reduciren, die durch die angegebene Substitution vollkommen bestimmt sind.

Lässt man zweitens die Punkte  $x_1, \dots, x_p$  zusammenfallen mit  $\alpha_1^{uv}, \dots, \alpha_p^{uv}$ , die bestimmt sind durch die Congruenzen ( $h = 1, \dots, p$ ):

$$(16) \quad \sum_i \int_{\alpha_i^0}^{\alpha_i^{uv}} du_h \equiv \frac{A_h^u}{2} + \frac{A_h^v}{2},$$

so erhält man abermals die Gleichung (1), nur in reciproker Form. Denn nach (15) und (16) fallen alsdann die Punkte  $y_i$  mit  $\alpha_i^v$ , die Punkte  $z_i$  mit  $\alpha_i^u$  zusammen. Daher wird der Quotient

$$\Psi_\mu(x, x_1, \dots, x_p) : \Psi_\nu(x) : \Psi_\nu(x, x_1, \dots, x_p) : \Psi_\mu(x)$$

als Function von  $x$  gleich  $0^2$  in den  $p$  Punkten  $\alpha_i^v$  und gleich  $\infty^2$  in den  $p$  Punkten  $\alpha_i^u$ . Er geht also, abgesehen von einer Constanten, über in  $\psi_\nu(x) : \psi_\mu(x)$  und die rechte Seite von (12) erhält, abgesehen von

einer Constanten, die Form  $\sqrt{\psi_r(x) : \psi_\mu(x)}$ . Andererseits geht der Thetaquotient der linken Seite in (12) nach (40) § 26 über in

$$\tau_r \vartheta_r(u_1, \dots, u_p) : \tau_\mu \vartheta_\mu(u_1, \dots, u_p),$$

wo  $\tau_r : \tau_\mu$  einen der Werthe  $+1$  oder  $-1$  hat.

Durch die beiden Substitutionen  $x_i = \alpha_i^0$  und  $x_i = \alpha_i^{u,r}$  ( $i=1, \dots, p$ ) ergeben sich also aus (12) zwei Gleichungen der Form (1), nämlich:

$$\frac{\vartheta_\mu(u_1, \dots, u_p)}{\vartheta_r(u_1, \dots, u_p)} = \frac{C_{\mu r}}{G_{r\mu}} \sqrt{\frac{\psi_\mu(x)}{\psi_r(x)}}, \quad \frac{\vartheta_r(u_1, \dots, u_p)}{\vartheta_\mu(u_1, \dots, u_p)} = \frac{C_{\mu r}}{G_{\mu r}} \sqrt{\frac{\psi_r(x)}{\psi_\mu(x)}}. \quad (17)$$

Hier sind  $G_{\mu r}$  und  $G_{r\mu}$  vollkommen bestimmte Ausdrücke, algebraisch und symmetrisch für jedes einzelne System der Berührungspunkte  $\alpha_i^0, \alpha_i^u, \alpha_i^r, \alpha_i^{u,r}$  oder nach (VI) § 20 nur der Punkte  $\alpha_i^0, \alpha_i^u, \alpha_i^r$ , oder endlich nach (7) § 32 algebraisch in den Wurzeln  $r^{(0)}, r^{(u)}$  und  $r^{(r)}$  von  $R=0$ . Vergleicht man aber die Gleichungen (17) mit (1), so folgt  $C_{\mu r} : G_{r\mu} = c_{\mu r}$  und  $C_{\mu r} : G_{\mu r} = 1 : c_{\mu r}$ . Daher ist

$$C_{\mu r}^2 = G_{\mu r} G_{r\mu}, \quad c_{\mu r}^2 = G_{\mu r} : G_{r\mu} \quad (18)$$

und man hat den Satz:

(I) Die Constanten  $c_{\mu r}$  in (1) und  $C_{\mu r}$  in (12) sind bis auf das Vorzeichen algebraisch vollkommen bestimmt, sobald man das System der Berührungsfunktionen  $\psi$  und  $\varphi$  kennt und seine Zuordnung zu den zweitheiligen Charakteristiken. Das Vorzeichen von  $c_{\mu r}$  und  $C_{\mu r}$  ist durch directe Vergleichung der beiden Seiten in (1) und (12) zu ermitteln.

Mit Hilfe der Gleichungen (18) ergeben sich nun Relationen zur Bestimmung der Thetamoduln  $a_{hk}$  und der Normalintegrale 1. Gattung  $u_h$ . Hierzu unterscheiden wir, wie oben, drei Fälle, indem wir die Gleichungen (17) entweder auf die Form (2) oder (4) oder (9) bringen. Da sich hierbei die Bedeutung von  $G$  etwas ändert, ersetzen wir  $G$  durch  $H$ . Ebenso wie die Gleichungen (18), erhält man in jedem der drei Fälle die Relation  $C_{\mu r} : H_{r\mu} = c_{\mu r}$  und  $C_{\mu r} : H_{\mu r} = 1 : c_{\mu r}$ , woraus

$$c_{\mu r}^2 = H_{\mu r} : H_{r\mu}. \quad (19)$$

Vergleicht man diesen Werth mit den früheren Werthen von  $c_{\mu r}$ , so folgt:

1) wenn  $\mu$  und  $\nu$  beide gerade sind, aus (3)

$$\frac{\vartheta_\mu}{\vartheta_\nu} = \frac{\psi_\mu(\alpha)}{\psi_\nu(\alpha)} \sqrt{\frac{H_{\mu\nu}}{H_{\nu\mu}}}, \quad (20)$$

d. i. die algebraische Darstellung des Quotienten zweier geraden Thetafunctionen;

2) wenn  $\mu$  und  $\nu$  beide ungrade sind aus (7) und (8)

$$(21) \quad \frac{a_\nu}{a_\mu} = \sqrt{\frac{H_{\mu\nu}}{H_{\nu\mu}}},$$

d. i. die algebraische Darstellung des Quotienten von zwei der in (8) noch unbestimmt gebliebenen Factoren  $a_\nu$ ;

3) wenn  $\mu$  gerade,  $\nu$  ungrade ist, aus (11)

$$(22) \quad a_\nu = \frac{\psi_\mu(\alpha)}{T \vartheta_\mu} \sqrt{\frac{H_{\mu\nu}}{H_{\nu\mu}}},$$

d. i. die Darstellung des in (8) auftretenden Factors  $a_\nu$  in einer aus transcendenten und algebraischen Elementen gemischten Form.

In den Gleichungen (20) bis (22) müssen die Ausdrücke auf der rechten Seite von  $\alpha$  unabhängig sein, da es die Ausdrücke auf der linken Seite sind. Durch diese Gleichungen wird die Frage nach den Thetamoduln und den Normalintegralen in folgender Weise gelöst:

- (II) Die Thetamoduln  $a_{hk}$  lassen sich aus algebraischen Elementen näherungsweise berechnen mittels der Gleichungen (20); aus den Werthen der  $a_{hk}$  kann man alsdann auch den Werth der Grössen  $\vartheta_\mu$  selber annähernd berechnen.
- (III) Die Zähler  $f_i(x)$  der Normalintegrale  $u_i$  bestimmen sich aus den Gleichungen (8), wenn man die Factoren  $a_\nu$  aus (22) eingeführt hat; die Berührungsfunktionen  $\psi_\mu$  und  $\varphi_\nu$  sind bereits in § 32 bestimmt.

Es schliessen sich noch zwei Bemerkungen an. Die erste derselben bezieht sich auf eine Darstellung der Thetamoduln  $a_{hk}$  und der Quotienten  $a_\mu : a_\nu$  durch die invarianten Klassenmoduln von  $F(x, y) = 0$  (s. § 22). Die Grössen  $a_{hk}$ ,  $a_\mu : a_\nu$  und  $a_\nu$  sind, wie schon bemerkt, unabhängig von dem Punkte  $\alpha$ . Die beiden ersten Elemente sind aber auch unabhängig von einer bestimmten Form der Gleichung  $F(x, y) = 0$ , während der Werth von  $a_\nu$  selber von der Form von  $F(x, y) = 0$  abhängig bleibt. In der That lassen sich die Grössen  $a_{hk}$  und  $a_\mu : a_\nu$  allein durch diejenigen Coefficientensysteme ausdrücken, welche die linearen Beziehungen zwischen den Berührungsfunktionen  $\varphi$  vermitteln. Diese Coefficientensysteme sind aber nach (I) § 23 unabhängig von einer

bestimmten Form von  $F(x, y) = 0$  und die nämlichen für alle Gleichungen, in die  $F = 0$  durch eindeutige Transformation übergeführt werden kann; mit anderen Worten die Grössen  $a_{hk}$  und  $a_\mu : a_\nu$  sind Functionen der invarianten Klassenmoduln.

Um dies zu zeigen<sup>1)</sup>, bilde man für 2mal  $p$  verschiedene, ungrade Charakteristiken  $\mu_h$  und  $\nu_h$  ( $h = 1, \dots, p$ ) die Gleichung (8), indem man setzt (die Summationen in den folgenden Gleichungen sind stets von 1 bis  $p$  zu nehmen):

$$\varphi_{\mu_h} = a_{\mu_h} \sum_i \vartheta_{\mu_h}^{(i)} f_i, \quad \varphi_{\nu_h} = a_{\nu_h} \sum_i \vartheta_{\nu_h}^{(i)} f_i \quad (23)$$

und definiere zwei weitere Functionen des Berührungssystems  $\varphi$  durch die Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} \varphi_\mu &= a_\mu \sum_i \vartheta_\mu^{(i)} f_i = \sum_h r_{\mu_h} \varphi_{\mu_h} = \sum_h s_{\nu_h} \varphi_{\nu_h}, \\ \varphi_\nu &= a_\nu \sum_i \vartheta_\nu^{(i)} f_i = \sum_h \varrho_{\mu_h} \varphi_{\mu_h} = \sum_h \sigma_{\nu_h} \varphi_{\nu_h}, \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

wobei die Coefficienten  $r, s, \varrho, \sigma$  als bekannt vorausgesetzt werden. Durch Einführung der Werthe (23) in die Gleichungen (24) und durch Vergleichung der Coefficienten von  $f_i$  erhält man ( $i, h = 1, \dots, p$ ):

$$\left. \begin{aligned} \sum_h r_{\mu_h} a_{\mu_h} \vartheta_{\mu_h}^{(i)} &= \sum_h s_{\nu_h} a_{\nu_h} \vartheta_{\nu_h}^{(i)} = a_\mu \vartheta_\mu^{(i)}, \\ \sum_h \varrho_{\mu_h} a_{\mu_h} \vartheta_{\mu_h}^{(i)} &= \sum_h \sigma_{\nu_h} a_{\nu_h} \vartheta_{\nu_h}^{(i)} = a_\nu \vartheta_\nu^{(i)}. \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Setzt man zur Abkürzung

$$\sum \pm \vartheta_{\mu_1}^{(1)} \vartheta_{\mu_2}^{(2)} \dots \vartheta_{\mu_p}^{(p)} = \mathcal{A}(\mathbf{M}),$$

und bezeichnet mit  $\mathcal{A}_h(\mathbf{M})_\nu$  diejenige Determinante, die aus  $\mathcal{A}(\mathbf{M})$  hervorgeht, wenn man die Charakteristik  $\mu_h$  durch  $\nu$  ersetzt, so gibt die Auflösung des Systems (25)

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\mathbf{M}) r_{\mu_h} a_{\mu_h} &= a_\mu \mathcal{A}_h(\mathbf{M})_\mu, & \mathcal{A}(\mathbf{N}) s_{\nu_h} a_{\nu_h} &= a_\mu \mathcal{A}_h(\mathbf{N})_\mu, \\ \mathcal{A}(\mathbf{M}) \varrho_{\mu_h} a_{\mu_h} &= a_\nu \mathcal{A}_h(\mathbf{M})_\nu, & \mathcal{A}(\mathbf{N}) \sigma_{\nu_h} a_{\nu_h} &= a_\nu \mathcal{A}_h(\mathbf{N})_\nu. \end{aligned}$$

Durch Elimination von  $a_{\mu_h}$  und  $a_{\nu_h}$  folgt

$$\frac{r_{\mu_h}}{\varrho_{\mu_h}} = \frac{a_\mu}{a_\nu} \frac{\mathcal{A}_h(\mathbf{M})_\mu}{\mathcal{A}_h(\mathbf{M})_\nu}, \quad \frac{s_{\nu_h}}{\sigma_{\nu_h}} = \frac{a_\mu}{a_\nu} \frac{\mathcal{A}_h(\mathbf{N})_\mu}{\mathcal{A}_h(\mathbf{N})_\nu}$$

und hieraus

1) Vgl. Weber, Ab. F.  $p = 3$ . S. 103—110.

$$(26) \quad \frac{r_{\mu h} \sigma_{\nu h}}{\varrho_{\mu h} s_{\nu h}} = \frac{\mathcal{A}_h(M)_\mu \mathcal{A}_h(N)_\nu}{\mathcal{A}_h(M)_\nu \mathcal{A}_h(N)_\mu}, \quad \frac{a_\mu^2}{a_\nu^2} = \frac{r_{\mu h} s_{\nu h}}{\varrho_{\mu h} \sigma_{\nu h}} \frac{\mathcal{A}_h(M)_\nu \mathcal{A}_h(N)_\mu}{\mathcal{A}_h(M)_\mu \mathcal{A}_h(N)_\nu}.$$

Die erste dieser Gleichungen drückt den Quotienten zweier Producte gewisser  $p$ -gliedriger Determinanten, gebildet aus den Ableitungen ungrader Thetafunctionen, durch die Coefficientensysteme der zwischen den Berührungsfunktionen  $\varphi$  bestehenden Gleichungen aus; sie gibt also eine annähernde Bestimmung der Thetamoduli  $a_{hk}$  durch invariante Elemente. Die zweite Gleichung (26) drückt den früher rein algebraisch dargestellten Quotienten  $a_\mu : a_\nu$  ebenfalls durch die Coefficientensysteme der  $\varphi$ -Relationen und durch die zuvor bestimmten Thetamoduli  $a_{hk}$  aus. Verbindet man die letzte Gleichung (26) mit (21), so erhält man eine rein algebraische Darstellung der Quotienten  $\mathcal{A}_h(M)_\mu : \mathcal{A}_h(M)_\nu$ .

Eine zweite Bemerkung bezieht sich auf die Darstellung von  $\vartheta_\mu(0, \dots, 0) = \vartheta_\mu$  durch gewisse algebraische und transcendente Elemente. Schreibt man die Gleichung (10), in der  $\mu$  eine gerade,  $\nu$  eine ungrade Charakteristik ist:

$$\sum_i \vartheta_\nu^{(i)} f_i(\alpha) = P_{\mu\nu} \vartheta_\mu,$$

wo  $P_{\mu\nu}$  ein algebraischer Ausdruck ist, setzt für  $\alpha$  der Reihe nach  $p$  verschiedene Punkte  $\alpha', \alpha'', \dots, \alpha^p$ , die nicht auf einer adjungirten Curve des  $n - 3^{\text{ten}}$  Grades liegen und bezeichnet die entsprechenden Werthe von  $P_{\mu\nu}$  mit  $P'_{\mu\nu}, \dots, P^p_{\mu\nu}$ , so hat man ( $k = 1, \dots, p$ ):

$$\sum_i \vartheta_\nu^{(i)} f_i(\alpha^k) = P^k_{\mu\nu} \vartheta_\mu.$$

Bildet man diese  $p$  Gleichungen für  $p$  verschiedene, ungrade Charakteristiken  $\nu_1, \dots, \nu_p$ , so folgt

$$\begin{vmatrix} \vartheta_{\nu_1}^{(1)} & \dots & \vartheta_{\nu_1}^{(p)} \\ \vdots & & \vdots \\ \vartheta_{\nu_p}^{(1)} & \dots & \vartheta_{\nu_p}^{(p)} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} f_1(\alpha') & \dots & f_p(\alpha') \\ \vdots & & \vdots \\ f_1(\alpha^p) & \dots & f_p(\alpha^p) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} P'_{\mu\nu_1} & \dots & P'_{\mu\nu_p} \\ \vdots & & \vdots \\ P^p_{\mu\nu_1} & \dots & P^p_{\mu\nu_p} \end{vmatrix} (\vartheta_\mu)^p,$$

oder in abgekürzter Schreibweise ( $i, k = 1, \dots, p$ ):

$$(27) \quad \left| \vartheta_{\nu_i}^{(k)} \right| \left| f_i(\alpha^k) \right| = \left| P^k_{\mu\nu_i} \right| (\vartheta_\mu)^p.$$

Ist nun (Gl. 5 § 15)  $\nu_1, \dots, \nu_p$  ein beliebiges System von  $p$  linear unabhängigen Integralen 1. Gattung, sind  $\varphi_1, \dots, \varphi_p$  die Zähler in den



selben und sind die Periodicitätsmoduln  $A_{ik}$ ,  $B_{ik}$  derselben gegeben durch das Schema (13) § 15, so hat man nach (17) § 15:

$$\pi i v_1 = \sum_i A_{i1} u_i, \dots, \pi i v_p = \sum_i A_{ip} u_i,$$

also

$$\pi i \varphi_1(\alpha) = \sum_i A_{i1} f_i(\alpha), \dots, \pi i \varphi_p(\alpha) = \sum_i A_{ip} f_i(\alpha).$$

Bildet man auch dieses System für die  $p$  Punkte  $\alpha'$ ,  $\alpha''$ ,  $\dots$ ,  $\alpha^p$ , so folgt

$$(\pi i)^p \begin{vmatrix} \varphi_1(\alpha') & \dots & \varphi_p(\alpha') \\ \dots & \dots & \dots \\ \varphi_1(\alpha^p) & \dots & \varphi_p(\alpha^p) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_{11} & \dots & A_{p1} \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{1p} & \dots & A_{pp} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} f_1(\alpha') & \dots & f_p(\alpha') \\ \dots & \dots & \dots \\ f_1(\alpha^p) & \dots & f_p(\alpha^p) \end{vmatrix},$$

oder abgekürzt geschrieben ( $i, k = 1, \dots, p$ ):

$$(\pi i)^p |\varphi_i(\alpha^k)| = |A_{ik}| |f_i(\alpha^k)|. \quad (28)$$

Bei der Division von (27) durch (28) hebt sich die Determinante  $|f_i(\alpha^k)|$  weg und man erhält

$$\frac{|\vartheta_{r_i}^{(k)}|}{|A_{ik}|} = \frac{(\vartheta_{\mu})^p}{(\pi i)^p} \frac{|P_{\mu}^k v_i|}{|\varphi_i(\alpha^k)|}. \quad (29)$$

Bildet man die Gleichungen (29) für zwei verschiedene gerade Charakteristiken  $\mu$  und  $\mu'$  und dasselbe System von ungraden Charakteristiken  $v_1, \dots, v_p$ , so fallen bei der Division dieser Gleichungen durch einander die Determinanten  $|A_{ik}|$  und  $|\varphi_i(\alpha^k)|$  weg und man erhält eine algebraische Darstellung des Quotienten  $\vartheta_{\mu} : \vartheta_{\mu'}$  (s. auch Gl. (20)). Bildet man dagegen die Gleichung (29) für zwei verschiedene Systeme von ungraden Charakteristiken  $v_1, \dots, v_p$  und  $v'_1, \dots, v'_p$  und dieselbe gerade Charakteristik  $\mu$ , so gibt die Division eine algebraische Darstellung des Quotienten  $|\vartheta_{r_i}^{(k)}| : |\vartheta_{r'_i}^{(k)}|$ .

Man erhält noch weitere Darstellungen, wenn man die Theorie der Thetafunctionen zuzieht. Diese gibt<sup>1)</sup> gewisse Relationen ( $P$ ), die gebildet sind einerseits aus Producten von je  $p+2$  geraden Thetafunctionen von der Form  $\vartheta_{\mu_i}$  und andererseits aus  $p$ -gliedrigen Determinanten mit ungraden Thetafunctionen von der Form  $\vartheta_{r_i}^{(k)}$ , wobei die Fundamentalsysteme von  $2p+2$  Charakteristiken eine Rolle spielen. Aus diesen Gleichungen ( $P$ ) erhält man durch Division

1) Dies gilt wenigstens für die bis jetzt untersuchten Fälle  $p = 1, 2, 3, 4$  und den hyperelliptischen Fall von allgemeinem  $p$  (s. d. Litteratur S. 281). Für diese Fälle kann man daher auch die algebraische Darstellung der Ausdrücke (30) und (31) vollständig durchführen.

andere Gleichungen ( $Q$ ), in welche nur Quotienten von Determinanten  $|\vartheta_{v_i}^{(k)}|$  und von Functionen  $\vartheta_{\mu_i}$  eingehen. Man kann nun zunächst den Gleichungen (26) eine andere Form geben, indem man mittels der Gleichungen ( $P$ ) die Determinanten auf der rechten Seite in (26) ersetzt durch Ausdrücke, die nur gerade  $\vartheta_{\mu_i}$  enthalten. Man kann ferner die Gleichungen (29) umformen. Eliminiert man nämlich aus den Gleichungen ( $P$ ) und (29) die Ausdrücke  $|\vartheta_{v_i}^{(k)}|$  und nimmt die Gleichungen (20) hinzu, so erhält man eine algebraische Darstellung der Functionen

$$(30) \quad \vartheta_{\mu_i} : \sqrt{|A_{ik}|}.$$

Eliminirt man dagegen aus den Gleichungen ( $P$ ) und (29) die Functionen  $\vartheta_{\mu_i}$ , so erhält man eine algebraische Darstellung der Ausdrücke

$$(31) \quad |\vartheta_{v_i}^{(k)}| : \sqrt{|A_{ik}|^{p+2}}.$$

Die Durchführung dieser Rechnungen würde eine genauere Kenntniss der Relationen ( $P$ ) erfordern, die zur Zeit nur für die niedersten Werthe von  $p$  ermittelt sind.

Zu den letzten Untersuchungen ist noch folgende Litteratur nachzutragen.

Die im Abschnitt VI enthaltene Lösung des Umkehrproblems entspricht genau dem Verfahren, das in der Theorie der elliptischen Functionen eingeschlagen wird. (Vgl. Einleitung zum II. Theil.) Die Gleichungen des § 31 bilden in mehrfacher Weise Verallgemeinerungen der Gleichungen (5—7) S. 189. Die algebraischen Darstellungen der Functionen (30) entsprechen den drei ersten Gleichungen (9) S. 190, die der Ausdrücke (31) der vierten Gleichung (9) S. 190. Die zu diesen Darstellungen nöthigen, im Vorigen erwähnten Relationen ( $P$ ) und ( $Q$ ) sind, wie schon bemerkt, nur für die niedersten Werthe von  $p$  bekannt. In der Theorie der elliptischen Functionen beschränken sich die Relationen ( $P$ ) auf die Gleichung (8) S. 190, nämlich  $\pi \vartheta_1 \vartheta_2 \vartheta_3 = \vartheta'$  (Jacobi, Ges. W. I. S. 516). Für die hyperelliptischen Functionen ( $p = 2$ ) sind die entsprechenden Relationen von Rosenhain (Mém. Sav. Étrang. XI) durch Verallgemeinerung des Jacobi'schen Verfahrens abgeleitet worden. Einen anderen Weg zur Bestimmung der Functionen (30) durch die Klassenmoduln hat Riemann (Ges. W. S. 131) angegeben. In der Verfolgung desselben gelangt Herr Thomae (Journ. für Math. Bd. 66, S. 92 ff. (1865) und Bd. 71, S. 218 (1869)) für die hyperelliptischen Functionen von allgemeinem  $p$  zur algebraischen Darstellung von (30). (Vgl. auch

Fuchs, Journ. für Math. Bd. 73, S. 305 und 324. 1871.) Herr Weber hat zuerst den Fall  $p = 3$  behandelt (Ab. F.  $p = 3$  1876) und für ihn das Umkehrproblem vollständig gelöst. Er gibt u. A. (l. c. S. 40 ff.) die Relationen ( $Q$ ), ferner (l. c. S. 103–110; 161 und 167) in etwas anderer Form die obigen Gleichungen (2–26). Herr Schottky (Ab. F.  $p = 3$ . 1880) leitet für  $p = 3$  die Relationen ( $Q$ ) aus dem Additionstheorem der Thetafunctionen, Herr Frobenius (Journ. für Math. Bd. 98 S. 244 ff. 1884) für  $p = 1, 2, 3, 4$  und für den allgemeinen hyperelliptischen Fall die Relationen ( $P$ ) aus den Eigenschaften der Thetafunctionen ab. Wieder auf anderem Wege hat Herr Klein (Math. Ann. Bd. 36, S. 67 ff. 1889) für  $p = 3$  eine elegante Darstellung von (30) durch die Klassenmoduln gegeben. Von Interesse ist, dass Riemann in der in dem Vorwort erwähnten Vorlesung (Winter 1861/2) für  $p = 3$  bereits die Relationen ( $P$ ) und die obigen Gleichungen (26) mitgetheilt hat.

Wir schliessen diesen Abschnitt mit einer allgemeinen Bemerkung<sup>1)</sup>. Die Lösung des zur Gleichung  $F(x, y) = 0$  gehörigen Umkehrproblems geschieht für  $p > 3$  nicht durch die allgemeinsten, sondern durch specielle Thetafunctionen von  $p$  Argumenten. Denn für die allgemeinsten Thetafunctionen bestehen zwischen den Thetamoduln  $a_{hk}$  nur die  $\frac{1}{2}p(p-1)$  Bedingungen  $a_{hk} = a_{kh}$  (Gl. 22 § 25), so dass  $\frac{1}{2}p(p+1)$  Thetamoduln  $a_{hk}$  im Uebrigen unabhängig sind. Für das Jacobi'sche Umkehrproblem bestimmen sich aber die Thetamoduln  $a_{hk}$  mittels der Gleichungen (26) durch die  $3p-3$  invarianten Klassenmoduln von  $F(x, y) = 0$ . Von den  $p^2$  Thetamoduln sind daher ebenfalls nur  $3p-3$  unabhängig oder es bestehen zwischen ihnen ausser den Bedingungen  $a_{hk} = a_{kh}$  noch  $\frac{1}{2}p(p+1) - (3p-3) = \frac{1}{2}(p-2)(p-3)$  Relationen ( $T$ ), die transcender Natur und bis jetzt nur für den niedersten Werth  $p = 4$  ermittelt sind<sup>2)</sup>. Die letzten Relationen geben den bei dem Jacobi'schen Umkehrproblem auftretenden Thetafunctionen und den aus ihnen gebildeten,  $2p$ -fach periodischen Functionen einen speciellen Charakter, der den allgemeinen,  $2p$ -fach periodischen Functionen nicht anhaftet.

Wenn daher im Vorstehenden von der Anwendung des Additionstheorems der Thetafunctionen und anderer Thetarelationen die Rede ist, so wird dabei stets das Bestehen und die Kenntniss der obigen Relationen ( $T$ ) vorausgesetzt.

1) Riemann, Ges. W. S. 94.

2) Schottky, Journ. für Math. Bd. 102. S. 321 ff. (1886).

Die Theorie der allgemeinen,  $2p$ -fach periodischen Functionen, für welche die Moduln  $a_{hk}$  nur den Bedingungen  $a_{hk} = a_{kh}$  genügen, und der zugehörigen Differentialgleichungen hat bekanntlich zuerst Herr Weierstrass<sup>1)</sup> in Angriff genommen. Die Theorie der allgemeinen Thetafunctionen ist Gegenstand ausgedehnter Untersuchungen der Herren Prym und Krazer<sup>2)</sup>. Die erste, eingehendere Behandlung von besonderen Fällen in dieser Richtung hat neuerdings Herr Wirtinger<sup>3)</sup> gegeben.

1) Weierstrass, Journ. für Math. Bd. 89. S. 1 ff. (1879).

2) Prym, Unters. üb. d. Riemann'sche Thetaformel. Leipzig 1882; ferner die Abh. in Journ. für Math. Bd. 93. S. 124 ff. Acta math. III. S. 1—15 und S. 18—40. (1882). Prym u. Krazer, Neue Grundlage e. Theorie d. allgemeinen Thetafunctionen. Leipzig 1892 und Acta math. III. S. 41—77. (1882).

3) Wirtinger, Unters. üb. Thetafunctionen. Leipzig 1895.

## Siebenter Abschnitt.

### Allgemeine Darstellungen durch Thetafunctionen.

Die im vorigen Abschnitt gegebene Lösung des Jacobi'schen Umkehrproblems beruht auf der Darstellung von einfachen Thetaquotienten mit  $p$  Argumenten  $V_h$  durch algebraische und symmetrische Functionen der Coordinaten von  $q + 1$  Punkten  $x_k$ , welche die oberen Grenzpunkte in den Integralsummen  $V_h$  sind (Gll. 1 und 9 § 31). Der siebente Abschnitt beschäftigt sich mit der Verallgemeinerung dieser Darstellungen, nämlich mit der Aufstellung der allgemeinsten Beziehungen zwischen Thetafunctionen mit den  $p$  Argumenten  $V_h$  einerseits und algebraischen Functionen oder Abel'schen Integralausdrücken, die symmetrisch gebildet sind in den Coordinaten der  $q + 1$  Punkte  $x_k$  andererseits. Wir verfolgen dabei den schon früher eingeschlagenen Weg, d. h. wir entwickeln diese Beziehungen zuerst für den Fall  $q = 0$  oder für die  $p$  Argumente  $u_h$  und den oberen Grenzpunkt  $x$  und gehen von ihnen zu den entsprechenden Gleichungen zwischen den Argumenten  $V_h$  und dem Punktsystem  $x_k$  über.

#### § 34. Darstellung allgemeiner Thetaquotienten mit speciellen Argumenten<sup>1)</sup>.

Wir setzen wie früher ( $h = 1, \dots, p$ ):

$$\int_{\alpha}^x du_h \equiv u_h \quad (1)$$

und beginnen mit der Aufgabe, eine Function mit den  $p$  Argumenten  $u_h$  herzustellen, die, als Function der Coordinaten des oberen Grenzpunktes  $x$  betrachtet, folgende drei Eigenschaften hat:

1) Riemann, Ges. W. S. 132 ff. Prym, Theorie der Functionen in einer zweiblättrigen Fläche. Zürich 1866, S. 26. II. Stahl, Journ. für Math. Bd. 89, S. 170 ff. (1880). Für  $p = 1$  gab die entsprechende Darstellung Hermite, Lettre à Jacobi (Jacobi's Werke II. S. 103) (1845).

- a) sie soll in der Verzweigungsfläche  $T$  gleichviel  $0^1$  und  $\infty^1$  Punkte haben,  
 b) sie soll an den Querschnitten  $a_h$  und  $b_h$  von  $T'$  constante Factoren annehmen,  
 c) sie soll ausserdem in  $T'$  allenthalben eindeutig und stetig sein.

Zur Lösung betrachte man, indem man wie früher abkürzend

$$\vartheta(u_1 - c_1, \dots, u_p - c_p) = \vartheta(u - c)$$

setzt, den Ausdruck

$$(2) \quad \frac{\vartheta(u - A') \vartheta(u - A'') \dots \vartheta(u - A^p)}{\vartheta(u - C') \vartheta(u - C'') \dots \vartheta(u - C^p)} e^{-2 \sum_{h=1}^p g_h u_h}$$

d. h. den Quotienten zweier Producte von gleichviel Thetafunctionen, mit den um Constanten vermehrten Argumenten  $u_h$ , diesen Quotienten noch multiplicirt mit einem Exponentialfactor, dessen Exponent eine lineare Function der  $p$  Grössen  $u_h$  mit constanten Coefficienten ist.

Die constanten Grössen  $A_h^i$  und  $C_h^i$  seien nur der Bedingung unterworfen, dass keine der Thetafunctionen in (2) identisch für jeden Punkt  $x$  verschwindet. Der Ausdruck (2) hat nach den Sätzen des fünften Abschnittes bereits die sämmtlichen Eigenschaften (a, b, c).

Denn er wird in  $T'$  in gleichviel Punkten  $0^1$  und  $\infty^1$ , nämlich

$$= 0^1 \text{ in } qp \text{ Punkten } a_1^i, \dots, a_p^i \text{ und}$$

$$= \infty^1 \text{ in } qp \text{ Punkten } c_1^i, \dots, c_p^i \quad (i = 1, \dots, q),$$

die durch die Congruenzen bestimmt sind

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=1}^p \int_{a_k^0}^{a_k^i} du_h \equiv A_h^i, \quad \sum_{k=1}^p \int_{c_k^0}^{c_k^i} du_h \equiv C_h^i \\ (h = 1, \dots, p; \quad i = 1, \dots, q). \end{array} \right.$$

Er hat ferner an den Querschnitten  $a_h$  und  $b_h$  von  $T'$  constante Factoren, nämlich

$$(4) \quad \text{an } a_h: e^{-g_h' 2i\pi}, \quad \text{an } b_h: e^{+g_h' 2i\pi},$$

wo die Grössen  $g_h'$  bestimmt sind durch die Gleichungen ( $h=1, \dots, p$ ):

$$(5) \quad \sum_{i=1}^q (A_h^i - C_h^i) = g_h' \pi i + \sum_{k=1}^p g_k a_{hk}.$$

Das Letztere ergibt sich daraus, dass, wenn  $x$  den Querschnitt  $b_h$  von der  $+$  zur  $-$  Seite überschreitet, nach (6a) § 27

$$\vartheta(u - A) \text{ den Factor } e^{-2(\bar{u}_h - A_h)},$$

$$\vartheta(u - C) \text{ den Factor } e^{-2(\bar{u}_h - C_h)}$$

annimmt. Im Uebrigen ist die Function (2) in  $T'$  eindeutig und stetig.

Durch die Werthe (3) der Grössen  $A$  und  $C$  gehen die Gleichungen (5) über in ( $h = 1, \dots, p$ ):

$$\sum_{i=1}^q \sum_{k=1}^p \int_{c_k^i}^{a_k^i} du_h \equiv g'_h \pi i + \sum_{k=1}^p g_k a_{hk}. \quad (6)$$

Von den  $qp$  Punkten  $a_k^i$  können einige mit Punkten  $c_k^i$  zusammenfallen. Dann ist die Zahl der  $0^1$  und  $\infty^1$  Punkte der Function (2) und ebenso die Zahl der Glieder auf der linken Seite in (6) entsprechend kleiner als  $qp$ . Die vorstehende Betrachtung gibt den Satz:

(I) Der in den Argumenten  $u_h$  (1) transcendente Ausdruck (2) stellt eine Function von  $x$  dar, welche die unter (a, b, c) genannten Eigenschaften besitzt. Dabei sind die  $0^1$  und  $\infty^1$  Punkte und die Factoren an den Querschnitten durch die Gleichungen (6) an einander gebunden.

Wir beweisen jetzt umgekehrt den Satz:

(II) Die allgemeinste Function  $Q(x)$  der Coordinaten von  $x$ , welche die Bedingungen (a, b, c) erfüllt, lässt sich in den Argumenten  $u_h$  durch eine Function von der Form (2) darstellen.

Zunächst zeigt sich, dass die  $0^1$  und  $\infty^1$  Punkte und die constanten Factoren an den Querschnitten von  $T'$ , die eine solche Function  $Q(x)$  hat, nicht unabhängig, sondern durch  $p$  Relationen verbunden sind, die man als das Abel'sche Theorem für die Function  $Q(x)$  bezeichnen kann, da sie eine Verallgemeinerung des Abel'schen Theorems für rationale Functionen der Coordinaten von  $x$  bilden und sich auf dieselbe Weise wie dieses herleiten lassen (Gl. 10 § 19). In der That seien  $\xi_1, \dots, \xi_\sigma$  die  $0^1$  Punkte und  $\zeta_1, \dots, \zeta_\sigma$  die  $\infty^1$  Punkte von  $Q(x)$ ; ferner seien die constanten Factoren von  $Q(x)$  an den Querschnitten  $a_h, b_h$  von  $T'$  auf die Form (4) gebracht, wodurch die Grössen  $g_h$  und  $g'_h$  bis auf ganze Zahlen bestimmt sind, die man beliebig wählen kann. Endlich seien die Punkte  $\xi_i$  und  $\zeta_i$  durch kleine

Kreise aus  $T'$  ausgeschnitten und diese Kreise durch neue Querschnitte mit dem schon vorhandenen Querschnittsystem  $a_h$  und  $b_h$  der Fläche  $T'$  verbunden, wodurch aus  $T'$  eine einfach zusammenhängende Fläche  $T''$  hervorgeht. Indem man nun das Integral  $\int \log Q(x) du_h$  um die ganze Begrenzung von  $T''$  herumführt, erhält man zwischen den  $2\sigma$  Punkten  $\xi_i$  und  $\zeta_i$  und den  $2p$  Grössen  $g_h$  und  $g'_h$  die  $p$  Bedingungsgleichungen ( $h = 1, \dots, p$ ):

$$(7) \quad \sum_{i=1}^{\sigma} \int_{\zeta_i}^{\xi_i} du_h = g'_h \pi i + \sum_{k=1}^p g_k a_{hk}.$$

Dabei ist angenommen, dass die Integrationswege auf der linken Seite in (7) passend gewählt sind; bei anderen Integrationswegen würde auf der rechten Seite noch ein zusammengehöriges System von Periodicitätsmoduln der Integrale  $u_h$  hinzutreten.

Die Gleichungen (7) vorausgesetzt, bilde man einen Ausdruck der Form (2) folgendermassen. Als Grösse  $g_h$  nehme man die vorhin für  $Q(x)$  bestimmten Werthe  $g_h$ ; die Grössen  $A_h^i$  und  $C_h^i$  ersetze man durch Integralsummen von der Form (3), indem man für die oberen Grenzpunkte  $a$  und  $c$  zunächst die gegebenen Punkte  $\xi_i$  und  $\zeta_i$  verwendet, die noch fehlenden beliebig, jedoch im Zähler und Nenner gleich, annimmt, wobei nur darauf zu achten ist, dass die in einer Integralsumme vereinigten  $p$  Punkte nicht auf einer adjungirten  $\Phi$ -Curve liegen (§ 28 Satz VIII). Die für  $Q(x)$  bestehenden Gleichungen (7) gehen alsdann bei passender Wahl der Integrationswege in den gebildeten Integralsummen gerade in die Gleichungen (6) über. Hieraus folgt, dass der gebildete Ausdruck von der Form (2) bis auf einen von  $x$  unabhängigen Factor mit der gegebenen Function  $Q(x)$  übereinstimmt. Denn der Quotient beider Functionen wird in der Fläche  $T'$  an keiner Stelle mehr  $\infty$  und nimmt an den Querschnitten  $a_h$  und  $b_h$  die Factoren 1 an; er ist daher in  $T$  allenthalben eidentig und stetig, mithin gleich einer Constanten (Ia § 6).

Damit ist Satz II bewiesen. Die Zahl der zur Darstellung von  $Q(x)$  im Zähler und Nenner verwendeten Thetafunctionen kann wegen der benutzten Hilfspunkte noch variiren.

Unter gewissen Bedingungen für die Grössensysteme  $A, C, g, g'$  die bis jetzt nur durch die  $p$  Relationen (5) verbunden waren, stellt der Ausdruck (2) eine algebraische Function (allerdings von specieller Art) der Coordinaten des Punktes  $x$  dar.

Die allgemeinste, algebraische Function der Coordinaten von  $x$  ist die Wurzel einer algebraischen Gleichung, deren Coefficienten



rationale Functionen der Coordinaten von  $x$  sind. Charakteristisch für eine solche Function ist, dass sie in jedem Punkte  $x$  der Fläche  $T$  nur eine endliche Zahl von Werthen annimmt. Nun hat die Function (2) bereits die Eigenschaft, dass sie bei einmaligem Ueberschreiten der Querschnitte die constanten Factoren (4) annimmt. Die Werthe, die sie durch stetige Fortsetzung über die Querschnitte hinüber in demselben Punkte von  $T'$  erlangt, unterscheiden sich also von einander durch die Potenzen und Producte der Factoren (4). Soll (2) eine algebraische Function sein, also in jedem Punkte  $x$  nur eine endliche Zahl von Werthen annehmen, so ist nothwendige und hinreichende Bedingung, dass die Grössen  $g$  und  $g'$  rationale Zahlen sind. Da sich die Factoren (4) nicht ändern, wenn  $g$  und  $g'$  um ganze Zahlen vermehrt werden, so umfasst man alle Fälle, indem man  $g$  und  $g'$  gleich positiven, echten Brüchen mit demselben Nenner  $m$  setzt, also ( $h = 1, \dots, p$ ):

$$g_h = \frac{a_h}{m}, \quad g'_h = \frac{a'_h}{m}, \quad (8)$$

wo  $m$  eine ganze, positive Zahl ist und  $a_h, a'_h$  ebenfalls ganze, positive Zahlen sind, die alle Werthe von 0 bis  $m - 1$  durchlaufen können.

Die auf der rechten Seite in (5) und (6) auftretenden Grössen werden

$$\frac{1}{m} \left( a'_h \pi i + \sum_{k=1}^p a_k a_{h,k} \right) = \frac{M_h}{m}. \quad (9)$$

Das Zahlensystem (8) stellt nach (§ 26 Gl. 28 u. 29) eine  $m$ -theilige Charakteristik ( $a$ ) und das zugehörige Grössensystem (9) ein System von zusammengehörigen,  $m$ -theiligen Periodicitätsmoduln der Integrale  $u_h$  dar. An Stelle von (2) tritt der Ausdruck

$$\frac{\vartheta(u - A') \dots \vartheta(u - A^p)}{\vartheta(u - C') \dots \vartheta(u - C^p)} e^{-\frac{2}{m} \sum_{h=1}^p a_h u_h} \quad (10)$$

und (5) und (6) gehen über in die Gleichungen ( $h = 1, \dots, p$ ):

$$\sum_{i=1}^q (A_h^i - C_h^i) = \frac{M_h}{m} \quad (11)$$

oder

$$m \sum_i \sum_k \int_{c_k^i}^{a_k^i} du_h = 0, \quad (12)$$

welche das Abel'sche Theorem der durch (10) dargestellten, algebraischen Function von  $x$  bilden. Die Factoren des Ausdrucks (10) an den Querschnitten sind nach (4) und (8)

$$(13) \quad \text{an } a_h: e^{-\frac{2i\pi}{m}\mu_h}, \quad \text{an } b_h: e^{+\frac{2i\pi}{m}\mu'_h},$$

wo sich die  $\mu'_h$  aus den Gleichungen (11) bestimmen. Die Factoren (13) sind sämmtlich  $m^{\text{te}}$  Wurzeln der Einheit. Daher hat die  $m^{\text{te}}$  Potenz von (10) an den Querschnitten von  $T'$  die Factoren 1, ist also eine rationale Function der Coordinaten von  $x$  und zwar von der besonderen Eigenschaft, dass ihre 0 und  $\infty$  Punkte alle von der  $m^{\text{ten}}$  Ordnung sind. Der Ausdruck (10) ist die  $m^{\text{te}}$  Wurzel einer solchen Function. Dies gibt den Satz:

(III) Der allgemeinste Thetaquotient mit den Argumenten  $u_h$ , der eine algebraische Function der Coordinaten des Punktes  $x$  darstellt, ist der Ausdruck (10) mit den Bedingungen (11). Diese algebraische Function ist von specieller Art, nämlich die  $m^{\text{te}}$  Wurzel aus einer rationalen Function  $P(x)$  der Coordinaten von  $x$ , deren 0 und  $\infty$  Punkte alle von der  $m^{\text{ten}}$  Ordnung sind.

Umgekehrt beweist man durch dieselbe Betrachtung, die zum Satze II führte, leicht den Satz:

(IV) Ist  $P(x)$  eine rationale Function der Coordinaten von  $x$ , deren 0 und  $\infty$  Punkte alle von der  $m^{\text{ten}}$  Ordnung sind, so ist die Function  $\sqrt[m]{P(x)}$  darstellbar durch einen Thetaquotienten der Form (10).

Um die Function (10) wirklich in algebraischer Form darzustellen, wobei die gegebenen Constanten  $A_h^i$  und  $C_h^i$  nur den Bedingungen (11) unterworfen sind, denke man sich den allgemeinen Fall, wo von den durch die Grössen  $A$  und  $C$  gegebenen, aus den Gleichungen (3) eindeutig bestimmten  $qp$   $0^1$  Punkten  $a_k^i$  und  $qp$   $\infty^1$  Punkten  $c_k^i$  einige zusammenfallen, so dass im Zähler und Nenner noch je  $g$  ( $\geq p$ ) Punkte übrig bleiben, die durch  $a_i$  und  $c_i$  ( $i = 1, \dots, g$ ) bezeichnet seien und die nach (12) den Gleichungen genügen:

$$(14) \quad m \sum_{i=1}^g \int_{c_i}^{a_i} du_h \equiv 0.$$

Die  $m^{\text{te}}$  Potenz von (10) ist eine rationale Function der Coordinaten von  $x$ , die in den  $g$  Punkten  $a_i$  je  $= 0^m$ , in den  $g$  Punkten  $c_i$  je  $= \infty^m$  wird und nach § 12 folgendermassen zu bilden ist. Man bestimme

eine Curve von hinreichend hohem Grade  $k$ , die durch die  $r$  Doppelpunkte  $\delta_1, \dots, \delta_r$  von  $F=0$  geht, (welche Punkte als Schnittpunkte doppelt zählen) und ausserdem  $F=0$  in den  $g$  Punkten  $c_i$  je  $m-1$ -punktig berührt (d. h. je in  $m$  zusammenfallenden Punkten schneidet). Man bezeichne diese Curve durch  $\omega_0(x, c) = 0$  und die noch übrig bleibenden  $s$  Schnittpunkte derselben mit  $F=0$  durch  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_s$ . Dabei können unter den  $s$  Punkten  $\varepsilon$  nochmals die  $r$  Punkte  $\delta$  sein. Die Zahlen  $n, k, m, g, r, s$  sind hierbei durch die Gleichung verbunden

$$nk = mg + 2r + s. \quad (15)$$

Legt man alsdann durch die  $r$  Punkte  $\delta$  und die  $s$  Punkte  $\varepsilon$  eine zweite Curve  $\omega(x, a) = 0$  von demselben Grade  $k$ , die  $F=0$  in den  $g-p$  ersten Punkten  $a_i$  je  $m-1$ -punktig berührt, so lassen sich die noch freien Coefficienten gerade so bestimmen, dass die Curve noch in weiteren  $p$  Punkten je  $m-1$ -punktig berührt, wie eine Betrachtung analog der auf S. 238 für  $m=2$  angestellten zeigt. Wie dort ist auch hier die Bestimmung der Curve  $\omega(x, a) = 0$  oder der  $p$  letzten Berührungspunkte nicht eindeutig, sondern endlich vielmehr. Nach (14) entspricht nämlich dem Werthsystem  $\frac{\mu_h}{m}, \frac{\mu'_h}{m}$  eindeutig eine solche Berührungcurve, die durch  $\omega_\mu(x, a) = 0$  bezeichnet sei. Da sich diese Curve nicht ändert, wenn die Zahlen  $\mu$  und  $\mu'$  um ganze Vielfache von  $m$  wachsen, so erhält man, indem man jeder der Zahlen  $\mu$  und  $\mu'$  alle Werthe  $0, 1, \dots, m-1$  beilegt, ein System von  $m^{2p}$  solcher Berührungscurven  $\omega_\mu(x, a)$ , die sich dadurch unterscheiden, dass in ihnen jedesmal die  $p$  letzten Berührungspunkte andere sind.

Nunmehr ist die Function (10) algebraisch dargestellt durch

$$c_\mu \sqrt[m]{\omega_\mu(x, a) : \omega_0(x, c)}, \quad (16)$$

wo  $c_\mu$  eine von  $x$  unabhängige Grösse ist.

Wir geben dem Resultat noch folgende Fassung. Bildet man einen zweiten Ausdruck von der Form (10) mit demselben Grössensystem  $C_h^i$  im Nenner, aber einem anderen System  $B_h^i$  im Zähler und mit einer anderen  $m$ -theiligen Charakteristik  $(v)$ , so erhält man durch Division beider Ausdrücke die Darstellung

$$\frac{\Theta_\mu(u, A)}{\Theta_v(u, B)} = c_{\mu v} \sqrt[m]{\frac{\omega_\mu(x, a)}{\omega_v(x, b)}}, \quad (17)$$

wo zur Abkürzung gesetzt ist

$$\Theta_\mu(u, A) = e^{-\frac{2}{m} \sum_h \mu_h u_h} \prod_i \vartheta(u - A^i). \quad (18)$$

Für den Ausdruck (17) sind die Factoren an den Querschnitten

$$(19) \quad a_h: e^{-\frac{2i\pi}{m}(u_h - v_h)}, \quad b_h: e^{+\frac{2i\pi}{m}(u'_h - v'_h)}.$$

Ferner sind die  $qp$   $0^1$  Punkte  $a_k^i$  und die  $qp$   $\infty^1$  Punkte  $b_k^i$  ( $i = 1, \dots, q$ ) von (17) bestimmt durch die Congruenzen:

$$(20) \quad \sum_k \int_{\alpha_k^0}^{\alpha_k^i} du_h \equiv A_h^i, \quad \sum_k \int_{\alpha_k^0}^{\alpha_k^i} dv_h \equiv B_h^i$$

und die  $2qp$  Grössen  $A_h^i$  und  $B_h^i$  oder die  $2qp$  Punkte  $\alpha_k^i$  und  $\beta_k^i$  sind mit den Charakteristiken  $(u)$  und  $(v)$  verbunden durch die Relationen

$$(21) \quad \sum_i (A_h^i - B_h^i) \equiv \sum_i \sum_k \int_{\beta_k^i}^{\alpha_k^i} dv_h \equiv \frac{1}{m} (M_h - N_h).$$

In allen diesen Summen ist

$$h = 1, \dots, p; \quad k = 1, \dots, p; \quad i = 1, \dots, q.$$

### § 35. Darstellung allgemeiner Thetaquotienten mit allgemeinen Argumenten<sup>1)</sup>.

Die bisherige Untersuchung bezog sich auf das specielle Problem (1) § 34 und führte in (17) § 34 auf die Darstellung eines Quotienten von Thetafunctionen mit den Argumenten  $u_h$  durch eine algebraische Function der Coordinaten des Punktes  $x$ . Mit Hilfe dieser Vorbetrachtung lässt sich nun sofort die entsprechende, allgemeine Aufgabe lösen, nämlich unter Voraussetzung, dass ( $h = 1, \dots, p$ ):

$$(1) \quad V_h \equiv \sum_{k=0}^q \int_{\alpha_k}^{x_k} du_h,$$

und dass die constanten Grössensysteme  $A_1^i, \dots, A_p^i$  und  $B_1^i, \dots, B_p^i$  ( $i = 1, \dots, q$ ) den Bedingungen genügen

$$(2) \quad \sum_i (A_h^i - B_h^i) \equiv \frac{1}{m} (M_h - N_h),$$

den Thetaquotienten mit den Argumenten  $V_h$

$$(3) \quad \frac{\Theta_u \langle V, A \rangle}{\Theta_v \langle V, B \rangle} = \frac{e^{-\frac{2}{m} \sum u_h v_h}}{e^{-\frac{2}{m} \sum v_h v_h}} \prod_{i=1}^q \frac{\vartheta \langle V - A^i \rangle}{\vartheta \langle V - B^i \rangle}$$

1) S. Litteratur zu § 34.

durch eine algebraische und symmetrische Function der Coordinaten der Punktsysteme  $x, x_1, \dots, x_q$  einerseits und  $a, a_1, \dots, a_q$  andererseits darzustellen. Dies geschieht nach dem Verfahren des § 31.

Der specielle Ausdruck (17) § 34 hatte als Function von  $x$  an den Querschnitten von  $T'$  die Factoren (19) § 34. Die nämlichen Factoren besitzt der Ausdruck (3), wenn man ihn als Function von irgend einem der  $q + 1$  Punkte  $x, x_1, \dots, x_q$  betrachtet. Ist daher  $S$  irgend eine algebraische, wie  $T$  verzweigte Function der Coordinaten von  $x$  allein, die an den Querschnitten ebenfalls die Factoren (19) § 34 annimmt und bezeichnet  $S_i$  den Werth dieser Function für  $x = x_i$ , so ist der darzustellende Ausdruck (3), dividirt durch das Product  $SS_1 \dots S_q$  eine rationale Function der Coordinaten eines jeden der Punkte  $x, x_1, \dots, x_q$ . Bezeichnet man diese rationale Function durch  $R$ , so ist der Ausdruck (3) dargestellt durch

$$R \cdot SS_1 \dots S_q. \quad (4)$$

Am einfachsten wählt man für  $S$  die Function (17) § 34, nämlich

$$S = \sqrt[m]{\omega_\mu(x, a) : \omega_\nu(x, b)}. \quad (5)$$

Dann ist, wie die Vergleichung von (4) mit (3) ergibt, die rationale Function  $R$  folgendermassen bestimmt. Als Function von  $x$  betrachtet, wird sie  $= 0^1$  in den  $qp$  Punkten  $b_k^i$  (in denen  $S = \infty^1$  wird) und  $= \infty^1$  in den  $qp$  Punkten  $a_k^i$  (in denen  $S = 0^1$  wird). Sie wird ferner  $= 0^1$  in den  $qp$   $0^1$  Punkten  $\xi_k^i$  und  $= \infty^1$  in den  $qp$   $\infty^1$  Punkten  $\eta_k^i$  der Function (3), welche Punkte nach (I) § 29 bestimmt sind durch die Congruenzen ( $h = 1, \dots, p; i = 1, \dots, q$ )

$$\sum_{k=1}^p \int_{\alpha_k^0}^{\xi_k^i} du_h + \sum_{i=1}^q \int_{\alpha_i}^{x_i} du_h \equiv A_h^i, \quad \sum_{k=1}^p \int_{\alpha_k^0}^{\eta_k^i} du_h + \sum_{i=1}^q \int_{\alpha_i}^{x_i} du_h \equiv B_h^i, \quad (6)$$

oder nach (20) § 34 durch die Congruenzen:

$$\sum_{k=1}^p \int_{\alpha_k^i}^{\xi_k^i} du_h + \sum_{i=1}^q \int_{\alpha_i}^{x_i} du_h \equiv 0, \quad \sum_{k=1}^p \int_{b_k^i}^{\eta_k^i} du_h + \sum_{i=1}^q \int_{\alpha_i}^{x_i} du_h \equiv 0. \quad (7)$$

Für die Darstellung von  $R$  braucht man die Punkte  $\xi_k^i$  und  $\eta_k^i$  selber gar nicht zu kennen; sie lassen sich nach (7) ersetzen durch die Punkte  $\alpha_k^i$  und  $b_k^i$ . Um  $R$  zunächst als Function von  $x$  zu bilden, lege man durch die  $r$  Doppelpunkte  $\delta$  von  $T = 0$ , durch die  $p$  Punkte  $\alpha_k^i$  ( $k = 1, \dots, p$ ) und die  $q$  Punkte  $\alpha_1 \dots \alpha_q$  eine Curve  $\Omega_a^i(x) = 0$ ,

die  $F$  noch in  $t$  Punkten  $\xi_1, \dots, \xi_t$  schneidet; alsdann durch die  $r$  Punkte  $\delta$ , durch die  $t$  Punkte  $\xi$  und durch die  $q$  Punkte  $x_1, \dots, x_q$  eine Curve desselben Grades  $\Omega_a^i(x, x_1, \dots, x_q) = 0$ , welche alsdann  $F = 0$  nach (7) gerade noch in den  $p$  Punkten  $\xi_k^i$  ( $k = 1, \dots, p$ ) schneiden muss. Daher wird der Quotient  $\Omega_a^i(x, x_1, \dots, x_q) : \Omega_a^i(x)$  als Function von  $x$  gleich  $0^1$  in den  $p$  Punkten  $\xi_k^i$  und den  $q$  Punkten  $x_1, \dots, x_q$  und  $= \infty^1$  in den  $p$  Punkten  $\alpha_k^i$  und den  $q$  Punkten  $\alpha_1, \dots, \alpha_q$ . Entsprechend bestimme man zwei Curven  $\Omega_b^i(x) = 0$  und  $\Omega_b^i(x, x_1, \dots, x_q) = 0$  von demselben Grad wie vorher, mit Benutzung der  $p$  Punkte  $b_k^i$  statt  $\alpha_k^i$  und  $t$  anderen Hilfspunkten  $\xi'$ , so dass der Quotient  $\Omega_b^i(x, x_1, \dots, x_q) : \Omega_b^i(x)$  als Function von  $x$  gleich  $0^1$  wird in den  $p$  Punkten  $\eta_k^i$  und den  $q$  Punkten  $x_1 \dots x_q$ , gleich  $\infty^1$  in den  $p$  Punkten  $b_k^i$  und den  $q$  Punkten  $\alpha_1 \dots \alpha_q$ . Alsdann hat das Product

$$(8) \quad \prod_{i=1}^q \frac{\Omega_a^i(x, x_1, \dots, x_q)}{\Omega_b^i(x, x_1, \dots, x_q)} \frac{\Omega_b^i(x)}{\Omega_a^i(x)},$$

als Function von  $x$  betrachtet, dieselben  $0^1$  und  $\infty^1$  Punkte, wie die rationale Function  $R$ , stimmt also mit  $R$  bis auf einen von  $x$  unabhängigen, dagegen von  $x_1, \dots, x_q$  noch abhängigen Factor überein.

Um die Function  $R$ , die in den  $q + 1$  Punkten  $x, x_1, \dots, x_q$  symmetrisch ist, vollständig zu erhalten, hat man offenbar den Ausdruck (8) nur durch Zusatz eines von  $x$  unabhängigen Factors ebenfalls in den Punkten  $x, x_1, \dots, x_q$  symmetrisch zu machen. Man erhält so ( $i = 1, \dots, q; k = 0, 1, \dots, q$ )

$$(9) \quad R = C_{\mu} \prod_{i,k} \frac{\Omega_a^i(x, x_1, \dots, x_q)}{\Omega_b^i(x, x_1, \dots, x_q)} \frac{\Omega_b^i(x_k)}{\Omega_a^i(x_k)},$$

wo die Grösse  $C_{\mu}$  eine Constante, d. h. von  $x, x_1, \dots, x_q$  unabhängig ist. Trägt man die Werthe (5) und (9) in (4) ein, so hat man für den Thetaquotienten (3) folgende Darstellung ( $i = 1, \dots, q; k = 0, 1, \dots, q$ ):

$$(10) \quad \frac{\Theta_{\mu}(V, A)}{\Theta_{\nu}(V, B)} = C_{\mu\nu} \prod_{i,k} \frac{\Omega_a^i(x, x_1, \dots, x_q)}{\Omega_b^i(x, x_1, \dots, x_q)} \frac{\Omega_b^i(x_k)}{\Omega_a^i(x_k)} \sqrt{\frac{\omega_{\mu}(x_k, a)}{\omega_{\nu}(x_k, b)}}.$$

Die Constante  $C_{\mu\nu}$  wird am einfachsten durch die Substitution  $x = a, x_1 = \alpha_1, \dots, x_q = \alpha_q$  und  $V_1 = V_2 = \dots V_p = 0$  bestimmt. Die Gleichung (10) ist alsdann auch symmetrisch in den  $q + 1$  unteren Grenzpunkten  $a, \alpha_1, \dots, \alpha_q$  in (1). Diese Betrachtung gibt den Satz:

(I) Der Thetaquotient (3), dessen Argumente die  $q + 1$ -gliedrigen Integralsummen (1) mit beliebigen oberen und

unteren Grenzpunkten sind, vermehrt um constante Grössensysteme  $A$  und  $B$ , die nur den  $p$  Bedingungen (2) genügen, lässt sich darstellen durch rationale und symmetrische Functionen der  $q + 1$  oberen Grenzpunkte  $x, x_1, \dots, x_q$  (und ebenso der  $q + 1$  unteren Grenzpunkte  $\alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_q$ ) in Verbindung mit der  $m^{\text{ten}}$  Wurzel aus einer eben solchen Function, in der die Variablen  $x, x_1, \dots, x_q$  (und ebenso  $\alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_q$ ) getrennt auftreten.

Wir betrachten noch kurz die allgemeine Wurzelfunction  $\sqrt[m]{\omega_\mu(x, a)}$ , die in (16) § 34 defnirt wurde. In der Curve  $\omega_0(x, c) = 0$  waren die  $g$  Punkte  $c$  beliebig; in den Curven  $\omega(x, a) = 0$  sind von den  $g$  Punkten  $a_i$  die  $g - p$  ersten beliebig wählbar, die  $p$  letzten dagegen auf  $m^{2p}$  Arten bestimmt derart, dass jeder der  $m^{2p}$   $m$ -theiligen Charakteristiken ( $\mu$ ) ein bestimmtes System von  $p$  letzten Punkten  $a_i$  zugeordnet ist. Lässt man die  $g - p$  ersten Berührungspunkte  $a_i$  der Curve  $\omega_\mu(x, a) = 0$  beliebig variiren, so gehören zu den festen Punkten  $\delta$  und  $\varepsilon$  (s. § 34) noch  $g - p$ -fach unendlich viele Curven, die  $F = 0$  in  $g$  Punkten je  $m - 1$ -punktig berühren. Diese Curven  $\omega$  theilen sich, indem man alle zu derselben Charakteristik ( $\mu$ ) gehörigen Curven zu einem System zusammenfasst, in  $m^{2p}$  Systeme  $\omega_\mu$ . Die zu Grunde gelegte Curve  $\omega_0(x, c)$  gehört dann in das System der Charakteristik ( $\mu$ ) = (0), in der alle Zahlen  $\mu, \mu'$  den Werth 0 haben. Die  $m^{2p}$  Systeme von Berührungscurven  $\omega_\mu$  sind völlig getrennt, d. h. es ist nicht möglich, aus einem System  $\mu$  durch blosse, stetige Aenderung der  $g - p$  willkürlichen Berührungspunkte in ein anderes System  $\nu$  zu gelangen, wie sich aus (12) § 34 ergibt. Die Charakteristik (0) nimmt insofern eine Sonderstellung ein, als zur Bestimmung des ganzen Systems der Berührungscurven  $\omega_\mu$  eine zur Charakteristik (0) gehörige Curve, nämlich  $\omega_0(x, c)$ , im voraus als gegeben angesehen wird.

Die zu den Berührungscurven  $\omega_\mu(x, a) = 0$  von demselben Grad  $k$  und mit denselben festen Punkten  $\delta$  und  $\varepsilon$  gehörigen Functionen  $\sqrt[m]{\omega_\mu(x, a)}$  sollen Wurzelfunctionen von der Charakteristik  $\mu$ , vom Exponenten  $m$  und von der Ordnung  $g$  heissen. Eine solche Wurzelfunction wird in jedem der  $g$  Berührungspunkte  $a_i$  gleich 0<sup>1</sup>, in jedem der  $r$  Punkte  $\delta$  gleich 0 <sup>$\frac{1}{m}$</sup>  (für den einzelnen Zweig des Doppelpunkts) und ebenso in jedem der  $s$  Punkte  $\varepsilon$  gleich 0 <sup>$\frac{1}{m}$</sup> . Für diese Wurzelfunctionen gelten zwei Sätze, die eine Verallgemeinerung der früheren Sätze (I und II § 30) bilden. Der erste Satz bezieht

sich auf die linearen Relationen zwischen den Wurzelfunctionen und lautet:

(II) Eine Wurzelfunction  $\sqrt[m]{\omega_\mu(x, a)}$  von der Charakteristik  $\mu$ , dem Exponenten  $m$  und der Ordnung  $g$  lässt sich durch ein Aggregat von höchstens  $g - p + 1$  linear unabhängigen Wurzelfunctionen derselben Art darstellen.

Sind nämlich  $\omega_\mu(x, a)$ ,  $\omega_\mu(x, a)$ ,  $\omega_\mu(x, a^0)$ ,  $\omega_\mu(x, a')$ ,  $\omega_\mu(x, a'')$ , .. eine Reihe von Berührungsfunktionen von derselben Charakteristik  $\mu$ , denselben Punkten  $\delta$  und  $\varepsilon$  und mit den Systemen  $\alpha, a, a^i$  ( $i=0, 1, \dots$ ) von je  $g$  Berührungspunkten, so hat der Ausdruck

$$\sqrt[m]{\omega_\mu(x, a)} : \omega_\mu(x, a)$$

als Quotient zweier Functionen der Form (16) § 34 die Eigenschaft,  $g \infty^1$  und  $0^1$  Punkte und an den Querschnitten  $a_h$  und  $b_h$  von  $T'$  die Factoren 1 zu besitzen. Er ist also eine rationale Function der Coordinaten des Punktes  $x$  von der Ordnung  $g$  und lässt sich (nach Ib § 12) im Allgemeinen durch  $g - p + 1$  linear unabhängige Functionen derselben Art und mit denselben  $\infty^1$  Punkten darstellen. Man hat daher, indem man den gemeinsamen Nenner  $\sqrt[m]{\omega_\mu(x, a)}$  dieser Functionen weglässt, die Gleichung

$$(11) \quad \sqrt[m]{\omega_\mu(x, a)} = \sum_{i=0}^{g-p} l_i \sqrt[m]{\omega_\mu(x, a^i)}$$

unter der Voraussetzung, dass die  $g - p + 1$  Wurzelfunctionen der rechten Seite linear unabhängig sind. (q. e. d.)

Die Function  $\sqrt[m]{\omega_\mu(x, a)}$  ist hiernach bis auf einen constanten Factor bestimmt, sobald  $g - p$  ihre  $0^1$  Punkte gegeben sind, da man durch Einführung derselben aus (11)  $g - p$  lineare Gleichungen für die Verhältnisse der Coefficienten  $l_i$  erhält; hiermit sind auch die  $p$  letzten  $0^1$  Punkte der Function bestimmt.

Sind von den  $g$  Berührungspunkten  $a_k$  der Curve  $\omega_\mu(x, a)$  die  $p$  letzten gleichzeitig  $0^1$  Punkte von  $q$  linear unabhängigen  $\varphi$ -Curven, so ist, wie man aus den Sätzen in § 12 leicht beweist, die Function  $\sqrt[m]{\omega_\mu(x, a)}$  nicht durch  $g - p$ , sondern erst durch  $g - p + q$  der Punkte  $a_k$  eindeutig bestimmt und umgekehrt, ist eine Wurzelfunction der betrachteten Art noch nicht durch  $g - p$ , sondern erst durch  $g - p + q$   $0^1$  Punkte bestimmt, so sind die  $p$  letzten  $0^1$  Punkte zu-



gleich  $0^1$  Punkte von  $q$  linear unabhängigen  $\varphi$ -Functionen. Dann tritt an Stelle von (11) die Gleichung

$$\sqrt[m]{\omega_\mu(x, \alpha)} = \sum_{i=0}^{g-p+q} l_i \sqrt[m]{\omega_\mu(x, \alpha^i)}. \quad (11a)$$

Auf gleiche Weise ergibt sich, dass jedes Aggregat von Wurzelfunctionen von demselben System  $\mu$ , demselben Exponenten  $m$  und derselben Ordnung  $g$  wieder eine Wurzelfunction derselben Art ist. Denn dividirt man ein solches Aggregat durch eine solche Function, etwa  $\sqrt[m]{\omega_\mu(x, \alpha)}$ , so ist der Quotient ein Aggregat von rationalen Functionen, also selber rational. Da nun die  $m^{\text{te}}$  Potenz des Nenners, nämlich  $\omega_\mu(x, \alpha)$ , für sich rational und vom Grade  $k$  ist, so muss auch die  $m^{\text{te}}$  Potenz des Zählers rational sein und sich mit Hilfe von  $F=0$  auf den Grad  $k$  und die Form  $\omega_\mu(x, \alpha)$  bringen lassen, d. h. der Zähler selber oder das Aggregat der Wurzelfunctionen ist von der Form  $\sqrt[m]{\omega_\mu(x, \alpha)}$ . (q. e. d.)

Ein zweiter Satz bezieht sich auf die rationalen Functionen, die sich aus Wurzelfunctionen bilden lassen. Um denselben in allgemeinsten Form herzuleiten, halte man bei der Bildung der Wurzelfunctionen  $\sqrt[m]{\omega_\mu}$  nur die Exponenten  $m$  und die  $r$  Punkte  $\delta$  und die  $s$  Punkte  $\varepsilon$  fest, lasse aber die Charakteristik  $\mu$  beliebig und den Grad  $k$  und die Ordnung  $g$  der Bedingung (15) § 34, nämlich

$$nk = mg + 2r + s \quad (12)$$

gemäss variiren. Eine Wurzelfunction von der Charakteristik  $\mu$ , dem Grad  $k$  und der Ordnung  $g$  sei allgemein bezeichnet durch  $\sqrt[m]{\omega_\mu^g}$ . Das Product von  $\alpha$  Wurzelfunctionen

$$\prod_{i=1}^{\alpha} \sqrt[m]{\omega_{\mu_i}^{g_i}} \quad (13)$$

ist offenbar wieder eine Wurzelfunction ähnlicher Art, wie die Einzel-factoren, mit dem Unterschied, dass die Function (13) in den Punkten  $\delta$  und  $\varepsilon$  nicht in der Ordnung  $\frac{1}{m}$ , sondern in der Ordnung  $\frac{\alpha}{m}$  verschwindet. Die Charakteristik  $\mu$ , die der Function (13) zugehört, ist bestimmt durch

$$\mu \equiv (\mu_1 \mu_2 \dots \mu_\alpha) \pmod{m}, \quad (14)$$

d. h. durch Addition der  $\alpha$  Charakteristiken  $\mu_1, \dots, \mu_\alpha$ . Die Function (13) verschwindet ferner in der Gesamtheit der Nullpunkte ihrer Factoren. Es ist nun leicht anzugeben, unter welchen Bedingungen die Func-

tion (13) eine rationale Function der Coordinaten von  $x$  darstellt. Zuerst muss  $\alpha = m\varrho$ , d. h. ein ganzzahliges Vielfaches von  $m$  sein, damit (13) in den Punkten  $\delta$  und  $\varepsilon$  in ganzzahliger Ordnung verschwindet. Dann muss die Charakteristik  $\mu$ , d. h.  $(\mu_1 \dots \mu_{q_m}) \equiv (0)$  sein (mod  $m$ ), damit die Function (13) an den Querschnitten von  $T'$  die Factoren 1 habe. Endlich muss noch, wenn  $i = 1, \dots, m\varrho$  ist,  $\sum_i g_i$  theilbar sein durch  $m$  oder es muss eine ganze Zahl  $g$  existiren so, dass  $\sum_i g_i = mg$  ist. Denn aus dieser Bedingung ergibt sich, durch Summation der für die Einzelfactoren von (13) gebildeten Gleichungen (12), eine Relation, die beweist, dass auch  $\sum_i k_i$  durch  $m$  theilbar ist, dass also eine Zahl  $k$  existirt von der Art, dass  $\sum_i k_i = mk$ . Für diese Zahlen  $g$  und  $k$  gilt dann ebenfalls die Gleichung (12). Hieraus aber folgt die Existenz eines Systems von Berührungscurven der Form  $\omega^g$ , d. h. von beliebiger Charakteristik, vom Grade  $k$  und der Ordnung  $g$ . Dividirt man nun das Product (13), gebildet für  $\alpha = m\varrho$ , durch die Function  $\omega_0^g$ , so erhält man eine in den Coordinaten von  $x$  rationale Function, deren Nenner für sich rational und vom Grade  $k$  ist. Folglich muss auch der Zähler, d. i. die Function (13), für  $\alpha = m\varrho$  eine rationale Function  $Q$  von  $x$  sein, die sich mit Hilfe von  $F = 0$  ebenfalls auf den Grad  $k$  bringen lässt. Hiernach hat man analog (16) § 30 eine Gleichung von der Form:

$$(15) \quad \prod_{i=1}^{m\varrho} \omega_{\mu_i}^{g_i} = Q^m + Q_1 F,$$

oder abgekürzt geschrieben

$$(16) \quad \prod_{i=1}^{m\varrho} \sqrt[m]{\omega_{\mu_i}^{g_i}} \equiv Q$$

und den Satz:

(III) Das Product (13) ist eine ganze, rationale Function der Coordinaten des Punktes  $x$  unter der Voraussetzung, dass  $\alpha = m\varrho$ ,  $\sum_i g_i = mg$  (also auch  $\sum_i k_i = mk$ ) und  $(\mu_1 \dots \mu_{q_m}) \equiv (0) \pmod{m}$  ist.

Man kann die Gleichung (15), wie im früheren Fall, geometrisch deuten. Sieht man dabei von den Punkten  $\delta$  und  $\varepsilon$  ab, so gilt für die  $m - 1$ -punktigen Berührungspunkte der Curven  $\omega_{\mu_i}^{g_i}$  der Satz:

(IIIa) Unter den Voraussetzungen des Satzes (III) berühren

die Curven  $\omega_{\mu_i}^{g_i} = 0$  ausser  $F = 0$  noch sämmtlich  $m - 1$ -punktig eine bestimmte Curve  $Q_1 = 0$  vom Grade  $mk - n$ , wo sie derselben begegnen. Die sämmtlichen Berührungspunkte der Curven  $\omega_{\mu_i}^{g_i} = 0$  mit  $F = 0$  und mit  $Q_1 = 0$  liegen auf einer bestimmten Curve  $Q = 0$  vom Grade  $k$ .<sup>1)</sup>

### § 36. Specielle Darstellungen. Eigenschaften der Abel'schen Functionen.

Die Gleichungen (17) § 34 und (10) § 35 sind die allgemeinsten ihrer Art. Man gewinnt aus ihnen wichtige, specielle Formeln, indem man für  $m$  und  $\varrho$  die niedersten Zahlenwerthe setzt. Der Fall  $m = 1$ ,  $\varrho = 1$  ist offenbar auszuschliessen. Denn für  $m = 1$  sind die ganzen Zahlen  $\mu$ ,  $\mu'$  und  $\nu$ ,  $\nu'$  in jenen Gleichungen sämmtlich gleich 0 zu setzen (da sie nur bis  $m - 1$  gehen sollen); ist ausserdem  $\varrho = 1$ , so ist nach (21) § 34  $A_h' \equiv B_h'$  ( $h = 1, \dots, p$ ) d. h. der Ausdruck (17) § 34 und ebenso (10) § 35 reducirt sich auf die Einheit. Wir betrachten daher im Folgenden als die einfachsten, speciellen Fälle  $\varrho = 1$ ,  $m > 1$  und  $m = 1$ ,  $\varrho > 1$ .

Der erste Fall  $\varrho = 1$ ,  $m > 1$  führt auf die Darstellung einfacher Thetaquotienten durch algebraische Functionen<sup>2)</sup>. Wir schicken eine Bemerkung voraus über die Nullpunkte der Thetafunction  $\vartheta_\mu(u)$  mit der  $m$ -theiligen Charakteristik  $(\mu)$ . Die Definition dieser Function war (Gl. 30 § 26):

$$\vartheta_\mu(u) = C \cdot \vartheta\left(u - \frac{1}{m} M\right) e^{-\frac{2}{m} \sum_i \mu_i u_i}, \quad (1)$$

wo

$$M_i = \mu_i \pi i + \sum_k a_{ik} u_k \quad (i, k = 1, \dots, p).$$

Sind wie früher  $\alpha_i^0$  ( $i = 1, \dots, p$ ) die  $p$  Nullpunkte der Function  $\vartheta(u)$  und bezeichnet man die  $p$  0<sup>ten</sup> Punkte der Function (1) (wie bei zweitheiliger Charakteristik) mit  $\alpha_i^\mu$  ( $i = 1, \dots, p$ ), so sind diese Punkte  $\alpha_i^\mu$  nach (7) § 29 bestimmt durch die Congruenzen ( $h = 1, \dots, p$ ):

$$\sum_{i=1}^p \int_{\alpha_i^0}^{\alpha_i^\mu} du_h \equiv \frac{1}{m} M_h, \quad \text{woraus} \quad m \sum_{i=1}^p \int_{\alpha_i^0}^{\alpha_i^\mu} du_h \equiv 0. \quad (2)$$

1) Vgl. die Anmerkung S. 247.

2) H. Stahl, Journ. für Math. Bd. 111. S. 104 ff. (1892).

Hiernach ist die algebraische Bestimmung des Punktsystems  $\alpha_i^\mu$ , das der  $m$ -theiligen Charakteristik  $(\mu)$  zugehört, folgende (vgl. § 29 S. 239). Man lege durch die  $r$  Doppelpunkte  $\delta$  von  $F = 0$  eine Curve  $\chi_0(x) = 0$  von hinreichend hohem Grade  $k$ , die  $F$  in den  $p$  Punkten  $\alpha_i^0$  je  $m - 1$ -punktig berührt. Die übrigen  $s$  Schnittpunkte derselben seien  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_s$ . Dann lässt sich durch die  $r$  Punkte  $\delta$  und die  $s$  Punkte  $\varepsilon$  ein System von Curven  $\chi(x) = 0$  von demselben Grade  $k$  legen, die  $F = 0$  in  $p$  Punkten je  $m - 1$ -punktig berühren. Wegen der Eindeutigkeit des Umkehrproblems entspricht nach (2) jeder  $m$ -theiligen Charakteristik  $(\mu)$  eine solche Curve  $\chi_\mu(x)$  mit  $p$  bestimmten Berührungspunkten, nämlich den Punkten  $\alpha_i^\mu$ , die gleichzeitig die  $p$   $0^1$  Punkte der zugehörigen Thetafunction  $\vartheta_\mu(u)$  (1) sind. Das System der Berührungscurven  $\chi_\mu(x) = 0$  enthält daher ebenso viel Curven, als die Zahl der  $m$ -theiligen Charakteristiken  $(\mu)$  beträgt, d. h.  $m^{2p}$  Curven, die Curve  $\chi_0(x) = 0$ , der Charakteristik  $(\mu) \equiv 0 \pmod{m}$  entsprechend, inbegriffen.

Mit Hilfe der Punkte  $\alpha_i^\mu$  ( $i = 1, \dots, p$ ) ergeben sich zugleich die  $0^1$  Punkte  $x_1, \dots, x_p$  der Function  $\vartheta_\mu(u - c)$  oder auch nach (1) der Function  $\vartheta\left(u - c - \frac{1}{m} M\right)$ . Diese Punkte sind nach (7) § 29 bestimmt durch die Congruenzen

$$\sum_{i=1}^p \int_{\alpha_i^0}^{x_i} du_h \equiv c_h + \frac{1}{m} M_h,$$

oder wegen (2) durch ( $h = 1, \dots, p$ ):

$$(3) \quad \sum_{i=1}^p \int_{\alpha_i^\mu}^{x_i} du_h \equiv c_h,$$

so dass der Satz IV § 29 auch für  $m$ -theilige Charakteristiken gilt.

Wir setzen nun in (17) § 34  $q = 1$  und wählen zur Vereinfachung für die in (20) § 34 definirten Punktsysteme  $a'_k$  und  $b'_k$  bez. die Systeme  $\alpha_k^\mu$  und  $\alpha_k^\nu$ , d. h. die  $0^1$  Punkte der Functionen  $\vartheta_\mu(u)$  und  $\vartheta_\nu(u)$ , so dass die Grössen  $A'_h$  und  $B'_h$  in (20) § 34 übergehen in ( $h = 1, \dots, p$ ):

$$(4) \quad A'_h \equiv \sum_{k=1}^p \int_{\alpha_k^0}^{\alpha_k^\mu} du_h \equiv \frac{1}{m} M_h, \quad B'_h \equiv \sum_{k=1}^p \int_{\alpha_k^0}^{\alpha_k^\nu} du_h \equiv \frac{1}{m} N_h,$$

wodurch die Bedingungen (21) § 34 erfüllt sind. Dann geht der Quotient der linken Seite von (17) § 34 gerade in  $\vartheta_\mu(u) : \vartheta_\nu(u)$  über

und der Quotient der rechten Seite in  $\sqrt[m]{\chi_\mu(x) : \chi_\nu(x)}$ , wo  $\chi_\mu(x)$  und  $\chi_\nu(x)$  die vorhin definirten, den  $m$ -theiligen Charakteristiken  $\mu$  und  $\nu$  entsprechenden  $\chi$ -Functionen sind. Man hat also die Gleichung

$$\frac{\vartheta_\mu(u)}{\vartheta_\nu(u)} = c_{\mu\nu} \sqrt[m]{\frac{\chi_\mu(x)}{\chi_\nu(x)}}, \quad (5)$$

die genau der Gleichung (5) § 30 für zweitheilige Charakteristiken entspricht.

Ersetzt man die Argumente  $u_h$  durch die Integralsummen ( $h=1, \dots, p$ ):

$$V_h = \sum_{k=0}^q \int_{\alpha_k}^{x_k} du_h \quad (6)$$

mit beliebigen  $q+1$  oberen und unteren Grenzpunkten  $x, x_1, \dots, x_q$  und  $\alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_q$ , so erhält man nach (10) § 35 die Gleichung

$$\frac{\vartheta_\mu(V)}{\vartheta_\nu(V)} = C_{\mu\nu} \frac{X_\mu(x, x_1, \dots, x_q)}{X_\nu(x, x_1, \dots, x_q)} \prod_{k=0}^q \frac{X_\nu(x_k)}{X_\mu(x_k)} \sqrt[m]{\frac{\chi_\mu(x_k)}{\chi_\nu(x_k)}}, \quad (7)$$

die eine Verallgemeinerung der Gleichung (9) § 31 für zweitheilige Charakteristiken bildet.

Die Functionen  $X_\mu$  und  $X_\nu$  in (7) sind als Functionen von  $x$  nach § 35 folgendermassen zu bilden. Man lege durch die  $r$  Doppelpunkte  $\delta$  von  $F=0$ , durch die  $p$  in (4) bestimmten Punkte  $\alpha_k^\mu$  und die  $q$  Punkte  $\alpha_1, \dots, \alpha_q$  eine Curve  $X_\mu(x)=0$ , die  $F=0$  noch in  $t$  Punkten  $\xi_1, \dots, \xi_t$  schneidet; alsdann durch die  $r$  Punkte  $\delta$ , die  $t$  Punkte  $\xi$  und die  $q$  Punkte  $x_1, \dots, x_q$  eine Curve desselben Grades  $X_\nu(x, x_1, \dots, x_q)=0$ . Entsprechend sind  $X_\nu(x)$  und  $X_\nu(x, x_1, \dots, x_q)$  zu bilden. Nach (7) hat man den Satz:

(I) Der Quotient zweier Thetafunctionen mit beliebigen,  $m$ -theiligen Charakteristiken  $\mu$  und  $\nu$ , deren Argumente Integralsummen 1. Gattung mit beliebigen, oberen und unteren Grenzpunkten  $x_k$  und  $\alpha_k$  ( $k=0, 1, \dots, q$ ) sind, lässt sich symmetrisch in den Coordinaten dieser zwei Punktsysteme darstellen durch rationale Functionen in Verbindung mit der  $m^{\text{ten}}$  Wurzel aus solchen Functionen.

Man kann die Gleichung (7) weiter specialisiren und dabei, wenn man die Zahl  $q$  und die bisher willkürlichen, unteren Grenzpunkte  $\alpha_k$  der Integrale passend wählt, die rationalen Functionen in (7) durch Wurzelfunctionen ersetzen.

Es sei (wie § 31, S. 252)  $q = p$  und  $\alpha_1, \dots, \alpha_p = \alpha_1^0, \dots, \alpha_p^0$ , d. h. = den  $0^1$  Punkten von  $\mathfrak{P}_0(u)$ , also ( $h = 1, \dots, p$ ):

$$(8) \quad V_h \equiv \int_{\alpha}^x du_h + \sum_{i=1}^p \int_{\alpha_i^0}^x du_h.$$

Die rationale Function  $X_\mu(x, x_1, \dots, x_p) : X_\mu(x)$  ist definiert durch ihre  $2p \infty^1$  Punkte  $\alpha_k^0$  und  $\alpha_k^\mu$  und durch die  $p$  ersten ihrer  $0^1$  Punkte, nämlich  $x_1, \dots, x_p$ . Man kann nun den Nenner  $X_\mu(x)$  ersetzen durch  $\sqrt[m]{\chi_0(x) \chi_\mu(x)}$ . Dies ist eine Wurzelfunction der in § 35 besprochenen Art; sie ist von der Charakteristik  $\mu$ , von der Ordnung  $2p$  und verschwindet in erster Ordnung in den  $2p$  Punkten  $\alpha_k^0$  und  $\alpha_k^\mu$ , in der Ordnung  $\frac{2}{m}$  in den festen Punkten, nämlich den  $r$  Doppelpunkten  $\delta$  und den  $s$  Punkten  $\epsilon$ . Der Zähler  $X_\mu(x, x_1, \dots, x_p)$  muss ebenfalls eine Wurzelfunction von der Charakteristik  $\mu$  und der Ordnung  $2p$  sein mit denselben festen Punkten. Eine solche Function lässt sich nach (II) § 35 durch  $p + 1$  linear unabhängige Functionen derselben Art darstellen in der Form

$$(8a) \quad \sum_{i=0}^p l_i \sqrt[m]{P_\mu^i(x)},$$

wo

$$P_\mu^i(x) = \chi_{\mu_1^i}(x) \chi_{\mu_2^i}(x) \quad \text{und} \quad \mu_1^i + \mu_2^i \equiv \mu \pmod{m}.$$

Bestimmt man die Coefficienten  $l_i$  so, dass der Ausdruck (8a) für  $x = x_1, \dots, x_p$  verschwindet, so hat man den Zähler  $X_\mu(x, x_1, \dots, x_p)$ . Hieraus folgt

$$\begin{aligned} X_\mu(x, x_1, \dots, x_p) &: \prod_{k=0}^p X_\mu(x_k) \\ &= \sum \pm \sqrt[m]{P_\mu^0(x)} \sqrt[m]{P_\mu^1(x_1)} \dots \sqrt[m]{P_\mu^p(x_p)} : \prod_{k=0}^p \sqrt[m]{\chi_0(x_k) \chi_\mu(x_k)} \end{aligned}$$

und weiter aus (7) für die Argumente (8) die Darstellung

$$(9) \quad \frac{\mathfrak{P}_\mu(V)}{\mathfrak{P}_v(V)} = C_{\mu v} \frac{\sum \pm \sqrt[m]{P_\mu^0(x)} \sqrt[m]{P_\mu^1(x_1)} \dots \sqrt[m]{P_\mu^p(x_p)}}{\sum \pm \sqrt[m]{P_v^0(x)} \sqrt[m]{P_v^1(x_1)} \dots \sqrt[m]{P_v^p(x_p)}},$$

eine Verallgemeinerung von (16) § 31.

Der zweite Fall  $m = 1, q > 1$  führt auf die Darstellung von Thetaquotienten durch rationale Functionen und umgekehrt.

Für  $m = 1$  werden die Zahlen  $\mu, \mu'$  und  $v, v'$  in (17) § 34 sämtlich = 0. Die Bedingungen (21) § 34 lauten jetzt ( $h = 1, \dots, p$ ):

$$\sum_{i=1}^q (A_h^i - B_h^i \equiv 0 \quad (10)$$

und, wenn diese Bedingungen erfüllt sind, hat man nach (17) § 34 für die Argumente  $u$  die Gleichung

$$\prod_{i=1}^q \frac{\vartheta(u - A^i)}{\vartheta(u - B^i)} = c \frac{\omega(x, a)}{\omega(x, b)}, \quad (11)$$

wo die Functionen  $\omega(x, a)$  und  $\omega(x, b)$  wie im allgemeinen Fall zu bilden sind, nur mit dem Unterschiede, dass an Stelle der  $m - 1$ -punktigen Berührung jetzt einfaches Schneiden tritt. Unter denselben Bedingungen (10) folgt aus (10) § 35 für die Argumente  $V_h$  (1) § 35 die Gleichung ( $i = 1, \dots, q; k = 0, 1, \dots, q$ ):

$$\prod_{i=1}^q \frac{\vartheta(V - A^i)}{\vartheta(V - B^i)} = C \prod_{ik} \frac{\Omega_a^i(x, x_1, \dots, x_q)}{\Omega_b^i(x, x_1, \dots, x_q)} \frac{\Omega_h^i(x_k)}{\Omega_a^i(x_k)} \frac{\omega(x_k, a)}{\omega(x_k, b)}, \quad (12)$$

in der die Functionen  $\Omega$  wie in § 35 zu bilden sind. Dies gibt den Satz<sup>1)</sup>:

(II) Der Quotient zweier Thetaproducte von gleichviel Factoren mit den Argumenten  $u_h$ , vermindert um Constanten  $A_h^i$  und  $B_h^i$ , die den Congruenzen (10) genügen, oder deren Summen in Zähler und Nenner einander congruent sind, stellt sich als rationale Function der Coordinaten des Punktes  $x$  dar; der entsprechend gebildete Thetaquotient mit den Argumenten  $V_h$  als rationale und symmetrische Function der Coordinaten der  $q+1$  Punkte  $x_k$  und der  $q+1$  Punkte  $\alpha_k$ .

Um auch die umgekehrte Aufgabe zu lösen<sup>2)</sup>, setze man zur Vereinfachung, wie S. 300,  $q = p$  und  $\alpha_1, \dots, \alpha_p = \alpha_1^0, \dots, \alpha_p^0$ ; nimmt man noch  $x = \alpha$ , so treten an Stelle von (1) § 35 als Gleichungen des Umkehrproblems ( $h = 1, \dots, p$ ):

$$U_h \equiv \sum_{i=1}^p \int_{\alpha_i^0}^{x_i} du_h. \quad (13)$$

Es ist zu zeigen, wie sich

- 1) eine rationale Function der Coordinaten von  $x$  durch einen Thetaquotienten der Form (11) in den  $u_h$ ,
- 2) eine rationale und symmetrische Function der Coordinaten der

1) Clebsch u. Gordan, Ab. F. § 63.

2) Clebsch u. Gordan, Ab. F. § 57—59.

$p$  oberen Grenzpunkte  $x_1, \dots, x_p$  von (13) durch einen Thetaquotienten der Form (12) in den  $U_h$  darstellen lässt.

Zur Lösung der ersten Aufgabe sei  $R_x$  eine gegebene, rationale Function der Coordinaten des Punktes  $x$  von der Ordnung  $\sigma$  und seien  $a_1, \dots, a_\sigma$  die Punkte, in denen  $R_x$  den Werth  $R_a$  hat,  $b_1, \dots, b_\sigma$  die Punkte, in denen  $R_x = \infty^1$  wird. Zwischen diesen  $2\sigma$  Punkten bestehen nach dem Abel'schen Theorem (10) § 19 die  $p$  Relationen ( $h = 1, \dots, p$ ):

$$(14) \quad \sum_{k=1}^{\sigma} \int_{b_k}^{a_k} du_h \equiv 0.$$

Sind ferner  $\xi_1, \dots, \xi_{p-1}$  beliebige  $p-1$  Punkte, die nur der Bedingung unterliegen, dass die durch sie bestimmte, adjungirte  $\varphi$ -Curve  $n-3^{\text{ten}}$  Grades durch keinen der Punkte  $a_k$  oder  $b_k$  geht, und setzt man zur Abkürzung

$$(15) \quad \left( \int_a^x du_1 - \sum_{i=1}^p \int_{a_i^0}^{x_i} du_1, \dots, \int_a^x du_p - \sum_{i=1}^p \int_{a_i^0}^{x_i} du_p \right) = (x | x_1, \dots, x_p),$$

so hat man unmittelbar

$$(16) \quad R_x - R_a = c \prod_{k=1}^{\sigma} \frac{\wp(x | \xi_1, \dots, \xi_{p-1}, a_k)}{\wp(x | \xi_1, \dots, \xi_{p-1}, b_k)},$$

wo  $c$  eine von  $x$  unabhängige Constante ist.

Denn der Ausdruck der rechten Seite in (16) wird als Function von  $x$  gleich  $0^1$  in den  $\sigma$  Punkten  $a_k$  und gleich  $\infty^1$  in den  $\sigma$  Punkten  $b_k$ ; er ist ferner, mit Ausnahme der letzteren Punkte in der Fläche  $T$  allenthalben eindeutig und stetig, da die Factoren an den Querschnitten von  $T'$  in Folge der Gleichungen (14) sämmtlich  $=1$  werden; er kann sich daher von der Function der linken Seite nur um einen von  $x$  unabhängigen Factor unterscheiden nach (Ib) § 6. Die Gleichung (16) enthält die gesuchte Darstellung von  $R_x$  durch Thetafunctionen mit den Argumenten  $u_h$  und gibt den Satz:

(III) Die rationale Function  $R_x$  stellt sich dar als Quotient zweier Thetaproducte von gleichviel Factoren mit den Argumenten  $u_h$ , vermehrt um Constanten, deren Summen in Zähler und Nenner nach (14) einander congruent sind.

Die Darstellung (16) der rationalen Function  $R_x$  lässt sich noch mannigfach abändern; so z. B. in die folgende Form<sup>1)</sup>. Ist  $\nu$  eine

1) Klein, Math. Ann. Bd. 36. S. 13 u. 43 (1889).



zweitheilige, ungrade Charakteristik, so ist  $\vartheta_r \left( \left( \int_{\xi}^x du \right) \right)$  nach (III) § 29 als Function von  $x$  gleich  $0^1$  in dem Punkte  $x = \xi$  und den  $p - 1$   $0^1$  Punkten der Wurzelfunction  $\sqrt[p]{\varphi_r(x)}$ . Man hat daher, wie aus den periodischen Eigenschaften von  $\vartheta_r(u)$  und den Gleichungen (14) unmittelbar folgt, wenn man zur Abkürzung

$$\vartheta_r \left( \left( \int_{\xi}^x du \right) \right) = \vartheta_r(x, \xi) \quad (16a)$$

setzt, für  $R_x$  die Darstellung

$$R_x - R_a = C \prod_k \frac{\vartheta_r(x, a_k)}{\vartheta_r(x, b_k)}. \quad (16b)$$

Diese Form legt es nahe, indem man

$$\frac{\varphi_r(x)}{F'^y} = v'_r(x) \quad (16c)$$

setzt, den aus einer Thetafunction und einer algebraischen Function gebildeten Ausdruck

$$E(x, \xi) = a_r \vartheta_r(x, \xi) : \sqrt[p]{v'_r(x) v'_r(\xi)} \quad (16d)$$

einzuführen. Derselbe hat nach (4) § 33, wenn  $a_r$  die in (8) § 33 definirte Constante bedeutet, für alle ungraden, zweitheiligen Charakteristiken denselben Werth. Er hat ferner die Eigenschaft, dass er als Function von  $x$  in  $T$  nirgends  $\infty$  und abgesehen von den Verzweigungspunkten und den Punkten ( $x = \infty, y = \infty$ ) nur  $= 0^1$  wird in dem einen Punkte  $x = \xi$ . Durch Einführung von  $E(x, \xi)$  geht (16b) über in

$$R_x - R_a = C \prod_k \frac{E(x, a_k)}{E(x, b_k)}. \quad (16e)$$

Wir kehren zurück zur Gleichung (16); von ihr aus gelangt man sofort zur Lösung der zweiten Aufgabe, die symmetrischen Functionen der  $p$  Werthe darzustellen, die eine gegebene, rationale Function der Coordinaten von  $x$ , etwa die obige Function  $R_x$ , für die Werthe  $x = x_1, \dots, x_p$  annimmt. Der Ausdruck (16) werde umgeformt, indem man an Stelle der willkürlichen  $p - 1$  Punkte  $\xi_1, \dots, \xi_{p-1}$ , die mit

1) Der Ausdruck  $E(x, \xi)$  ist von Herrn Schottky eingeführt (Journ. für Math. Bd. 101. S. 272. Gl. XXI. 1887); er ist identisch mit der daselbst zur Darstellung einer speciellen Gattung von Fuchs'schen Functionen benutzten Primfunction  $E(x, \xi)$  und von Interesse für den Zusammenhang zwischen den Abel'schen und Fuchs'schen Functionen. Die Function  $E(x, \xi)$  ist nahe verwandt (vgl. auch die zweite Definition von  $E(x, \xi)$  in § 37. Gl. 30) mit der Primfunction, die Herr Weierstrass in seinen Vorlesungen zur Darstellung der rationalen Functionen und Abel'schen Integrale benutzt hat. (Vgl. Ges. W. II S. 244. Brief an Hrn. Schwarz v. 3. Oct. 1875.)

ihnen durch eine  $\varphi$ -Curve verknüpften  $p - 1$  Punkte einführt, die ebenso willkürlich sind und die mit  $x_1, \dots, x_{p-1}$  bezeichnet seien. Dies geschieht durch die Gleichungen (10 § 29), nämlich ( $h = 1, \dots, p$ ):

$$\sum_{i=1}^{p-1} \left( \int_{\alpha_i^0}^{\xi_i} du_h + \int_{\alpha_i^0}^{x_i} du_h \right) + 2 \int_{\alpha_p^0}^{\alpha} du_h \equiv 0,$$

nach denen, wie leicht zu sehen,

$$(x \mid \xi_1, \dots, \xi_{p-1}, \alpha) \equiv - (a \mid x_1, \dots, x_{p-1}, x).$$

Berücksichtigt man, dass die Function  $\vartheta$  gerade ist, und setzt zum Schluss für  $x$  einen beliebigen Punkt  $x_p$ , so folgt aus (16):

$$R_{x_p} - R_a = C_p \prod_{k=1}^{\alpha} \frac{\vartheta(a_k \mid x_1, \dots, x_p)}{\vartheta(b_k \mid x_1, \dots, x_p)},$$

wo  $C_p$  eine von  $x_p$  unabhängige Grösse ist. Fügt man auf der linken Seite einen ebenfalls von  $x_p$  unabhängigen Factor hinzu, so erhält man

$$(17) \quad \prod_{i=1}^p (R_{x_i} - R_a) = C \prod_{k=1}^{\alpha} \frac{\vartheta(a_k \mid x_1, \dots, x_p)}{\vartheta(b_k \mid x_1, \dots, x_p)},$$

wo nunmehr  $C$  unabhängig ist von  $x_1, \dots, x_p$ , da sowohl der Ausdruck der linken wie der rechten Seite symmetrisch ist in  $x_1, \dots, x_p$ . Trägt man in (17) die Werthe  $U_h$  ein, so erhält man

$$(18) \quad \prod_{i=1}^p (R_{x_i} - R_a) = C \prod_{k=1}^{\alpha} \frac{\vartheta \left( \left( U - \int_{\alpha}^{a_k} du \right) \right)}{\vartheta \left( \left( U - \int_{\alpha}^{b_k} du \right) \right)};$$

die Constante  $C$  bestimmt sich, indem man für  $x_1, \dots, x_p$  beliebige Punkte  $\alpha_1, \dots, \alpha_p$  setzt.

Die Gleichung (18) löst die gestellte Aufgabe. Denn die  $p$  Werthe  $R_{x_i}$  sind die Wurzeln der algebraischen Gleichung

$$(19) \quad (R_x - R_{x_1}) \dots (R_x - R_{x_p}) = R_x^p + M_1 R_x^{p-1} + \dots + M_p = 0;$$

die Grössen  $M_1, \dots, M_p$  aber sind die fundamentalen, symmetrischen Functionen der Grössen  $R_{x_i}$ . Bildet man nun die Gleichung (18) für  $p$  verschiedene Werthe von  $R_a$  und die zugehörigen Punktsysteme  $a_k$ , so hat man  $p$  Gleichungen, aus denen sich in linearer Weise die  $p$  symmetrischen Functionen  $M_1, \dots, M_p$  als Functionen der Argumente  $U_h$  (13) ergeben. Hiernach besteht der Satz:

(IV) Die symmetrischen Functionen  $M_1, \dots, M_p$  der  $p$  Grössen  $R_{x_1}, \dots, R_{x_p}$  stellen sich dar durch Thetaquotienten von der Form (18) mit den Argumenten  $U_h$ , vermehrt um Constanten, deren Summen in Zähler und Nenner einander congruent sind.

Die Gleichung (18) erhält man auch durch Vermittelung der Integrale 3. Gattung; wir deuten dies nur an.

Nimmt man das Normalintegral 3. Gattung  $w_{ba}$  (Satz I § 16) zwischen den beliebigen Grenzn  $\alpha_i$  und  $x_i$  und summirt nach  $i$  von 1 bis  $p$ , so hat man (vgl. (5) § 37)

$$\sum_{i=1}^p \int_{\alpha_i}^{x_i} dw_{ba} = \log \frac{\vartheta(u | x_1, \dots, x_p) \vartheta(b | \alpha_1, \dots, \alpha_p)}{\vartheta(b | x_1, \dots, x_p) \vartheta(u | \alpha_1, \dots, \alpha_p)}. \quad (20)$$

Sind nun wieder  $a_k$  und  $b_k$  ( $k = 1, \dots, p$ ) die  $0^1$  und  $\infty^1$  Punkte der Function  $R_x - R_a$ , so ist nach dem Abel'schen Theorem (12) § 19 ( $i = 1, \dots, p$ ):

$$\sum_{k=1}^p \int_{b_k}^{a_k} dw_{a_i x_i} = \log \frac{R_{x_i} - R_a}{R_{\alpha_i} - R_a}. \quad (21)$$

Summirt man (21) nach  $i$ , setzt in (20)  $a_k, b_k$  statt  $a, b$ , summirt nach  $k$  und vertauscht schliesslich Parameter und Argument nach (19) § 18, so folgt durch Vergleichung der beiden Ausdrücke wieder die Gleichung (18).

Die Darstellungen (18) führen zu einer Reihe von Sätzen über Abel'sche Functionen, die kurz zusammengestellt werden sollen; sie bilden eine Verallgemeinerung von bekannten Sätzen über elliptische Functionen (vgl. die Einleitung zum II. Theil). Wir bezeichnen, wenn  $p$  Punkte  $x_1, \dots, x_p$  mit  $p$  Grössen  $U_1, \dots, U_p$  durch die Gleichungen (13) verbunden sind, eine rationale und symmetrische Function der Coordinaten der  $p$  Punkte  $x_i$  allgemein mit  $S(x_1, \dots, x_p)$ . Diese Function soll, wenn sie durch die Grössen  $U_h$  dargestellt ist, eine Abel'sche Function der Argumente  $U_h$  heissen und durch  $\text{Al}(U_1, \dots, U_p)$  bezeichnet sein<sup>1)</sup>; wir schreiben dies

$$S(x_1, \dots, x_p) = \text{Al}(U_1, \dots, U_p) \quad \text{oder} \quad S((x)) = \text{Al}((U)). \quad (22)$$

Es gelten dann die folgenden Sätze:

1) Im Anschluss an eine Bezeichnung von Herrn Weierstrass, Journ. für Math. Bd. 47. S. 291 (1853), oder Ges. W. Bd. I. S. 135.

(V) Die Abel'schen Functionen  $\text{Al}(U_1, \dots, U_p)$  sind eindeutig und im Allgemeinen (d. h. mit Ausnahme von Werthgebieten von weniger als  $2p$  Dimensionen) stetig, und für kein endliches Werthsystem der Argumente  $U_h$  wesentlich singular. Sie sind ferner  $2p$ -fach periodisch, d. h. sie besitzen  $2p$  von einander unabhängige Periodensysteme, die mit den  $2p$  Systemen von Periodicitätsmoduln der Normalintegrale  $u_h$  übereinstimmen.

Dies alles folgt unmittelbar aus den Eigenschaften der Thetafunctionen.

(VI) Die Ableitung einer Abel'schen Function nach einem der Argumente  $U_h$  ist wieder eine Abel'sche Function.

Denn es ist wegen (13)

$$(23) \quad \frac{\partial S}{\partial U_h} = \sum_{i=1}^p \frac{\partial S}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial U_h} = S_i(x_1, \dots, x_p) = \text{Al}_i(U_1, \dots, U_p),$$

wo  $S_i$  ebenfalls eine rationale und symmetrische Function der  $x_i$  und  $\text{Al}_i$  ebenfalls eine Abel'sche Function der  $U_h$  bezeichnet.

(VII) Zwischen je  $p+1$  Abel'schen Functionen, insbesondere zwischen einer Abel'schen Function und ihren  $p$  ersten Ableitungen besteht eine algebraische Gleichung.

Man erhält diese Gleichung durch Bildung einer Reihe von Gleichungen der Form (22) und (23) und Elimination der Coordinaten der  $p$  Punkte  $x_1, \dots, x_p$  mit Benutzung der  $p$  Gleichungen  $F(x_i)=0$ .

(VIII) Jede Abel'sche Function lässt sich rational durch  $p+1$  geeignete Abel'sche Functionen darstellen, insbesondere durch eine Abel'sche Function und deren  $p$  erste Ableitungen.

Man erhält diese Darstellung während des im Beweis von VII erwähnten Eliminationsprocesses.

Hieran schliessen sich weitere Sätze über die Addition, Multiplication und Division der Abel'schen Functionen. Setzt man, unter  $x_i, y_i, z_i$  ( $i=1, \dots, p$ ) drei Punktsysteme verstanden:

$$(24) \quad \sum_i \int_{\alpha_i^0}^{x_i} du_h \equiv U_h, \quad \sum_i \int_{\alpha_i^0}^{y_i} du_h \equiv V_h, \quad \sum_i \int_{\alpha_i^0}^{z_i} du_h \equiv W_h$$

mit der Bedingung, dass

$$(24a) \quad W_h = U_h + V_h \quad (h=1, \dots, p),$$

so folgt nach der Umkehrung des Abel'schen Theorems (Satz VI § 20), dass die rationalen und symmetrischen Functionen der Coordinaten der  $p$  Punkte  $z_i$  rationale und symmetrische Functionen der Coordinaten sowohl der  $p$  Punkte  $x_i$ , wie der  $p$  Punkte  $y_i$ , oder, wenn man Satz VIII berücksichtigt, dass die Abel'schen Functionen der Argumente  $W_h = U_h + V_h$  rationale und symmetrische Functionen von  $p + 1$  Abel'schen Functionen sowohl mit den Argumenten  $U_h$ , wie mit den Argumenten  $V_h$  sind. Sind daher  $S_q(\langle x \rangle) = \text{Al}_q(\langle U \rangle)$  ( $q = 0, 1, \dots, p$ )  $p + 1$  unabhängige Abel'sche Functionen und bezeichnet  $R[A_0, A_1, \dots, A_p; B_0, B_1, \dots, B_p]$  eine rationale Function von  $2p + 2$  Grössen  $A$  und  $B$ , die sich nicht ändert, wenn man  $A_q$  bez. mit  $B_q$  vertauscht, so hat man eine Gleichung von der Form ( $q, \sigma = 0, 1, \dots, p$ ):

$$S(\langle z \rangle) = R[S_0(\langle x \rangle), S_1(\langle x \rangle), \dots, S_p(\langle x \rangle); S_0(\langle y \rangle), S_1(\langle y \rangle), \dots, S_p(\langle y \rangle)]$$

oder

$$\text{Al}(\langle U + V \rangle) = R[\text{Al}_0(\langle U \rangle), \text{Al}_1(\langle U \rangle), \dots, \text{Al}_p(\langle U \rangle); \text{Al}_0(\langle V \rangle), \text{Al}_1(\langle V \rangle), \dots, \text{Al}_p(\langle V \rangle)]. \quad (25)$$

Dies gibt den Satz:

(IX) Eine Abel'sche Function besitzt ein rationales Additionstheorem, d. h. die Function  $\text{Al}$  gebildet mit dem Argumentensystem  $U_h + V_h$ , drückt sich rational und symmetrisch aus durch  $p + 1$  Abel'sche Functionen mit den Argumentensystemen  $U_h$  und  $V_h$ .

Dasselbe folgt unmittelbar aus Satz VIII.

Aus der Gleichung für die Addition ergibt sich die Gleichung für die ganzzahlige Multiplication der Abel'schen Functionen. Ist  $m$  eine ganze, positive Zahl und setzt man ( $i, h = 1, \dots, p$ ):

$$\sum_i \int_{\alpha_i^0}^{z_i} du_h \equiv m \sum_i \int_{\alpha_i^0}^{x_i} du_h \quad \text{oder} \quad W_h \equiv m U_h, \quad (26)$$

so folgt aus (25) als Lösung der Aufgabe, eine Abel'sche Function mit den Argumenten  $m U_h$  durch Abel'sche Functionen mit den Argumenten  $U_h$  darzustellen ( $q = 0, 1, \dots, p$ ):

$$\text{Al}(m U) = R[\text{Al}_0(\langle U \rangle), \text{Al}_1(\langle U \rangle), \dots, \text{Al}_p(\langle U \rangle)]. \quad (27)$$

Die Umkehrung der Multiplication bildet die Division der Abel'schen Functionen, d. h. die Aufgabe, eine Abel'sche Function mit den Argumenten  $U_h$  durch Abel'sche Functionen mit den Argumenten  $m U_h$  darzustellen oder nach (26) eine rationale, symmetrische Function der  $p$  Punkte  $x_i$  als Function der  $p$  Punkte  $z_i$  darzustellen. Die Lösung dieser Aufgabe ist mehrdeutig. Denn ersetzt man in (26) das Congruenzzeichen durch ein Gleichheitszeichen, in-

dem man zugleich auf der linken Seite ein zusammengehöriges Periodensystem zufügt, so erhält man statt (26) ( $i, h = 1, \dots, p$ ):

$$(28) \quad \sum_i \int_{\alpha_i^0}^{x_i} du_h = \frac{1}{m} \sum_i \int_{\alpha_i^0}^{z_i} du_h + \frac{1}{m} M_h,$$

wo

$$M_h = \mu'_h \pi i + \sum_k \mu_h a_{hk}$$

ist und die Zahlen  $\mu, \mu'$  alle Werthe  $0, 1, \dots, m-1$  durchlaufen können. Jeder  $m$ -theiligen Charakteristik ( $\mu$ ) in (28) entspricht eindeutig ein System von  $p$  Punkten  $x_i$ . Da es  $m^{2p}$  verschiedene  $m$ -theilige Charakteristiken gibt, so besitzt das Divisionsproblem (28)  $m^{2p}$  verschiedene Lösungen.

Weitere Fragen betreffen den Zusammenhang zwischen diesen  $m^{2p}$  Lösungen und die Beziehungen derselben zu den Lösungen des speciellen Divisionsproblems (Theilung der Perioden), das entsteht, wenn man in (28) die Punkte  $z_1, \dots, z_p$  mit  $\alpha_1^0, \dots, \alpha_p^0$  zusammenfallen lässt. Dies Problem ist schon früher, z. B. Gl. (4), aufgetreten in der Form

$$(29) \quad \sum_i \int_{\alpha_i^0}^{\alpha_i^u} du_h = \frac{1}{m} M_h,$$

wo die  $p$  Punkte  $\alpha_i^0$  gegeben sind und die Coordinaten der  $p$  Punkte  $\alpha_i^u$  ( $i = 1, \dots, p$ ) oder auch ihre rationalen und symmetrischen Functionen durch die  $p$  Punkte  $\alpha_i^0$  darzustellen sind.

Zwischen dem allgemeinen und dem speciellen Theilungsproblem besteht ein Zusammenhang, den wir nur andeuten<sup>1)</sup>. Gehören in (28) zu einem Periodensystem  $M_h$  die Lösungen  $x_1, \dots, x_p$ , zu einem anderen Periodensystem  $M'_h$  die Lösungen  $x'_1, \dots, x'_p$  und gehören in (29) zu dem Periodensystem  $M_h - M'_h$  die Lösungen  $\alpha_1^{uu'}, \dots, \alpha_p^{uu'}$ , so erhält man aus den zugehörigen Gleichungen durch Elimination der  $z_i$

$$(30) \quad \sum_i \int_{x_i}^{x'_i} du_h + \sum_i \int_{\alpha_i^0}^{\alpha_i^{uu'}} du_h = 0,$$

d. h. nach dem Abel'schen Theorem (IV § 20): Kennt man die sämtlichen Lösungen des speciellen Theilungsproblems (29) und die Lösung  $x_1, \dots, x_p$  des allgemeinen Theilungsproblems (28) für ein Perioden-

1) Clebsch u. Gordan, Ab. F. § 68 ff.

system  $M_h$ , so ergeben sich daraus auf algebraischem Wege die Lösungen  $x'_1, \dots, x'_p$  des allgemeinen Theilungsproblems für jedes andere Periodensystem  $M'_h$ . Man kann diesen Zusammenhang besonders einfach aussprechen, wenn man die Lösung des speciellen Theilungsproblems von einer einzigen Gleichung abhängig macht, wie dies in § 32 für  $m = 2$  durch die Gleichung  $R(r) = 0$  vom Grade  $2^{2p}$  in  $r$  geschah. In ähnlicher Weise hängt die Lösung des speciellen Theilungsproblems (29) von der Lösung einer einzigen Gleichung  $P(q) = 0$  ab (der sogen. speciellen Theilungsgleichung), die vom Grade  $m^{2p} - 1$  in  $q$  ist (da hier das System  $\alpha_i^0$  gegeben ist) und die Lösung des allgemeinen Theilungsproblems (30) von einer einzigen Gleichung  $T(\tau) = 0$  (der sogen. allgemeinen Theilungsgleichung), die vom Grade  $m^{2p}$  in  $\tau$  ist, und es gilt der Satz:

(X) Jede Wurzel  $\tau'$  der Gleichung  $T = 0$  stellt sich dar in der Form  $\tau' = \Theta(\tau, q)$ , wo  $\Theta$  eine gewisse, rationale Function von  $\tau$  und  $q$  ist und  $\tau$  irgend eine Wurzel von  $T = 0$ ,  $q$  aber eine bestimmte Wurzel von  $P = 0$  ist. Man erhält alle Wurzeln  $\tau'$  der Reihe nach, wenn man für  $q$  der Reihe nach alle Wurzeln von  $P = 0$  setzt.

Hieraus folgt: Die allgemeine Theilungsgleichung  $T = 0$  ist eine Abel'sche Gleichung und algebraisch (durch Wurzelzeichen) lösbar, wenn die specielle Theilungsgleichung  $P = 0$  gelöst ist. Die letztere Gleichung lässt sich zwar mit Hilfe der Relationen, die zwischen ihren Wurzeln  $q$  bestehen (und die von ähnlicher Art sind wie für die Wurzeln der Gleichung  $R = 0$  im Fall  $m = 2$ ), auf einfachere Gleichungen zurückführen, aber nicht algebraisch lösen.

### § 37. Beziehungen zwischen Thetafunctionen und Abel'schen Integralen.

In § 35 wurden unter Voraussetzung der Gleichungen ( $h = 1, \dots, p$ ):

$$\sum_{k=0}^q \int_{\alpha_k}^{x_k} du_h \equiv V_h \quad (1)$$

Beziehungen zwischen Thetafunctionen und algebraischen Functionen betrachtet. Ebenso sollen jetzt Beziehungen zwischen Thetafunctionen mit den Argumenten  $V_h$  und Abel'schen Integralen, gebildet mit den Coordinaten der Punkte  $x_k$ , untersucht werden. Es wird sich zeigen, dass die Darstellung von  $\log \vartheta_\mu(V)$  auf Integrale 3. Gattung führt, die der ersten Ableitungen von  $\log \vartheta_\mu(V)$  nach den Argumenten  $V_h$

auf Integrale 2. Gattung und die der zweiten und höheren Ableitungen von  $\log \vartheta_\mu(V)$  nach den  $V_h$  auf rationale Functionen, alle diese Ausdrücke symmetrisch gebildet in den Coordinaten der Punkte  $x_k$ . Umgekehrt erhält man gleichzeitig die Darstellung von Integralen 3. Gattung, von Integralen 2. Gattung und von algebraischen Functionen durch Logarithmen von Thetafunctionen mit den Argumenten  $V_h$  und durch die ersten und höheren Ableitungen dieser Logarithmen nach den Argumenten  $V_h$ .

Wir gehen aus von dem Thetaquotienten<sup>1)</sup> ( $i = 1, \dots, p$ ):

$$(2) \quad \vartheta_\mu \left( \left( \int_\alpha^x du - \sum_i \int_{\alpha_i^\mu}^{\xi_i} du \right) : \vartheta_\mu \left( \left( \int_\alpha^x du - \sum_i \int_{\alpha_i^\mu}^{\eta_i} du \right) \right),$$

in welchem  $\mu$  eine beliebige,  $m$ -theilige Charakteristik,  $\xi_i$  und  $\eta_i$  ( $i = 1, \dots, p$ ) sowie  $x$  beliebig gegebene Punkte seien und  $\alpha_i^\mu$  ( $i = 1, \dots, p$ ) die  $p$   $0^1$  Punkte der Function  $\vartheta_\mu(u)$  (1) § 36. Der Ausdruck (2) wird, als Function von  $x$  betrachtet, in der Verzweigungsfläche  $T$  gleich  $0^1$  in den  $p$  Punkten  $\xi_i$  und gleich  $\infty^1$  in den  $p$  Punkten  $\eta_i$  (nach (3) § 36); er hat ferner an dem Querschnitt  $a_h$  von  $T'$  den Factor 1, an  $b_h$  nach (10) § 26 den Factor

$$(3) \quad e^{\sum_i \int_{\eta_i}^{\xi_i} du_h}.$$

Betrachtet man andererseits den Ausdruck

$$(4) \quad e^{\sum_i \int_y^x dw_{\eta_i} \xi_i},$$

in dem  $w_{\eta_i} \xi_i$  ein Normalintegral 3. Gattung mit den Unstetigkeitspunkten  $\eta_i$  und  $\xi_i$  ist und  $y$  ein beliebiger Punkt, so wird derselbe, als Function von  $x$  betrachtet, in  $T$  ebenfalls gleich  $0^1$  in den  $p$  Punkten  $\xi_i$ , gleich  $\infty^1$  in den  $p$  Punkten  $\eta_i$  (nach (I) § 16) und hat an den Querschnitten  $a_h$  von  $T'$  den Factor 1, an  $b_h$  den Factor (3) (nach (15) § 18). Der Quotient von (2) und (4) ist daher eine Function von  $x$ , die in der Verzweigungsfläche  $T$  allenthalben stetig ist; er ist also nach (Ib) § 6 eine von  $x$  unabhängige Constante. Bestimmt man diese durch die Substitution  $x=y$  und geht vom Numerus zum Logarithmus über, so hat man die fundamentale Gleichung ( $i = 1, \dots, p$ ):

1) Riemann, Ges. W. S. 130.



$$\log \frac{\vartheta_{\mu} \left( \int_{\alpha}^x du - \sum_i \int_{\alpha_i^u}^{\xi_i} du \right) \vartheta_{\mu} \left( \int_{\alpha}^y du - \sum_i \int_{\alpha_i^u}^{\eta_i} du \right)}{\vartheta_{\mu} \left( \int_{\alpha}^x du - \sum_i \int_{\alpha_i^u}^{\eta_i} du \right) \vartheta_{\mu} \left( \int_{\alpha}^y du - \sum_i \int_{\alpha_i^u}^{\xi_i} du \right)} = \sum_i \int_y^x dw_{\eta_i \xi_i} = \sum_i \int_{\eta_i}^{\xi_i} dw_{yx}. \quad (5)$$

Dabei sind in den Integralsummen der 3. Gattung bestimmte Integrationswege vorausgesetzt. Der letzte Integralausdruck in (5) geht aus dem vorletzten hervor durch den Vertauschungssatz von Parameter und Argument bei den Integralen 3. Gattung (Gl. 19 § 18).

Die Thetafunctionen in (5) enthalten  $p$ -gliedrige Integralsummen 1. Gattung, deren obere Grenzpunkte  $\xi_i$  und  $\eta_i$  beliebig sind, während die unteren Grenzpunkte  $\alpha_i^u$  von  $\alpha$  abhängen. Mit Hilfe des Abel'schen Theorems gewinnt die Gleichung (5) eine allgemeinere und symmetrischere Form<sup>1)</sup>. Versteht man nämlich unter  $x_1, \dots, x_q; y_1, \dots, y_p; \alpha_1, \dots, \alpha_q$  drei Systeme von je  $q$  beliebigen Punkten und definiert die  $p$  Punkte  $\xi_i$  und  $\eta_i$  in (5) durch die Congruenzen ( $h = 1, \dots, p$ ):

$$\sum_{i=1}^p \int_{\alpha_i^u}^{\xi_i} du_h + \sum_{k=1}^q \int_{\alpha_k}^{x_k} du_h \equiv 0, \quad \sum_{i=1}^p \int_{\alpha_i^u}^{\eta_i} du_h + \sum_{k=1}^q \int_{\alpha_k}^{y_k} du_h \equiv 0, \quad (6)$$

so ist

$$\sum_{i=1}^p \int_{\eta_i}^{\xi_i} du_h + \sum_{k=1}^q \int_{y_k}^{x_k} du_h \equiv 0. \quad (7)$$

Aus dem ersten System (6) folgt nach IV § 20 die Existenz einer rationalen Function der Coordinaten von  $x$ , die in den  $q + p$  Punkten  $\alpha_k$  und  $\alpha_i^u$  gleich  $\infty^1$  und in den  $q + p$  Punkten  $x_k$  und  $\xi_i$  gleich  $0^1$  wird. Der Nenner  $X_{\mu}(x)$  dieser Function wird erhalten, indem man eine Curve  $X_{\mu}(x) = 0$  bestimmt, die durch die  $r$  Doppelpunkte  $\delta$  von  $F = 0$ , durch die  $p$  Punkte  $\alpha_i^u$  und die  $q$  Punkte  $\alpha_k$  hindurchgeht. Diese Curve wird  $F = 0$  noch in weiteren Punkten  $\xi_1, \dots, \xi_t$  schneiden. Legt man nun durch die  $r$  Punkte  $\delta$ , die  $t$  Punkte  $\xi$  und die  $q$  Punkte  $x_1, \dots, x_q$  eine Curve desselben Grades  $X_{\mu}(x, x_1, \dots, x_q) = 0$ , so sind die  $p$  letzten Schnittpunkte derselben nach (6) gerade die  $p$  Punkte  $\xi_i$ . Die Functionen  $X_{\mu}(x)$  und  $X_{\mu}(x, x_1, \dots, x_q)$  sind genau dieselben, die auf S. 299 gebildet wurden. Entsprechend erhält man zu dem zweiten System (6) eine Function, deren Nenner wieder durch die Curve  $X_{\mu}(x) = 0$  und deren Zähler durch eine Curve

1) H. Stahl, Journ. für Math. Bd. 111. S. 102 ff. (1892).

$X_\mu(x, y_1, \dots, y_q) = 0$  bestimmt ist, die durch die  $q$  Punkte  $y_1, \dots, y_q$  gelegt ist und alsdann  $F = 0$  gerade noch in den  $p$  Punkten  $\eta_i$  schneidet. Der Quotient  $X_\mu(x_1, \dots, x_q) : X_\mu(x, y_1, \dots, y_q)$  ist die nach (7) existirende, rationale Function, welche die  $q + p$  Punkte  $x_k$  und  $\xi_i$  zu  $0^1$ , die  $q + p$  Punkte  $y_k$  und  $\eta_i$  zu  $\infty^1$  Punkten hat. Diese Function gibt nach dem Abel'schen Theorem für das Integral 3. Gattung  $w_{yx}$  (V § 19) die Gleichung:

$$(8) \quad \sum_{i=1}^p \int_{\eta_i}^{\xi_i} dw_{yx} + \sum_{k=1}^q \int_{y_k}^{x_k} dw_{yx} = \log \frac{X_\mu(x, x_1, \dots, x_q)}{X_\mu(x, y_1, \dots, y_q)} \frac{X_\mu(y, y_1, \dots, y_q)}{X_\mu(y, x_1, \dots, x_q)}.$$

Ersetzt man nun in (5) die Punkte  $\xi_i$  und  $\eta_i$  nach (6) und (8) durch die Punkte  $x_k$  und  $y_k$  und schreibt zur Abkürzung

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left( \int_{\alpha}^{x_k} du_1, \dots, \int_{\alpha}^{x_k} du_p \right) = [x_k] \\ \left( \sum_{k=0}^q \int_{\alpha_k}^{x_k} du_1, \dots, \sum_{k=0}^q \int_{\alpha_k}^{x_k} du_p \right) = [x, x_1, \dots, x_q], \end{array} \right.$$

so erhält man

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \log \frac{\vartheta_\mu[x, x_1, \dots, x_q]}{\vartheta_\mu[x, y_1, \dots, y_q]} \frac{\vartheta_\mu[y, y_1, \dots, y_q]}{\vartheta_\mu[y, x_1, \dots, x_q]} \\ = \sum_{k=1}^q \int_{\alpha_k}^{x_k} dw_{xy} + \log \frac{X_\mu(x, x_1, \dots, x_q)}{X_\mu(x, y_1, \dots, y_q)} \frac{X_\mu(y, y_1, \dots, y_q)}{X_\mu(y, x_1, \dots, x_q)}, \end{array} \right.$$

oder, wenn man die willkürlichen Punkte  $y, y_1, \dots, y_q$  gleich  $\alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_q$  setzt, den von  $x$  unabhängigen Theil absondert, den Satz von der Vertauschung von Parameter und Argument bei Integralen 3. Gattung (VI § 18) anwendet und berücksichtigt, dass  $X_\mu(x, \alpha_1, \dots, \alpha_q) = X_\mu(x)$  ist,

$$\left\{ \begin{array}{l} \log \vartheta_\mu[x, x_1, \dots, x_q] - \log \vartheta_\mu[x] \\ = \sum_{k=1}^q \int_{\alpha}^{x_k} dw_{x_k \alpha_k} + \log X_\mu(x, x_1, \dots, x_q) - \log X_\mu(x) + C_\mu, \end{array} \right.$$

wo  $C_\mu$  eine von  $x$  unabhängige Grösse ist. Durch Hinzufügung von Gliedern, die ebenfalls von  $x$  unabhängig sind, erhält man

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \log \frac{\vartheta_\mu[x, x_1, \dots, x_q]}{\vartheta_\mu[x] \vartheta_\mu[x_1] \dots \vartheta_\mu[x_q]} = \sum_{i=0}^q \sum_{k=0}^{q'} \int_{\alpha_k}^{x_k} dw_{x_i \alpha_i} \\ + \log \frac{X_\mu(x, x_1, \dots, x_q)}{X_\mu(x) X_\mu(x_1) \dots X_\mu(x_q)} + A_\mu, \end{array} \right.$$

wo in der Doppelsumme der rechten Seite die Glieder, für welche  $i = k$  ist, ausgeschlossen sind und jede Combination  $i, k$  nur einmal zu nehmen ist, was durch das Komma an dem Summenzeichen angedeutet sei. Die Grösse  $A_\mu$  ist unabhängig von  $x, x_1, \dots, x_q$ , da die Ausdrücke auf beiden Seiten in (11) für diese Punkte symmetrisch gebildet sind; sie bestimmt sich am einfachsten durch die Substitution  $x, x_1, \dots, x_q = \alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_q$ ; man erhält

$$A_\mu = \log \frac{X_\mu(\alpha_1) \dots X_\mu(\alpha_q)}{\vartheta_\mu[\alpha_1] \dots \vartheta_\mu[\alpha_q]}, \quad (12)$$

da die Integralsumme auf der rechten Seite in (11) durch die Substitution verschwindet.

Es bleibt noch  $\vartheta_\mu[x_k]$  zu bestimmen. Hierzu setze man in (5)  $x_k$  für  $x$ , ferner  $y = \alpha$ ,  $\xi_i = \alpha_i^u$  und für  $\eta_1, \dots, \eta_p$   $p$  Punkte  $b_1^k, \dots, b_p^k$ , definirt durch die Congruenzen ( $h = 1, \dots, p$ ):

$$2 \sum_{i=1}^p \int_{\alpha_i^u}^{b_i^k} du_h \equiv \int_{\alpha}^{x_k} du_h. \quad (13)$$

Danu erhält man, wie leicht zu sehen,

$$\log \vartheta_\mu[x_k] - \log \vartheta_\mu(0) \equiv \sum_{i=1}^p \int_{\alpha_i^u}^{b_i^k} dw_{x_k \alpha} - \frac{2}{m} \sum_{h=1}^p \int_{\alpha}^{x_k} u_h du_h. \quad (14)$$

Die  $p$  Punkte  $b_i^k$  lassen sich aus (13) auf  $2^{2p}$  Arten bestimmen; es ist gleichgültig, welches dieser Systeme man wählt. Von der Bestimmung von  $\vartheta_\mu(0)$  durch invariante Klassenmoduli war schon in § 33 die Rede. Trägt man die Werthe (14) und (12) in (11) ein, so hat man die Darstellung von

$$\log \vartheta_\mu[x, x_1, \dots, x_q] = \log \vartheta_\mu(V_1, \dots, V_p) \quad (15)$$

durch Integrale 3. Gattung und algebraische Functionen; sie enthält den Satz:

(I) Der Logarithmus einer Thetafunction mit beliebiger,  $m$ -theiliger Charakteristik, deren Argumente Integralsummen erster Gattung mit einer beliebigen Zahl  $q+1$  von Gliedern und mit beliebigen oberen und unteren Grenzpunkten  $x_k$  und  $\alpha_k$  ( $k = 0, 1, \dots, q$ ) sind, lässt sich symmetrisch in den Coordinaten dieser zwei Punktsysteme darstellen durch Logarithmen von rationalen Functionen und durch Integrale dritter Gattung, deren Grenz- und

Unstetigkeits-Punkte ausser  $x_k$  und  $\alpha_k$  selber nur noch Punkte enthalten, welche von  $x_k$  und  $\alpha_k$  algebraisch abhängen.

Sind  $(u)$  und  $(v)$  zwei verschiedene,  $m$ -theilige Charakteristiken, so folgt aus (11) mit Rücksicht auf (5) § 36 wieder die Gleichung (7) § 36 und der Satz I § 36.

Wir kommen weiter zur Darstellung der Ableitungen von  $\log \vartheta_\mu(V)$  nach den Argumenten  $V_h$ .<sup>1)</sup> Hierzu setzen wir  $q = p$ , also  $(h = 1, \dots, p)$ :

$$(16) \quad V_h \equiv \sum_{k=0}^p \int_{\alpha_k}^{x_k} du_h.$$

Zunächst erhält man aus (14) durch Differentiation nach  $x_k$ , wenn  $t_{x_k}$  ein Normalintegral 2. Gattung mit dem Unstetigkeitspunkt  $x_k$  ist (§ 16) ( $i, h = 1, \dots, p$ ):

$$(17) \quad \frac{\partial \log \vartheta_\mu[x_k]}{\partial x_k} = \sum_i \left( \frac{\partial w_{x_k} \alpha}{\partial x} \right)_{b_i^k} \frac{\partial b_i^k}{\partial x_k} + \sum_i \int_{\alpha_i}^{b_i^k} dt_{x_k} - \frac{2}{m} \sum_h u_h \left( \frac{\partial u_h}{\partial x} \right)_{x_k},$$

wobei  $\frac{\partial b_i^k}{\partial x_k}$  nach (13) bestimmt ist aus

$$\sum_i \left( \frac{\partial u_h}{\partial x} \right)_{b_i^k} \frac{\partial b_i^k}{\partial x_k} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_h}{\partial x} \right)_{x_k}.$$

Ferner ergibt sich aus (11)

$$(18) \quad \frac{\partial \log \vartheta_\mu[x, x_1, \dots, x_p]}{\partial x_k} = \sum_{i=1}^p \int_{\alpha_i}^{x_i} dt_{x_k} + \frac{\partial \log X_\mu(x, x_1, \dots, x_p)}{\partial x_k} \frac{X_\mu(x, x_1, \dots, x_p)}{X_\mu(x_k)},$$

wo das Komma am Summenzeichen andeutet, dass der Werth  $i = k$  auszuschliessen ist.

Trägt man den Werth (17) in (18) ein, so folgt ein Ausdruck für  $(k = 0, 1, \dots, p)$ :

$$(19) \quad \frac{\partial \log \vartheta_\mu[x, x_1, \dots, x_p]}{\partial x_k} = \frac{\partial \log \vartheta_\mu(V_1, \dots, V_p)}{\partial x_k} = P_k,$$

oder für

$$(20) \quad d \log \vartheta_\mu(V) = P dx + P_1 dx_1 + \dots + P_p dx_p,^{2)}$$

1) Riemann, Ges. W. S. 132 und die Ausführungen von Thomae, Journ. für Math. Bd. 66. S. 94 ff. (1865) und Bd. 71. S. 212 ff. (1869).

2) Weierstrass, für hyperelliptische Functionen, Journ. für Math. Bd. 47. S. 300. Gl. 35 (1853).

wo die  $P_k$  aus Integralen 2. Gattung und algebraischen Functionen in den Punkten  $x_k$  und  $\alpha_k$  ( $k = 0, 1, \dots, p$ ) gebildet sind. Schreibt man die Gleichungen (19) in der Form ( $k = 0, 1, \dots, p$ ):

$$\sum_{h=1}^p \frac{\partial \log \vartheta_{\mu}(V)}{\partial V_h} \left( \frac{\partial u_h}{\partial x} \right)_{x=x_k} = P_k \quad (21)$$

und setzt abkürzend  $\left( \frac{\partial u_h}{\partial x} \right)_{x_k} = \frac{\partial u_h}{\partial x_k}$ , so folgt

$$\begin{vmatrix} P & \frac{\partial u_1}{\partial x} & \dots & \frac{\partial u_p}{\partial x} \\ P_1 & \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial u_p}{\partial x_1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ P_p & \frac{\partial u_p}{\partial x_p} & \dots & \frac{\partial u_p}{\partial x_p} \end{vmatrix} = 0. \quad (22)$$

Lässt man in (21) die erste Gleichung ( $k = 0$ ) weg und setzt

$$D = \sum \pm \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \dots \frac{\partial u_p}{\partial x_p}, \quad (23)$$

so folgt ( $h = 1, \dots, p$ ):

$$\frac{\partial \log \vartheta_{\mu}(V)}{\partial V_h} = \sum_{l=1}^p \frac{\partial \log D}{\partial \left( \frac{\partial u_h}{\partial x_l} \right)} P_l. \quad (24)$$

Diese Gleichung enthält den Satz:

(II) Die ersten Ableitungen von  $\log \vartheta_{\mu}(V)$  nach den Argumenten  $V_h$  (16) stellen sich dar durch Integrale zweiter Gattung und algebraische Functionen, symmetrisch gebildet in den Coordinaten der oberen und unteren Grenzpunkte  $x_k$  und  $\alpha_k$  ( $k = 0, 1, \dots, p$ ) der Integralsummen  $V_h$ .

Auf gleichem Wege ergeben sich aus (24) die höheren Ableitungen von  $\log \vartheta_{\mu}(V)$  nach den  $V_h$ . Auf der rechten Seite in (24) kommt die Variable  $x$  nur in den Grössen  $P_l$  ( $l = 1, \dots, p$ ) vor und zwar ist nach (18) in  $P_l$  der von  $x$  abhängige Theil

$$\int_a^x dt_{x_l} + \frac{\partial \log X_{\mu}(x, x_1, \dots, x_p)}{\partial x_l}.$$

Daher erhält man durch Differentiation von  $P_l$  nach  $x$

$$\frac{\partial P_l}{\partial x} = P_{l0} = \frac{\partial t_l}{\partial x} + \frac{\partial^2 \log X_{\mu}(x, x_1, \dots, x_p)}{\partial x_l \partial x}$$

und dieser Ausdruck ist eine rationale Function von  $x, x_1, \dots, x_p$ . Aus (24) folgt nun

$$(25) \quad \sum_{k=1}^p \frac{\partial^2 \log \vartheta_\mu(V)}{\partial V_h \partial V_k} \frac{\partial u_k}{\partial x} = \sum_{l=1}^p \frac{\partial \log D}{\partial \left( \frac{\partial u_h}{\partial x_l} \right)} P_{l0},$$

wo die rechte Seite wieder eine rationale Function in  $x, x_1, \dots, x_p$  ist. Bildet man die entsprechende Gleichung statt für  $x$  für  $x_1, \dots, x_p$ , so hat man ein ähnliches System wie (21), aus dem sich durch Auflösung die Werthe der zweiten Ableitungen von  $\log \vartheta_\mu(V)$  nach den  $V_h$  ergeben. Hiernach gilt der Satz (vgl. (22) § 36):

(III) Die zweiten Ableitungen von  $\log \vartheta_\mu(V)$  nach den Argumenten  $V_h$  (16) stellen sich dar als rationale und symmetrische Functionen der Coordinaten der  $p+1$  Punkte  $x, x_1, \dots, x_p$ . Sie sind also  $2p$ -fach periodische oder Abel'sche Functionen der Argumente  $V_h$ .

Durch Wiederholung des Differentiationsprocesses erhält man ebenso die dritten und höheren Ableitungen von  $\log \vartheta_\mu(V)$  nach den  $V_h$  als rationale und symmetrische Functionen der Punkte  $x, x_1, \dots, x_p$  oder als Abel'sche Functionen der Argumente  $V_h$ .

Die entwickelten Gleichungen enthalten nun auch umgekehrt die Darstellung von Abel'schen Integralen<sup>1)</sup> und rationalen Functionen durch Logarithmen von Thetafunctionen mit beliebiger,  $m$ -theiliger Charakteristik und deren Ableitungen. So hat man in (10) die Darstellung einer Summe von  $q$  Integralen 3. Gattung mit denselben Unstetigkeitspunkten, aber beliebigen, oberen und unteren Grenzpunkten und, wenn man nach  $x$  differenzirt, die Darstellung einer Summe von  $q$  Integralen 2. Gattung mit demselben Unstetigkeitspunkt und beliebigen Grenzpunkten. Hierin ist auch die Darstellung eines einzelnen Integrales 3. oder 2. Gattung durch Thetafunctionen enthalten, wenn man  $q = 1$  setzt, nämlich:

$$(26) \quad \int_{y_1}^{x_1} dw_{xy} = \log \frac{\vartheta_\mu[x, x_1] \vartheta_\mu[y, y_1]}{\vartheta_\mu[x, y_1] \vartheta_\mu[y, x_1]} - \log \frac{X_\mu(x, x_1) X_\mu(y, y_1)}{X_\mu(x, y_1) X_\mu(y, x_1)},$$

$$(27) \quad \int_{y_1}^{x_1} dt_x = \frac{\partial \log \vartheta_\mu[x, x_1]}{\partial x} \frac{1}{\vartheta_\mu[x, y_1]} - \frac{\partial \log X_\mu(x, x_1)}{\partial x} \frac{1}{X_\mu(x, y_1)}.$$

Aus der letzten Gleichung erhält man durch Differentiation nach  $x_1$  die Darstellung einer rationalen Function

1) Riemann, Ges. W. S. 132.

$$\left(\frac{dt_x}{\partial x}\right)_{x=x_1} = \frac{\partial^2 \log}{\partial x \partial x_1} \vartheta_\mu[x, x_1] - \frac{\partial^2 \log}{\partial x \partial x_1} X_\mu(x, x_1). \quad (28)$$

Aus (26) ergibt sich auch der Vertauschungssatz der Integrale 3. Gattung (19) § 18, da man  $y_1$  mit  $x$  und  $x_1$  mit  $y$  vertauschen kann, ohne dass sich die rechte Seite der Gleichung ändert. Ebenso folgt aus (28) der Vertauschungssatz für die Differentiale 2. Gattung (17) § 18.

Da sich nach (II) § 17 jede rationale Function von  $x$  als Summe von Integralen 2. Gattung darstellen lässt, so kann man nach (27) eine solche Function auch durch die ersten logarithmischen Ableitungen von Thetafunctionen darstellen.

Man kann die Darstellung (26) des Integrals 3. Gattung durch Thetafunctionen noch mannigfach abändern; man braucht z. B. nur die Riemann'sche Gleichung (5) zu specialisiren. Setzt man in derselben statt der allgemeinen,  $m$ -theiligen Charakteristik  $\mu$  eine zweitheilige, ungrade Charakteristik  $\nu$  und demgemäss  $\alpha_p^r = \alpha$  (§ 29. S. 239); setzt man ferner  $\xi_i = \eta_i = \alpha_i^r$  ( $i = 1, \dots, p-1$ ), schreibt schliesslich  $\xi, \eta$  für  $\xi_p, \eta_p$  und benutzt wieder die Abkürzung (16a) § 36, so folgt:

$$\int_{\eta}^{\xi} dw_{yx} = \int_y^x dw_{\eta\xi} = \log \frac{\vartheta_\nu(x, \xi) \vartheta_\nu(y, \eta)}{\vartheta_\nu(x, \eta) \vartheta_\nu(y, \xi)} = \log \frac{E(x, \xi) E(y, \eta)}{E(x, \eta) E(y, \xi)}, \quad (29)$$

wo  $E(x, \xi)$  die in (16d) § 36 eingeführte Primfunction ist.

Die Gleichung (29) führt zu einer zweiten Definition der Function  $E$ . Setzt man nämlich in (29)  $x = \xi + d\xi$ ,  $y = \eta + d\eta$  und wendet die Formeln (5—8) § 33, sowie die Bezeichnung (16c) § 36 an, so erhält man, wenn zur Abkürzung

$$\int_y^x dw_{\eta\xi} = w_{\eta\xi}^{yx}$$

gesetzt und  $\lim d\xi = 0$ ,  $\lim d\eta = 0$  genommen wird:

$$-e^{w_{\eta\xi}^{y_1+d_1\xi+d\xi}} = \frac{\vartheta_\nu(\xi+d\xi, \xi) \vartheta_\nu(\eta+d\eta, \eta)}{[\vartheta_\nu(\xi, \eta)]^2} = \frac{v'_\nu(\xi) v'_\nu(\eta)}{a_\nu^2 [\vartheta_\nu(\xi, \eta)]^2} d\xi d\eta$$

und hieraus statt (16d) § 36:

$$[E(\xi, \eta)]^2 = -e^{w_{\eta\xi}^{y_1+d_1\xi+d\xi}} d\xi d\eta. \quad (30)$$

Hier ist also  $E(\xi, \eta)$  aus dem Integral 3. Gattung durch einen Grenzübergang definiert<sup>1)</sup>.

1) Diesen Grenzübergang gibt Herr Schottky (Journ. für Math. Bd. 101.

An die Darstellung der Abel'schen Integrale durch Thetafunctionen schliessen sich endlich die Gleichungen für die Addition der Abel'schen Integrale<sup>1)</sup> an, analog gebildet den Gleichungen für die Addition der Abel'schen Functionen (25) § 36. Setzt man wie dort ( $i, h = 1, \dots, p$ ):

$$(31) \quad \sum_i \int_{\alpha_i^0}^{x_i} du_h \equiv U_h, \quad \sum_i \int_{\alpha_i^0}^{y_i} du_h \equiv V_h, \quad \sum_i \int_{\alpha_i^0}^{z_i} du_h \equiv W_h,$$

$$(32) \quad W_h = U_h + V_h$$

und bildet aus einem Normalintegral 3. Gattung  $w_{x_0 y_0}$  und ebenso aus einem Normalintegral 2. Gattung  $t_{x_0}$  Summen je mit denselben oberen Grenzen wie in (31), so lassen sich diese Summen nach (5) als Functionen der Grössen  $U_h, V_h, W_h$  auffassen. Wir bezeichnen diese Functionen in der folgenden Weise:

$$(33) \quad \sum_i \int_{\alpha_i^0}^{x_i} dw_{x_0 y_0} = P_{x_0 y_0}(\langle U \rangle), \quad \sum_i \int_{\alpha_i^0}^{x_i} dt_{x_0} = Z_{x_0}(\langle U \rangle).$$

Schreibt man die Gleichungen (31, 32) ( $i, h = 1, \dots, p$ ):

$$\sum_i \left( \int_{x_i}^{z_i} du_h + \int_{y_i}^{\alpha_i^0} du_h \right) \equiv 0,$$

so folgt aus der Umkehrung des Abel'schen Theorems (IV) § 20, dass eine rationale Function  $R_x$  von der Ordnung  $2p$  existirt, die in den Punkten  $x_i$  und  $y_i$  gleich  $0^1$ , in  $z_i$  und  $\alpha_i^0$  gleich  $\infty^1$  wird. Das Abel'sche Theorem für die Integrale 3. und 2. Gattung gibt alsdann die Gleichungen

$$\begin{aligned} \sum_i \left( \int_{x_i}^{z_i} dw_{x_0 y_0} + \int_{y_i}^{\alpha_i^0} dw_{x_0 y_0} \right) &= \log R_{x_0} - \log R_{y_0}, \\ \sum_i \left( \int_{x_i}^{z_i} dt_{x_0} + \int_{y_i}^{\alpha_i^0} dt_{x_0} \right) &= \left( \frac{d \log R_x}{dx} \right)_{x=x_0}. \end{aligned}$$

Führt man aber links statt  $x_i, y_i, z_i$  die Werthe  $U_h, V_h, W_h$  ein, so folgt

S. 242. 1836) für einen speciellen, Herr Klein (Math. Ann. Bd. 36. S. 11. 1889) für den allgemeinen Fall. Die durch (30) definierte Function steht in naher Beziehung zu der von Herrn Weierstrass in seinen Vorlesungen benutzten Primfunction  $E(\xi, \eta)$ . (Vgl. Ges. W. II. S. 244. 1875).

1) Weber, Journ. für Math. Bd. 70. S. 209 (1869).



$$P_{x_0 y_0}((U + V)) - P_{x_0 y_0}((U)) - P_{x_0 y_0}((V)) = \log R_{x_0} - \log R_{y_0}, \quad (34)$$

$$Z_{x_0}((U + V)) - Z_{x_0}((U)) - Z_{x_0}((V)) = \left( \frac{d \log R^x}{dx} \right)_{x_0} \quad (35)$$

und der Satz:

(IV) Die Functionen  $P_{x_0 y_0}$  und  $Z_{x_0}$ , gebildet in den Argumenten  $U_h + V_h$ , drücken sich aus durch dieselben Functionen, gebildet in den Einzelargumenten  $U_h$  und  $V_h$  in Verbindung mit algebraischen Functionen oder Logarithmen von algebraischen Functionen.

Die Gleichungen (34) und (35) heissen das Additionstheorem der Normalintegrale 3. und 2. Gattung. Aus ihnen und dem Additionstheorem der Abel'schen Functionen ergeben sich entsprechende Additionstheoreme für die allgemeinsten Abel'schen Integrale.

## Achter Abschnitt.

### Die lineare Transformation der Thetafunctionen.

Die Untersuchungen der Abschnitte I—III hatten eine bestimmte, algebraische Gleichung  $F(x, y) = 0$  zur Grundlage und es wurde im Abschnitt IV der Einfluss untersucht, den die eindeutige Transformation, welche die Gleichung  $F(x, y) = 0$  in eine äquivalente Gleichung  $F_1(x_1, y_1) = 0$  überführt, auf die Darstellung der rationalen Functionen und der Abelschen Integrale hat, wobei diejenigen Bildungen von Wichtigkeit sind, welche dieser algebraischen Transformation gegenüber invariant sind. In ähnlicher Weise hat die Lösung des Umkehrproblems in den Abschnitten V—VII ein bestimmtes, kanonisches Querschnittssystem  $(a, b)$  der Verzweigungsfläche  $T'$  zur Voraussetzung und es ist in dem letzten Abschnitt VIII der Einfluss zu untersuchen, den die Ueberführung eines kanonischen Querschnittsystems  $(a, b)$  in ein anderes  $(a', b')$  derselben Fläche  $T'$  auf die Darstellungen des Umkehrproblems hat, wobei wieder diejenigen Bildungen von Wichtigkeit sind, welche dieser transcendenten Transformation gegenüber invariant sind.

Einem bestimmten, kanonischen Querschnittssystem  $(a, b)$  entspricht nach (XI) § 15 ein bestimmtes System von  $p$  Normalintegralen 1. Gattung  $u_h$  und ein bestimmtes System von Periodicitätsmoduln  $a_{h,k}$  an den Querschnitten  $b_k$  oder auch nach § 27 und 31 ein System von Thetafunctionen  $\vartheta_\mu(u, a)$  mit zweitheiliger Charakteristik  $\mu$  und mit bestimmten Argumenten  $u_h$  und Moduln  $a_{h,k}$ . Dem Uebergang von einem kanonischen Querschnittssystem  $(a, b)$  zu einem beliebigen andern  $(a', b')$  der Fläche  $T'$  entspricht nun eine sogen. lineare Transformation der Thetafunctionen. Dieselbe besteht darin, dass jede Thetafunction  $\vartheta_\mu(u, a)$  mit den Argumenten  $u_h$ , den Moduln  $a_{h,k}$  und der Charakteristik  $\mu$ , abgesehen von einem Exponentialfactor, übergeht in eine bestimmte Thetafunction  $\vartheta_\nu(v, b)$  mit anderen Argumenten  $v_h$ , anderen Moduln  $b_{h,k}$  und anderer Charakteristik  $\nu$ . Es ist die Aufgabe, diese Beziehungen zwischen den ursprünglichen und

den transformirten Thetafunctionen und ihren Elementen aufzustellen und die dabei auftretenden, auf die Charakteristiken bezüglichen, invarianten Bildungen zu ermitteln.

Wir betrachten zuerst in den §§ 38 und 39 die der Verlegung des Querschnittsystems entsprechende Transformation der Perioden und Periodencharakteristiken, dann in den §§ 40 und 41 die ihr entsprechende Transformation der Thetafunctionen und Thetacharakteristiken.

### § 38. Transformation der Perioden<sup>1)</sup>.

Wir bezeichnen ein System von  $p$  linear unabhängigen Integralen 1. Gattung mit  $w_1, \dots, w_p$ ; zwei verschiedene, kanonische Querschnittsysteme der Verzweigungsfläche  $T$  mit  $(a_i, b_i)$  und  $(a'_i, b'_i)$  ( $i=1, \dots, p$ ); ferner die Periodicitätsmoduln oder, wie wir kurz sagen werden, die „Perioden“ der Integrale  $\omega_k$  an den Querschnitten  $a_i, b_i$  mit  $A_{ik}, B_{ik}$ , an  $a'_i, b'_i$  mit  $A'_{ik}, B'_{ik}$  und stellen diese Bezeichnungen zusammen in dem Schema:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{c|c|c|c} a_1 & \dots & a_p & b_1 & \dots & b_p \\ \hline w_1 & A_{11} & \dots & A_{p1} & B_{11} & \dots & B_{p1} \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ w_p & A_{1p} & \dots & A_{pp} & B_{1p} & \dots & B_{pp} \end{array} & \begin{array}{c|c|c|c} a'_1 & \dots & a'_p & b'_1 & \dots & b'_p \\ \hline & A'_{11} & \dots & A'_{p1} & B'_{11} & \dots & B'_{p1} \\ & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & A'_{1p} & \dots & A'_{pp} & B'_{1p} & \dots & B'_{pp} \end{array} \end{array} \quad (1)$$

Die Perioden  $A'_{ik}$  und  $B'_{ik}$  sind Werthe des Integrals  $w_k$ , genommen auf gewissen, geschlossenen Wegen in der Fläche  $T$ . So ist  $A'_{ik}$  der Werth von  $w_k$ , genommen auf einem Wege, der von der — zur + Seite des Querschnittes  $a'_i$  führt, ohne einen der Querschnitte  $a', b'$  zu überschreiten. Entsprechendes gilt von  $B'_{ik}$  und dem Querschnitt  $b'_i$ . Die Werthe  $A'_{ik}$  und  $B'_{ik}$  setzen sich nach § 15 S. 111 linear und mit ganzzahligen Coefficienten aus den Perioden von  $w_k$  an den Querschnitten  $a_i$  und  $b_i$  zusammen. Man hat daher zwischen den Perioden  $A_{ik}, B_{ik}$  und  $A'_{ik}, B'_{ik}$  der Integrale  $w_k$  für das alte und das neue Querschnittssystem die Gleichungen ( $i=1, \dots, p$ ):

$$A'_{ik} = \sum_{\mu=1}^p (\alpha_{i\mu} A_{\mu k} + \beta_{i\mu} B_{\mu k}), \quad B'_{ik} = \sum_{\mu=1}^p (\gamma_{i\mu} A_{\mu k} + \delta_{i\mu} B_{\mu k}), \quad (2)$$

die man auch durch das Schema ersetzen kann:

1) Hermite, Comptes rendus. Bd. 40. S. 249 ff. (1855) für  $p=2$ . Thomae, Diss. Göttingen 1864. S. 11 ff. Clebsch - Gordan, Ab. F. S. 301 ff. (1866). Kronecker, Journ. für Math. Bd. 68. S. 273 ff. (1866).

$$(3) \quad \begin{array}{c|c|c} & A_{1k} \dots A_{pk} & B_{1k} \dots B_{pk} \\ \hline A'_{1k} & \alpha_{11} \dots \alpha_{1p} & \beta_{11} \dots \beta_{1p} \\ \vdots & \cdot & \cdot \\ A'_{pk} & \alpha_{p1} \dots \alpha_{pp} & \beta_{p1} \dots \beta_{pp} \\ \hline B'_{1k} & \gamma_{11} \dots \gamma_{1p} & \delta_{11} \dots \delta_{1p} \\ \vdots & \cdot & \cdot \\ B'_{pk} & \gamma_{p1} \dots \gamma_{pp} & \delta_{p1} \dots \delta_{pp} \end{array}.$$

Die  $4p^2$  ganzen Zahlen  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  heissen die Transformationscoefficienten; ihre Determinante  $\mathcal{A}$  sei in leicht verständlicher Abkürzung geschrieben:

$$(4) \quad \mathcal{A} = \begin{vmatrix} \alpha_{i\mu} & \beta_{i\mu} \\ \gamma_{i\mu} & \delta_{i\mu} \end{vmatrix}.$$

Die Coefficienten  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  sind nicht willkürlich, sondern durch gewisse Bedingungen beschränkt. Zunächst muss die Transformationsdeterminante  $\mathcal{A} = \pm 1$  sein, da die Auflösung von (2) Gleichungen derselben Form, d. h.  $A_{ik}, B_{ik}$ , als lineare Ausdrücke mit ganzzahligen Coefficienten in  $A'_{ik}, B'_{ik}$  ergeben muss; es zeigt sich sogleich, dass  $\mathcal{A} = +1$  ist.

Nach (X) § 15 bestehen zwischen den Perioden zweier Integrale 1. Gattung  $w_k$  und  $w_l$  die linearen Relationen ( $i = 1, \dots, p$ ):

$$(5) \quad \sum_i (A_{ik} B_{il} - B_{ik} A_{il}) = 0, \quad \sum_i (A'_{ik} B'_{il} - B'_{ik} A'_{il}) = 0.$$

Trägt man die Werthe (2) in die letzte Gleichung (5) ein, so folgt ( $i, \mu, \nu = 1, \dots, p$ ):

$$\sum_i \sum_\mu \sum_\nu [A_{\mu k} A_{\nu l} (\alpha_{i\mu} \gamma_{i\nu} - \alpha_{i\nu} \gamma_{i\mu}) + B_{\mu k} B_{\nu l} (\beta_{i\mu} \delta_{i\nu} - \beta_{i\nu} \delta_{i\mu}) + (A_{\mu k} B_{\nu l} - B_{\nu k} A_{\mu l}) (\alpha_{i\mu} \delta_{i\nu} - \beta_{i\nu} \gamma_{i\mu})] = 0.$$

Die Vergleichung mit der ersten Gleichung (5) gibt folgende Relationen zwischen den Transformationscoefficienten:

$$(6) \quad \begin{aligned} \sum_i (\alpha_{i\mu} \gamma_{i\nu} - \alpha_{i\nu} \gamma_{i\mu}) &= 0, & \sum_i (\beta_{i\mu} \delta_{i\nu} - \beta_{i\nu} \delta_{i\mu}) &= 0, \\ \sum_i (\alpha_{i\mu} \delta_{i\nu} - \beta_{i\nu} \gamma_{i\mu}) &= \begin{cases} +1, & \text{wenn } \mu = \nu, \\ 0, & \text{wenn } \mu \neq \nu. \end{cases} \end{aligned}$$

Allerdings folgt zunächst nur, dass für  $\mu = \nu$ :  $\sum_i (\alpha_{i\mu} \delta_{i\nu} - \beta_{i\nu} \gamma_{i\mu})$  gleich einer ganzen Zahl  $m$  ist. Bildet man aber unter dieser Voraussetzung das Quadrat der Transformationsdeterminante  $\mathcal{A}$  (4) in der Form

$$\mathcal{A}^2 = \begin{vmatrix} \alpha_{i\mu} & \beta_{i\mu} \\ \gamma_{i\mu} & \delta_{i\mu} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \gamma_{i\mu} & \delta_{i\mu} \\ -\alpha_{i\mu} & -\beta_{i\mu} \end{vmatrix},$$

so folgt, wenn man Verticalreihen mit Verticalreihen multiplicirt und die Gleichungen (6) berücksichtigt,  $\mathcal{A}^2 = m^{2p}$  oder, da  $\mathcal{A} = \pm 1$  sein muss,  $m = \pm 1$ . Zur Entscheidung über das Vorzeichen von  $m$  benutze man den Satz II § 15, nämlich: Zerlegt man die Perioden des Integrals  $w_k$  in ihre reellen und imaginären Theile und setzt  $A_{ik} = \bar{A}_{ik} + i\bar{A}_{ik}$  u. s. w., so müssen die Summen

$$\sum_i (\bar{A}_{ik} \bar{B}_{ik} - \bar{B}_{ik} \bar{A}_{ik}) \quad \text{und} \quad \sum_i (\bar{A}'_{ik} \bar{B}'_{ik} - \bar{B}'_{ik} \bar{A}'_{ik}) \quad (7)$$

gleichzeitig positiv sein. Trennt man aber in (2) Reelles und Imaginäres und trägt die Werthe in den zweiten Ausdruck (7) ein, so erhält man unmittelbar mit Rücksicht auf (6)

$$\sum_i (\bar{A}'_{ik} \bar{B}'_{ik} - \bar{B}'_{ik} \bar{A}'_{ik}) = m \sum_i (\bar{A}_{ik} \bar{B}_{ik} - \bar{B}_{ik} \bar{A}_{ik}),$$

wonach in der That  $m = +1$  sein muss<sup>1)</sup>. Zugleich folgt, dass die Determinante, gebildet aus den  $4p^2$  reellen und imaginären Bestandtheilen  $\bar{A}_{ik}$ ,  $\bar{A}'_{ik}$ ,  $\bar{B}_{ik}$ ,  $\bar{B}'_{ik}$  gleich ist der Determinante, gebildet aus  $\bar{A}_{ik}$ ,  $\bar{A}'_{ik}$ ,  $\bar{B}_{ik}$ ,  $\bar{B}'_{ik}$ .

Nennt man ein Zahlensystem  $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ , das den Gleichungen (6) genügt, ein kanonisches Zahlensystem, die Determinante  $\mathcal{A}$  dieser Zahlen eine kanonische Determinante und die zugehörige, lineare Transformation (2) der Perioden eine kanonische Transformation, so hat man den Satz:

(I) Jedem Uebergang von einem kanonischen Querschnittsystem in ein anderes entspricht eine kanonische Transformation der Perioden.

Es ergeben sich noch zwei weitere Eigenschaften der kanonischen Determinante, nämlich:

(Ia) Vertauscht man in einer kanonischen Determinante die Verticalreihen mit den Horizontalreihen, so erhält man wieder eine kanonische Determinante.

Wegen (6) hat man nämlich als Auflösung des Systemes (2) offenbar die Gleichungen ( $\mu = 1, \dots, p$ ):

1) Die Gleichheit der beiden Ausdrücke (7) folgt auch daraus, dass beide den Inhalt der Fläche  $S$  darstellen, die man erhält, wenn man die Fläche  $T''$  mittels des Integrals  $w_k$  conform abbildet (s. Bemerkung S. 115), und dabei das eine mal die Fläche  $T''$  von den Querschnitten  $(a_i, b_i)$ , das andere mal von  $(a'_i, b'_i)$  begrenzt denkt.

$$(8) \quad A_{ik} = \sum_{\mu} (\delta_{\mu i} A'_{\mu k} - \beta_{\mu i} B'_{\mu k}), \quad B_{ik} = \sum_{\mu} (-\gamma_{\mu i} A'_{\mu k} + \alpha_{\mu i} B'_{\mu k}).$$

Die Vergleichung mit (2) zeigt, dass man in den vorstehenden, wie in den folgenden Gleichungen stets die Grössen

$$(9) \quad A_{\mu k}, \quad B_{\mu k}, \quad A'_{ik}, \quad B'_{ik}, \quad \alpha_{i\mu}, \quad \beta_{i\mu}, \quad \gamma_{i\mu}, \quad \delta_{i\mu}$$

gleichzeitig vertauschen kann bez. mit

$$(9a) \quad A'_{\mu k}, \quad B'_{\mu k}, \quad A_{ik}, \quad B_{ik}, \quad \delta_{\mu i}, \quad -\beta_{\mu i}, \quad -\gamma_{\mu i}, \quad \alpha_{\mu i}.$$

Durch diese Vertauschung ergibt sich aus (6) ein äquivalentes System von Gleichungen, nämlich

$$(10) \quad \sum_i (\gamma_{\mu i} \delta_{vi} - \delta_{\mu i} \gamma_{vi}) = 0, \quad \sum_i (\alpha_{\mu i} \beta_{vi} - \alpha_{vi} \beta_{\mu i}) = 0,$$

$$\sum_i \alpha_{vi} \delta_{\mu i} - \beta_{vi} \gamma_{\mu i} = \begin{cases} +1, & \text{wenn } \mu = v, \\ 0, & \text{wenn } \mu \neq v. \end{cases}$$

Die Vergleichung von (6) mit (10) beweist unmittelbar den Satz

(1a). Ferner gilt der Satz:

(1b) Bildet man aus den adjungirten Gliedern einer kanonischen Determinante wieder eine Determinante, so ist diese ebenfalls kanonisch.

Denn löst man die Gleichungen (2) direct auf und vergleicht die Auflösung mit (8), so folgt, wenn die Unterdeterminanten von  $\mathcal{A}$  (4) bezüglich der Elemente  $\alpha_{i\mu}$ ,  $\beta_{i\mu}$ ,  $\gamma_{i\mu}$ ,  $\delta_{i\mu}$  mit  $\underline{\alpha}_{i\mu}$ ,  $\underline{\beta}_{i\mu}$ ,  $\underline{\gamma}_{i\mu}$ ,  $\underline{\delta}_{i\mu}$  bezeichnet werden,

$$(10a) \quad \underline{\alpha}_{i\mu} = \delta_{i\mu}, \quad \underline{\beta}_{i\mu} = -\gamma_{i\mu}, \quad \underline{\gamma}_{i\mu} = -\beta_{i\mu}, \quad \underline{\delta}_{i\mu} = \alpha_{i\mu}.$$

Daher hat man für die Unterdeterminanten  $\underline{\alpha}_{i\mu}$ ,  $\underline{\beta}_{i\mu}$ ,  $\underline{\gamma}_{i\mu}$ ,  $\underline{\delta}_{i\mu}$  dieselben Gleichungen (6) oder (10), wie für die Elemente  $\alpha_{i\mu}$ ,  $\beta_{i\mu}$ ,  $\gamma_{i\mu}$ ,  $\delta_{i\mu}$ , womit der Satz bewiesen ist.

Zugleich folgt aus (10a), dass die Gleichungen (6) oder (10) nichts anderes sind als die bekannten Relationen zwischen den Elementen einer Determinante und den entsprechenden Elementen der zugehörigen, adjungirten Determinante.

Es soll nun die kanonische Transformation der Perioden näher untersucht und im Anschluss daran die Umkehrung des Satzes I gegeben werden.

Wir betrachten zuerst die Zusammensetzung zweier kanonischer Transformationen. Führt man zwei Uebergänge von einem kanonischen Querschnittsystem in ein anderes nach einander aus, so lassen sich dieselben offenbar in eine solche Veränderung zusammenfassen. Entsprechend lassen sich die zwei zugehörigen, kanonischen Transforma-

tionen in eine solche Transformation zusammenziehen. Dabei ergibt sich ein einfaches Gesetz für die Bildung der zusammengesetzten Transformation. Es sei

$$A'_{\nu k} = \sum_{\mu} (\alpha_{\nu \mu} A_{\mu k} + \beta_{\nu \mu} B_{\mu k}), \quad B'_{\nu k} = \sum_{\mu} (\gamma_{\nu \mu} A_{\mu k} + \delta_{\nu \mu} B_{\mu k}), \quad (11a)$$

$$A''_{ik} = \sum_{\nu} (\alpha'_{i\nu} A'_{\nu k} + \beta'_{i\nu} B'_{\nu k}), \quad B''_{ik} = \sum_{\nu} (\gamma'_{i\nu} A'_{\nu k} + \delta'_{i\nu} B'_{\nu k}) \quad (11b)$$

und es folge durch Zusammensetzung

$$A''_{ik} = \sum_{\mu} (\alpha''_{i\mu} A_{\mu k} + \beta''_{i\mu} B_{\mu k}), \quad B''_{ik} = \sum_{\mu} (\gamma''_{i\mu} A_{\mu k} + \delta''_{i\mu} B_{\mu k}). \quad (11c)$$

Trägt man die Werthe (11a) in (11b) ein und vergleicht mit (11c), so erhält man die Relationen

$$\begin{aligned} \alpha''_{i\mu} &= \sum_{\nu} (\alpha_{\nu \mu} \alpha'_{i\nu} + \gamma_{\nu \mu} \beta'_{i\nu}), & \gamma''_{i\mu} &= \sum_{\nu} (\alpha_{\nu \mu} \gamma'_{i\nu} + \gamma_{\nu \mu} \delta'_{i\nu}), \\ \beta''_{i\mu} &= \sum_{\nu} (\beta_{\nu \mu} \alpha'_{i\nu} + \delta_{\nu \mu} \beta'_{i\nu}), & \delta''_{i\mu} &= \sum_{\nu} (\beta_{\nu \mu} \gamma'_{i\nu} + \delta_{\nu \mu} \delta'_{i\nu}). \end{aligned} \quad (12)$$

Hieraus folgt der Satz:

(II) Die Zusammensetzung zweier kanonischen Transformationen von den Determinanten  $\mathcal{A}$  und  $\mathcal{A}'$  gibt wieder eine kanonische Transformation von der Determinante  $\mathcal{A}''$ . Die Elemente der letzteren werden erhalten, indem man die Verticalreihen der Determinante  $\mathcal{A}$  mit den Horizontalreihen von  $\mathcal{A}'$  multiplicirt.

Man kann diesen Process der Zusammensetzung kurz durch die Gleichung  $\mathcal{A}'' = \mathcal{A}\mathcal{A}'$  andeuten. Dabei ist  $\mathcal{A}\mathcal{A}'$  von  $\mathcal{A}'\mathcal{A}$  im Allgemeinen verschieden. Zu jeder Transformation  $\mathcal{A}$  gibt es eine zweite  $\mathcal{A}^{-1}$  derart, dass  $\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{A}^{-1}\mathcal{A} = 1$ . Die Transformation  $\mathcal{A}^{-1}$  heisst die inverse Transformation von  $\mathcal{A}$ ; ihre Elemente sind bestimmt durch

$$\alpha'_{i\mu} = \delta_{\mu i}, \quad \beta'_{i\mu} = -\beta_{\mu i}, \quad \gamma'_{i\mu} = -\gamma_{\mu i}, \quad \delta'_{i\mu} = \alpha_{\mu i}. \quad (13)$$

Denn trägt man diese Werthe der  $\alpha'$ ,  $\beta'$ ,  $\gamma'$ ,  $\delta'$  in (12) ein, so erhält man nach (6)  $\alpha''_{ii} = \delta''_{ii} = 1$  ( $i = 1, \dots, p$ ), während alle übrigen  $\alpha''$ ,  $\beta''$ ,  $\gamma''$ ,  $\delta''$  gleich 0 sind. (q. e. d.)

Es gilt ferner, wenn man eine Transformation kurz durch ihre Determinante charakterisirt, der Satz:

(III) Jede allgemeine, kanonische Transformation  $\mathcal{A}$  der Perioden lässt sich aus gewissen, elementaren Transformationen  $S_1, \dots, S_m$  zusammensetzen.

Diese elementaren Transformationen  $S$  sollen dadurch definirt sein, dass sowohl in den  $S$  wie in den inversen Transformationen  $S^{-1}$  die Trans-

formationscoefficienten nur aus den Elementen 0 und  $\pm 1$  bestehen. Es ist nachzuweisen, dass

$$\mathcal{A} = S_1 S_2 \dots S_m \quad \text{oder} \quad \mathcal{A} S_m^{-1} S_{m-1}^{-1} \dots S_2^{-1} S_1^{-1} = 1,$$

so dass die Aufgabe darauf hinauskommt, die gegebene Transformation  $\mathcal{A}$  durch Zusammensetzung mit elementaren Transformationen der angegebenen Art auf die Identität 1 zurückzuführen. Hierzu genügt es, mit einigen, wenigen Typen von elementaren Transformationen zu operiren und diese Operationen selbst auf die Transformationsdeterminanten zu beschränken. Wir betrachten folgende Typen von Determinanten mit den Elementen  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ .

- $T_1$ : Es ist  $\alpha_{ii} = \delta_{ii} = 1$  ( $i = 1, \dots, p$ ) und  $\beta_{mm} = \pm 1$  für einen bestimmten Zeiger  $m$ ; alle übrigen Elemente sind 0.  
 $T_2$ : Es ist  $\alpha_{ii} = \delta_{ii} = 1$  ( $i = 1, \dots, p$ ) und  $\gamma_{mm} = \pm 1$  für ein bestimmtes  $m$ ; alle übrigen Elemente sind 0.  
 $T_3$ : Es ist  $\alpha_{ii} = \delta_{ii} = 1$  ( $i = 1, \dots, p$ ) und  $\alpha_{mn} = \pm 1$ ;  $\delta_{nm} = \mp 1$  für ein bestimmtes Zeigerpaar  $m, n$ ; alle übrigen Elemente sind 0.  
 $T_4$ : Es ist  $\alpha_{ii} = \delta_{ii} = 1$  ( $i = 1, \dots, p$ ) mit Ausnahme von  $\alpha_{mm} = \delta_{mm} = -1$  für ein bestimmtes  $m$ ; alle übrigen Elemente sind 0.

Die elementaren Transformationen  $T_1, T_2, T_3, T_4$  sind kanonisch; zugleich sind die inversen Transformationen wieder von einem dieser vier Typen. Betrachtet man nun die Wirkung, welche auf eine gegebene Transformationsdeterminante  $\mathcal{A}$  mit den Elementen  $\alpha_{ik}, \beta_{ik}, \gamma_{ik}, \delta_{ik}$  ausgeübt wird, wenn man sie mit einer zu  $T_1, T_2, T_3, T_4$  gehörigen Determinante multiplicirt (wobei jedesmal die Horizontalreihen der gegebenen Determinante  $\mathcal{A}$  mit den Verticalreihen der elementaren Determinante multiplicirt werden), so ergibt sich Folgendes:

- $T_1$ : Man kann in  $\mathcal{A}$  die  $m^{\text{te}}$  Verticalreihe zur  $p + m^{\text{ten}}$  addiren oder von ihr subtrahiren.  
 $T_2$ : Man kann in  $\mathcal{A}$  die  $p + m^{\text{te}}$  Verticalreihe zur  $m^{\text{ten}}$  addiren oder von ihr subtrahiren.  
 $T_3$ : Man kann in  $\mathcal{A}$  die  $m^{\text{te}}$  Verticalreihe zur  $n^{\text{ten}}$  addiren (subtrahiren) und gleichzeitig die  $p + n^{\text{te}}$  von der  $p + m^{\text{ten}}$  subtrahiren (addiren).  
 $T_4$ : Man kann in einer Determinante, die nur noch die Diagonalglieder  $\alpha_{ii}$  und  $\delta_{ii}$  enthält, gleichzeitig die Vorzeichen eines Paares  $\alpha_{mm}$  und  $\delta_{mm}$  umkehren.

Durch wiederholte Anwendung dieser Processe kann man die gegebene Determinante  $\mathcal{A}$  in die Identität 1 verwandeln. Man kann nämlich in der ersten Horizontalreihe von  $\mathcal{A}$  durch abwechselnde Anwendungen  $T_1$  und  $T_2$  (mittels des ersten bis  $p^{\text{ten}}$  Gliedes) alle Glieder



vom  $p + 1^{\text{ten}}$  bis zum  $2p^{\text{ten}}$ , ferner durch  $T_3$  (mittels des ersten Gliedes) noch alle Glieder vom zweiten bis zum  $p^{\text{ten}}$  zerstören. Dann bleibt in der ersten Horizontalreihe nur das erste Glied, das als Factor von  $\mathcal{A} = 1$  selber  $\pm 1$  sein muss. Alsdann kann man in der  $p + 1^{\text{ten}}$  Horizontalreihe von  $\mathcal{A}$  durch  $T_1$  mittels des  $p + 2^{\text{ten}}$  bis  $p^{\text{ten}}$  Gliedes alle Elemente vom zweiten bis  $p^{\text{ten}}$ , ferner durch  $T_2$  mittels des  $p + 1^{\text{ten}}$  Gliedes die Glieder vom  $p + 2^{\text{ten}}$  bis zum  $2p^{\text{ten}}$ , endlich durch  $T_1$  mittels des  $p + 1^{\text{ten}}$  das erste Glied zerstören. Dann bleibt in der  $p + 1^{\text{ten}}$  Horizontalreihe von  $\mathcal{A}$  nur das  $p + 1^{\text{te}}$  Glied, das wieder  $= \pm 1$  sein muss.

Nummehr sind in der  $1^{\text{ten}}$  und der  $p + 1^{\text{ten}}$  Horizontalreihe alle Elemente ausser den Diagonalgliedern  $= 0$ . Dann aber lehren die Gleichungen (6) oder (10), dass dasselbe für die  $1^{\text{te}}$  und die  $p + 1^{\text{te}}$  Verticalreihe gelten muss. Denn setzt man die Elemente

$$\alpha_{12}, \dots, \alpha_{1p}, \beta_{11}, \dots, \beta_{1p} \quad \text{und} \quad \gamma_{11}, \dots, \gamma_{1p}, \delta_{12}, \dots, \delta_{1p}$$

gleich 0, so werden auch die Elemente

$$\alpha_{21}, \dots, \alpha_{p1}, \gamma_{11}, \dots, \gamma_{p1} \quad \text{und} \quad \beta_{11}, \dots, \beta_{p1}, \delta_{21}, \dots, \delta_{p1}$$

gleich 0. Die reducirte Determinante enthält daher in der  $1^{\text{ten}}$  und  $p + 1^{\text{ten}}$  Horizontal- und Vertical-Reihe nur noch die Diagonalglieder. Mit den übrigen Reihen der Determinante kann man demnach operiren, als ob diese beiden Reihen gar nicht vorhanden wären. Man verwandelt durch dieselben Operationen die  $2^{\text{ten}}$  und  $p + 2^{\text{ten}}$  Horizontal- und Vertical-Reihen in solche, die nur die Diagonalglieder enthalten und fährt so fort, bis nur noch Diagonalglieder von der Form  $\pm 1$  vorhanden sind. Aus den Gleichungen (6) oder (10) folgt alsdann, dass  $\alpha_{ii}$  und  $\delta_{ii}$  entweder beide  $= +1$  oder beide  $= -1$  sein müssen. Sind Glieder der letzteren Art vorhanden, so ist noch die Transformation  $T_4$  anzuwenden, um die Determinante auf die Identität zurückzuführen. Hiermit ist Satz III bewiesen.

Hieran schliesst sich endlich die Umkehrung von Satz I, nämlich:  
(IV) Jeder kanonischen Transformation der Perioden entspricht der Uebergang von einem kanonischen Querschnittssystem zu einem anderen.

Zum Beweise<sup>1)</sup> zeigt man, dass jeder elementaren, kanonischen Transformation der Perioden eine Verlegung des Querschnittsystems entspricht, die ebenfalls elementar heissen soll, und dass sich aus solchen elementaren Verlegungen die allgemeinste Ueberführung eines kanonischen Querschnittsystems in ein anderes zusammensetzen lässt.

1) Thomae, Journ. für Math. Bd. 75. S. 229 ff. (1872).

Die den elementaren Transformationen  $T_1, T_2, T_3, T_4$  entsprechenden Transformationsgleichungen (2) der Perioden lauten, wenn  $(i, k=1, \dots, p)$ :

$$T_1: A'_{ik} = A_{ik}; B'_{ik} = B_{ik}; \text{ nur für } i = m: A'_{mk} = A_{mk} \pm B_{mk}.$$

$$T_2: A'_{ik} = A_{ik}; B'_{ik} = B_{ik}; \text{ nur für } i = m: B'_{mk} = B_{mk} \pm A_{mk}.$$

$$T_3: A'_{ik} = A_{ik}; B'_{ik} = B_{ik} \text{ nur } A'_{mk} = A_{mk} \pm A_{nk}; B'_{nk} = B_{nk} \mp B_{mk}.$$

$$T_4: A'_{ik} = A_{ik}; B'_{ik} = B_{ik} \text{ nur } A'_{mk} = -A_{mk}; B'_{mk} = -B_{mk}.$$

Aus diesen Transformationen lassen sich, wie oben gezeigt wurde, alle anderen zusammensetzen; wir benutzen dies, um noch zwei neue Typen von elementaren Transformationen einzuführen.

$$T_5: \alpha_{ii} = \delta_{ii} = 1 (i=1, \dots, p) \text{ nur } \alpha_{mm} = \delta_{mm} = 0; \beta_{mm} = \pm 1; \gamma_{mm} = \mp 1 \text{ für ein bestimmtes } m, \text{ alle anderen Elemente } = 0; \text{ also}$$

$$A'_{ik} = A_{ik}; B'_{ik} = B_{ik}; \text{ nur } A'_{mk} = \pm B_{mk}; B'_{mk} = \mp A_{mk}.$$

$$T_6: \alpha_{ii} = \delta_{ii} = 1 (i=1, \dots, p); \alpha_{mn} = \alpha_{nm} = \delta_{mn} = \delta_{nm} = \pm 1 \text{ oder } = -1 \text{ für ein bestimmtes Paar } m, n; \text{ alle anderen Elemente } = 0; \text{ also}$$

$$A'_{ik} = A_{ik}; B'_{ik} = B_{ik} \text{ nur } A'_{mk} = A_{nk}; A'_{nk} = A_{mk}; B'_{mk} = B_{nk}; B'_{nk} = B_{mk}.$$

Nun ist geometrisch leicht zu sehen, dass jeder der Transformationen  $T_1$  bis  $T_6$  eine bestimmte Querschnittverlegung entspricht. Man hat nur festzuhalten, dass  $A_{ik}$  und  $B_{ik}$  die Perioden von  $w_k$  an

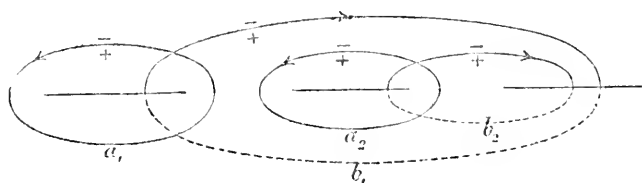


Fig. 9.

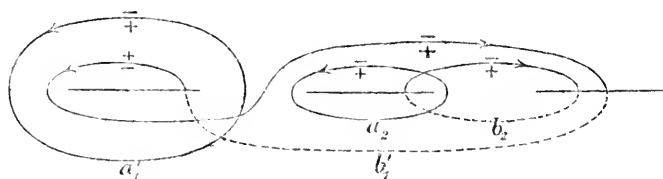
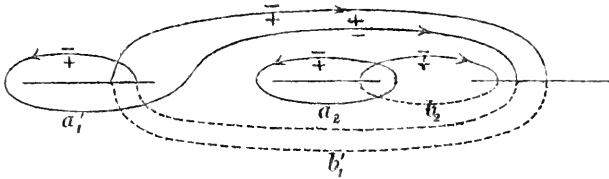
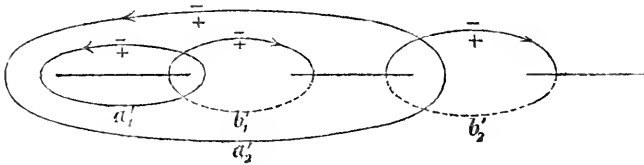


Fig. 9\_1.

den Querschnitten  $a_i$  und  $b_i$  sind, d. h.  $A_{ik}$  der Werth von  $w_k$ , genommen längs  $b_i$  von der  $-$  zur  $+$  Seite von  $a_i$ , und  $B_{ik}$  der Werth von  $w_k$ , genommen längs  $a_i$  von der  $-$  zur  $+$  Seite von  $b_i$ . In Fig. 9 ist die Normalform der Verzweigungsfläche  $T$  (§ 3) zu Grunde gelegt

und es sind die obigen Zahlen in  $T_1$  bis  $T_6$   $m=1$ ,  $n=2$  gesetzt; ferner sind die Richtungen, in welchen bei der Bestimmung der Periodicitätsmoduln die Querschnitte durchlaufen werden, durch Pfeile angezeigt. Man sieht nun leicht aus Fig. 9<sub>1</sub>, dass der Transformation  $T_1$  eine

Fig. 9<sub>2</sub>.Fig. 9<sub>3</sub>.

Erweiterung von  $b_m$  um  $a_m$ , aus Fig. 9<sub>2</sub>, dass  $T_2$  eine Erweiterung von  $a_m$  um  $b_m$  entspricht. Ferner aus Fig. 9<sub>3</sub>, dass der Transformation  $T_3$  eine Erweiterung von  $a_m$  um  $a_n$  und gleichzeitig von  $b_m$  um  $-b_n$  entspricht. Ebenso entspricht  $T_4$  ein Wechsel der Zeichen  $\pm$  an den Querschnitten  $a_m$  und  $b_m$ ,  $T_5$  eine Vertauschung von  $a_m$  mit  $b_m$  und  $T_6$  eine Vertauschung von  $a_m$  mit  $a_n$  und gleichzeitig von  $b_m$  mit  $b_n$ .

Die genannten Querschnittsänderungen bestehen zum Theil aus Erweiterungen (wie  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $T_3$ ), zum Theil aus Vertauschungen der Querschnitte. Aus diesen Aenderungen aber setzt sich jede weitere Querschnittsänderung zusammen. Es entspricht daher auch der allgemeinsten, kanonischen Transformation der Perioden eine bestimmte Verlegung des kanonischen Querschnittsystems. (q. e. d.)

### § 39. Transformation der Periodencharakteristiken.

In § 38 wurde die Transformation der Perioden untersucht, die einer Verlegung des kanonischen Querschnittsystems  $(a_i, b_i)$  der Fläche  $T$  entspricht. Wir übertragen jetzt diese Untersuchung auf die Transformation der Periodencharakteristiken.

Es seien wie früher  $w_1, \dots, w_p$   $p$  linear unabhängige Integrale 1. Gattung und die Perioden derselben für zwei verschiedene, kanonische Querschnittssysteme  $(a_i, b_i)$  und  $a'_i, b'_i$  gegeben durch das Schema (1)

§ 38. Führt man die Integrale  $w_1, \dots, w_p$  über denselben geschlossenen Weg  $C$  in der Fläche  $T$ , so erhält man allgemeine, zusammengehörige Perioden  $P_1, \dots, P_p$  von  $w_1, \dots, w_p$ , die sich linear und ganzzahlig aus den Perioden der  $w_k$  an den  $2p$  Querschnitten von  $T$  zusammensetzen. Legt man dabei einmal das erste kanonische Querschnittssystem  $(a_i, b_i)$  zu Grunde, dann das zweite  $(a'_i, b'_i)$ , so erhält man, wenn  $(k, \mu, i = 1, \dots, p)$ :

$$(1) \quad P_k = \sum_{\mu} (\xi_{\mu} A_{\mu k} + \xi'_{\mu} B_{\mu k}) = \sum_i (x_i A'_{ik} + x'_i B'_{ik}).$$

Die  $2p$  ganzen Zahlen  $(\xi_1, \dots, \xi_p, \xi'_1, \dots, \xi'_p)$  oder kurz  $(\xi)$  heissen die Charakteristik der Perioden  $P_1, \dots, P_p$  für die Querschnitte  $(a_i, b_i)$ ; ebenso die  $2p$  ganzen Zahlen  $(x_1, \dots, x_p; x'_1, \dots, x'_p)$  oder  $(x)$  diejenige für die Querschnitte  $(a'_i, b'_i)$ . Trägt man in (1) die Werthe von  $A'_{ik}$  und  $B'_{ik}$  aus (2) § 38 ein und vergleicht die Coefficienten von  $A_{\mu k}$  und  $B_{\mu k}$  in (1), so erhält man für die Transformation der Periodencharakteristiken  $(x)$  und  $(\xi)$  bei Verlegung des Querschnittsystems die linearen und homogenen Gleichungen

$$(2) \quad \xi_{\mu} = \sum_i (\alpha_{i\mu} x_i + \gamma_{i\mu} x'_i), \quad \xi'_{\mu} = \sum_i (\beta_{i\mu} x_i + \delta_{i\mu} x'_i).$$

Wählt man statt  $C$  einen anderen Weg  $C_1$ , so treten an Stelle von  $(x)$  und  $(\xi)$  andere Zahlensysteme  $(y)$  und  $(\eta)$  und an Stelle von (2) die Gleichungen

$$(3) \quad \eta_{\mu} = \sum_i (\alpha_{i\mu} y_i + \gamma_{i\mu} y'_i), \quad \eta'_{\mu} = \sum_i (\beta_{i\mu} y_i + \delta_{i\mu} y'_i).$$

Unter den Periodencharakteristiken nimmt die Charakteristik  $(x) \equiv (0)$ , in der sämtliche Elemente  $x_i, x'_i$  den Werth 0 haben, eine Ausnahmestellung ein, insofern sie nach (2) bei jeder Verlegung des Querschnittsystems in sich selber übergeht. Nach (2) geht ferner die Summe einer beliebigen Zahl von Charakteristiken  $(x)$  in die Summe der transformirten Charakteristiken  $(\xi)$  über; ist die Summe einer Zahl von Charakteristiken  $(x)$  Null, so ist auch die Summe der entsprechenden Charakteristiken  $(\xi)$  Null. Bei der folgenden Untersuchung der Periodencharakteristiken treten Congruenzen auf, die, wenn nichts anderes bemerkt ist, stets mod 2 zu nehmen sind. Wir denken uns daher auch die Periodencharakteristiken mod 2 reducirt, so dass ihre Elemente nur aus den Zahlen 0 und 1 bestehen. Wir nennen ferner (wie bei den Thetacharakteristiken (III) § 26) eine Periodencharakteristik  $(x)$  gerade oder ungrade, je nachdem

$$\sum_i x_i x'_i \equiv 0 \quad \text{oder} \quad \equiv 1 \pmod{2}.$$

Nach (VI) § 26 ist die Zahl  $c_p$  der sämmtlichen, (mod 2) reducirten Periodencharakteristiken, sowie die Zahl  $g_p$  der geraden und die Zahl  $u_p$  der ungeraden unter ihnen gegeben durch

$$c_p = 2^{2^p}, \quad g_p = 2^{p-1}(2^p + 1), \quad u_p = 2^{p-1}(2^p - 1). \quad (4)$$

Wir bezeichnen endlich mehrere Charakteristiken als unabhängig, wenn nicht die Summe irgend einer Anzahl derselben congruent 0 ist, und setzen ( $i = 1, \dots, p$ ):

$$|x| \equiv \sum_i x_i x_i', \quad |x, y| \equiv \sum_i (x_i y_i' \pm y_i x_i'), \quad (5)$$

so dass

$$|x, x| \equiv 0, \quad |x, 0| \equiv 0, \quad |x, \xi| \equiv |\xi, x|; \quad (5a)$$

$$|xyz \dots| \equiv |x| + |y| + |z| + \dots + |x, y| + |x, z| + |y, z| + \dots; \quad (6)$$

$$|xyz \dots, \xi \eta \xi \dots| \equiv |x, \xi| + |x, \eta| + \dots + |y, \xi| + |y, \eta| + \dots \quad (7)$$

Aus den Gleichungen (2) und (3) erhält man zunächst eine Beziehung zwischen zwei Periodencharakteristiken, die von den Coefficienten ( $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ) der kanonischen Transformation ganz unabhängig ist und zu einer invarianten Form führt. Es besteht nämlich die Gleichung:

$$\sum_i (\xi_i \eta_i' \pm \eta_i \xi_i') \equiv \sum_i (x_i y_i' \pm y_i x_i') \quad \text{oder} \quad |\xi, \eta| \equiv |x, y|, \quad (8)$$

wie sich leicht ergibt, wenn man die Werthe (2) und (3) in die linke Seite von (8) einträgt und die Gleichungen (10) § 38 benutzt. Daher der Satz<sup>1)</sup>:

(I) Sind ( $x$ ) und ( $y$ ) zwei beliebige Periodencharakteristiken, so ist der Ausdruck

$$|x, y| \equiv \sum_i (x_i y_i' \pm y_i x_i') \quad (9)$$

invariant gegenüber einer jeden Verlegung des kanonischen Querschnittsystems oder einer jeden kanonischen Transformation der Perioden.

Dieser Satz gibt Anlass zur Untersuchung eines Systems von Periodencharakteristiken von der Beschaffenheit, dass für je zwei derselben der invariante Ausdruck (9) entweder den Werth 0 oder den Werth 1 (mod. 2) hat; wir betrachten nur Systeme der letzteren Art<sup>2)</sup>. Sind  $B_1, B_2, \dots, B_\mu$   $\mu$  Charakteristiken, die den Bedingungen genügen:

$$|B_i, B_k| \equiv 1 \quad (i \geq k), \quad (10)$$

so gelten folgende Sätze:

1) Kronecker, Journ. für Math. Bd. 68. S. 274 (1866).

2) H. Stahl, Journ. für Math. Bd. 88. S. 273 ff. (1879).

- 1) Die  $\mu$  Charakteristiken  $B_1, \dots, B_\mu$  sind alle verschieden (mod 2).

Denn wären zwei von ihnen gleich, so wäre für sie die Gleichung (10) nicht erfüllt.

- 2) Ist  $\mu = 2\lambda (\leq 2p)$ , so sind die Charakteristiken  $B_1, \dots, B_\mu$  unabhängig und es besteht zwischen ihrer Summe und jeder von ihnen wieder die Beziehung (10).

Denn es ist, wenn  $q \leq \lambda$ ,

$$|B_1 \dots B_{2q-1}, B_{2q}| = |B_1, B_{2q}| + \dots + |B_{2q-1}, B_{2q}| \equiv 1$$

und

$$|B_1 \dots B_{2q}, B_{2q}| = |B_1, B_{2q}| + \dots + |B_{2q}, B_{2q}| \equiv 1,$$

d. h. es ist weder  $B_1 \dots B_{2q-1}$  noch  $B_1 \dots B_{2q}$  gleich 0 für ein beliebiges  $q$ ; ferner ist, wenn  $(i = 1, \dots, 2\lambda)$ :

$$|B_1 \dots B_{2\lambda}, B_i| = |B_1, B_i| + \dots + |B_i, B_i| + \dots + |B_{2\lambda}, B_i| \equiv 1,$$

d. h. die Summe der Charakteristiken steht mit jeder einzelnen in der Beziehung (10).

- 3) Ist  $\mu = 2\lambda + 1 (\leq 2p + 1)$ , so sind die Charakteristiken  $B_1, \dots, B_\mu$  entweder unabhängig oder ihre Summe ist 0, während je  $\mu - 1$  unabhängig sind.

Denn es ist, wenn  $q \leq \lambda$ ,

$$|B_1 \dots B_{2q-1}, B_{2q}| \equiv 1, |B_1 \dots B_{2q}, B_{2q}| \equiv 1, |B_1 \dots B_{2\lambda+1}, B_i| \equiv 0,$$

d. h. die Charakteristiken  $B_1 \dots B_{2q-1}$  und  $B_1 \dots B_{2q}$  sind von 0 verschieden, während  $B_1 \dots B_{2\lambda+1}$  gleich 0 sein kann.

Nach diesen Vorbereitungen betrachten wir  $2p$  Charakteristiken  $B_1, \dots, B_{2p}$  von der Art, dass zwischen je zweien derselben die Gleichung (10) besteht, und bezeichnen ihre Summe (mod 2) mit  $B_{2p+1}$ , so dass

$$(11) \quad B_1 \dots B_{2p+1} \equiv 0.$$

Dass es solche Systeme gibt, zeigt sich weiter unten. Die Charakteristiken  $B_1, \dots, B_{2p}$  sind von einander unabhängig und ihre Summe  $B_{2p+1}$  steht mit jeder von ihnen in der Beziehung (10) (Nr. 2). Daher kann man die Charakteristiken  $B_1, \dots, B_{2p+1}$  beliebig unter einander vertauschen. Hieran schliesst sich die Erklärung:

- (II) Ein System von  $2p + 1$  Charakteristiken  $B_1, \dots, B_{2p+1}$  von der Beschaffenheit, dass zwischen je zweien derselben die Beziehung (10) besteht, soll im Verein mit der Charakteristik 0 ein specielles Fundamentalsystem von Charakteristiken heissen<sup>1)</sup>.

1) Für  $p=1$  bilden die vier Charakteristiken 00, 01, 10, 11 ein solches Fundamentalsystem.

Die Fundamentalsysteme sind von Wichtigkeit, weil sich aus den Charakteristiken eines solchen Systems sämtliche  $2^{2p}$  Charakteristiken zusammensetzen lassen in einer Weise, dass sich der gerade oder ungrade Charakter einer jeden Charakteristik sofort erkennen lässt. Solche Darstellungen heissen kanonische. Zu ihnen führt folgende Betrachtung. Eine Charakteristik  $C$ , die aus  $\mu$  ungraden und  $\nu$  geraden unter den  $2p+1$  Charakteristiken  $B_1, \dots, B_{2p+1}$  gebildet und durch  $C = \sum^{\mu} u + \sum^{\nu} g$  bezeichnet sei, ist nach (6) gerade oder ungrade, je nachdem

$$\mu + \frac{(\mu + \nu)(\mu + \nu - 1)}{2} \quad \text{oder auch} \quad \frac{(\mu - \nu)(\mu - \nu + 1)}{2}$$

eine gerade oder ungrade Zahl ist. Der gerade oder ungrade Charakter von  $C$  ist also nur von der Differenz  $\mu - \nu$  abhängig und es ist  $C$  (wenn  $\sigma$  eine ganze Zahl)

$$\left. \begin{array}{l} \text{gerade, wenn } \mu - \nu = 4\sigma \text{ oder } = 4\sigma + 3, \\ \text{ungerade, wenn } \mu - \nu = 4\sigma + 1 \text{ oder } = 4\sigma + 2. \end{array} \right\} \quad (12)$$

Sind  $t$  von den  $2p+1$  Charakteristiken  $B_i$  ungrade und bezeichnet man die Summe derselben oder, was nach (11) das nämliche, die Summe der  $2p+1-t$  geraden Charakteristiken mit  $\mathfrak{L}$ , so dass

$$\mathfrak{L} = \sum^t u = \sum^{2p+1-t} g \quad (13)$$

und bildet man aus  $\mathfrak{L}$  und den Charakteristiken  $B_1, \dots, B_{2p+1}$  folgende Reihe von Charakteristiken

$$\mathfrak{L} + \sum^1 B, \quad \mathfrak{L} + \sum^2 B, \quad \dots, \quad \mathfrak{L} + \sum^{p-1} B, \quad \mathfrak{L} + \sum^p B, \quad (14)$$

wo  $\sum^i B$  die Summe von  $i$  beliebigen unter den Charakteristiken  $B_1, \dots, B_{2p+1}$  bedeutet, so ist der Charakter dieser Formen leicht zu bestimmen. Das allgemeine Glied  $\mathfrak{L} + \sum^i B$  der Reihe (14) hat ver-

schiedene Form, je nachdem  $\sum^i B$  Charakteristiken enthält, die bereits in  $\mathfrak{L}$  vorkommen und sich aufheben oder solche, die in  $\mathfrak{L}$  nicht vorkommen, sondern hinzutreten. Alle diese Formen aber besitzen

denselben Charakter. Denn sie sind, wenn man  $\sum^t u$  für  $\mathfrak{L}$  schreibt, sämtlich enthalten in der Form  $\sum^{t-k} u + \sum^{i-k} g$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ),

sie sind also von gleichem Charakter, da hier die Differenz  $\mu - \nu = t - i$ , d. h. unabhängig von  $k$  ist. Ferner sind die Formen  $\mathfrak{L} + \sum^i B$  und  $\mathfrak{L} + \sum^{i-2} B$  von entgegengesetztem Charakter nach (12), da für die ersteren  $\mu - \nu = t - i$ , für die letzteren  $\mu - \nu = t - i + 2$  ist. Die Formen  $\mathfrak{L} + \sum^i B$  und  $\mathfrak{L} + \sum^{i-4} B$  sind wieder von gleichem Charakter. Berücksichtigt man noch, dass  $\mathfrak{L} + \sum^p B$  und  $\mathfrak{L} + \sum^{p+1} B$  nach (11) von gleichem Charakter sind, so zieht man den Schluss: Die Formen (14) zerfallen in zwei Gruppen von entgegengesetztem Charakter, nämlich wenn  $\varrho = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  ist:

$$(15) \quad \mathfrak{L} + \sum^{p+4\varrho} B, \quad \mathfrak{L} + \sum^{p+4\varrho+1} B,$$

$$(16) \quad \mathfrak{L} + \sum^{p+4\varrho+2} B, \quad \mathfrak{L} + \sum^{p+4\varrho+3} B.$$

Es bleibt also nur noch der Charakter einer dieser Formen zu bestimmen. Nun findet man für die Anzahlen der in den Formen (14), (15), (16) enthaltenen, verschiedenen Charakteristiken, da die Zahl der in  $\mathfrak{L} + \sum^i B$  enthaltenen Charakteristiken der Binomialcoefficient  $(2p+1)_i$  ist, bez. die Werthe  $2^{2p}$ ,  $2^{p-1}(2^p+1)$ ,  $2^{p-1}(2^p-1)$ . Die Vergleichung mit (4) lehrt, dass die Formen (15) sämtlich gerade, die Formen (16) sämtlich ungrade Charakteristiken darstellen. Aus (12) und (15) folgt weiter, dass  $t - p = 4\sigma$  oder  $= 4\sigma + 3$  und  $t - p - 1 = 4\sigma$  oder  $4\sigma + 3$  ist. Daher muss

$$(17) \quad t \equiv p \pmod{4}$$

sein. Dies gibt den Satz<sup>1)</sup>:

(III) Bilden  $2p+1$  Charakteristiken  $B_1, \dots, B_{2p+1}$  in Verbindung mit der Charakteristik 0 ein specielles Funda-

1) Das erste Beispiel einer kanonischen Darstellung aller Charakteristiken durch  $2p+1$  derselben hat Riemann gegeben (vgl. (25)). Herr Prym hat gezeigt, dass sich diese Darstellungen aus der Theorie der hyperelliptischen Integrale und der zugehörigen Thetafunctionen ableiten lassen (Prym, Zur Theorie der Functionen in einer zweiblättrigen Fläche. Zürich 1866. S. 5 ff. und Prym, Unters. üb. d. Riemann'sche Thetaformel. Leipzig 1882. S. VII). Der Satz III oder die rein combinatorische Herleitung der kanonischen Darstellungen aus den Bedingungen (10) wurde gegeben von H. Stahl l. c.).



mentalsystem, d. h. ein System von der Beschaffenheit, dass  $|B_i, B_k \equiv 1 \pmod{2}$  ( $i \geq k$ ), so besteht zwischen den Charakteristiken  $B$  die einzige Gleichung  $B_1 \dots B_{2p+1} \equiv 0$ . Ferner stellen sich die sämtlichen  $2^{2p}$  Charakteristiken in kanonischer Form dar, nämlich die geraden durch die Formen (15), die ungeraden durch die Formen (16). Dabei ist  $\mathfrak{L}$  die Summe der unter den  $B$  enthaltenen ungeraden Charakteristiken und  $t \equiv p \pmod{4}$  die Anzahl dieser Charakteristiken.

Man kann dies auch so aussprechen. Eine beliebige Charakteristik  $\varepsilon$  stellt sich dar in der Form

$$\varepsilon = \mathfrak{L} + \alpha_1 B_1 + \dots + \alpha_{2p+1} B_{2p+1}, \quad (18)$$

wobei unter  $\alpha_i$  die Zahl 0 oder 1 verstanden ist, je nachdem in der

Darstellung  $\varepsilon = \mathfrak{L} + \sum^r B$  unter dem Summenzeichen die Charakteristik  $B_i$  auftritt oder nicht und eine solche Charakteristik ist

$$\left. \begin{array}{l} \text{gerade, wenn } p + 4\varrho \text{ oder } p + 4\varrho + 1, \\ \text{ungrade, wenn } p + 4\varrho + 2 \text{ oder } p + 4\varrho + 3 \end{array} \right\} \quad (19)$$

der  $2p + 1$  Grössen  $\alpha_i$  den Werth 1, die übrigen den Werth 0 haben.

Die Darstellung einer beliebigen Charakteristik  $\varepsilon$  in der Form  $\mathfrak{L} + \sum^r B$  oder der Form (18) ist auf zwei Arten möglich, von denen sich die eine aus der anderen ergibt durch Addition von (11). Eine dritte solche Darstellung kann nicht bestehen, da sich sonst durch ihre Verbindung mit einer der beiden ersten ausser (11) noch eine lineare Relation zwischen den Charakteristiken  $B$  ergeben würde, was nach (III) unmöglich.

Wir stellen jetzt die Frage<sup>1)</sup>: wie lässt sich ein specielles Fundamentalsystem  $0, B_1, \dots, B_{2p+1}$  ermitteln? Zur Lösung dient folgender Hilfssatz:

(a) Sind  $a_{\alpha i}$  ganze  $\neq$  Zahlen und  $x_1, \dots, x_\varrho$   $\varrho$  Variabeln, sind ferner

$$u_\alpha = a_{\alpha 1} x_1 + \dots + a_{\alpha \varrho} x_\varrho \quad (\alpha = 1, 2, \dots, \sigma) \quad (20)$$

$\sigma$  lineare Formen, die  $\pmod{2}$  unabhängig sind, so haben die  $\sigma$  Congruenzen  $u_\alpha \equiv c_\alpha \pmod{2}$ , wo  $c_1, \dots, c_\sigma$  beliebige

1) Frobenius, Journ. für Math. Bd. 89. S. 190 u. S. 208 ff. (1880).

ganze Zahlen sind,  $2^{\sigma-\sigma}$  verschiedene, (mod 2) ganzzahlige Lösungen.

Beweis. Bezeichnet man die Zahl der Lösungen mit  $\varphi$ , so kann man setzen

$$2^\sigma \varphi = \sum (1 + (-1)^{u_1+c_1}) \dots (1 + (-1)^{u_\sigma+c_\sigma}), \quad (21)$$

falls man jedem der Summationsbuchstaben  $x_1, \dots, x_\sigma$  in den  $u$  die Werthe 0 und 1 beilegt. Denn, genügt ein Werthsystem der  $x$  nicht den sämtlichen Congruenzen  $u_\alpha \equiv c_\alpha$ , so ist das entsprechende Glied der Summe  $= 0$ , genügt es ihnen aber,  $= 2^\sigma$ . Führt man nun auf der rechten Seite die Multiplication aus, so ist das erste Glied

$$\sum 1 = 2^\sigma; \text{ irgend ein anderes aber}$$

$$\sum (-1)^{u_1+c_1+\dots+u_\lambda+c_\lambda} = (-1)^{c_1+\dots+c_\lambda} \sum (-1)^{a_1x_1} \dots \sum (-1)^{a_\sigma x_\sigma},$$

wenn man  $u_1 + \dots + u_\lambda = a_1x_1 + \dots + a_\sigma x_\sigma$  setzt. Da  $u_1, \dots, u_\sigma$  (mod 2) unabhängig sind, so können die  $a_1, \dots, a_\sigma$  nicht sämtlich gerade sein. Ist aber  $a_1$  ungrade, so ist  $\sum (-1)^{a_1x_1} = 0$ , weil der eine Summand  $+1$ , der andere  $-1$  ist. Die rechte Seite der letzten Gleichung ist also 0 und folglich die rechte Seite in (21)  $= 2^\sigma$ . (q. e. d.)

Die Ermittlung eines speciellen Fundamentalsystems 0,  $B_1, \dots, B_{2^p+1}$  kann nun schrittweise geschehen, indem man mit der ersten Charakteristik beginnt.

$B_1$  ist verschieden von 0, sonst beliebig, also auf  $2^{2p} - 1$  Arten wählbar.

$B_2$  ist dann irgend eine Lösung der Congruenz  $|B_1, X| \equiv 1$ . Solcher Lösungen gibt es nach dem Hilfssatze (a)  $2^{2p-1}$ .

$B_3$  ist Lösung der beiden Congruenzen  $|B_i, X| \equiv 1$  ( $i = 1, 2$ ). Solcher Lösungen gibt es  $2^{2p-2} - 1$  (wenn  $p > 1$ ), da nach (III) zwischen  $B_1$  und  $B_2$  keine Relation besteht, also die zwei Congruenzen unabhängig sind und da ausserdem die Summe  $B_1 B_2$  als Lösung auszuschliessen ist.

$B_4$  ist Lösung der drei Congruenzen  $|B_i, X| \equiv 1$  ( $i = 1, 2, 3$ ). Solcher Lösungen gibt es nach (a)  $2^{2p-3}$ .

$B_5$  ist Lösung der vier Congruenzen  $|B_i, X| \equiv 1$  ( $i = 1, \dots, 4$ ). Solcher Lösungen gibt es  $2^{2p-4} - 1$  (wenn  $p > 2$ ), da die Summe  $B_1 B_2 B_3 B_4$  als Lösung auszuschliessen ist, u. s. f.

Auf diesem Wege erhält man sämtliche, specielle Fundamentalsysteme. Zugleich ergibt sich, da das angegebene Verfahren auch alle Permutationen der Charakteristiken eines jeden Fundamentalsystems liefert,

also durch die Zahl der Permutationen von  $2p + 1$  Elementen, d. h. durch  $(2p + 1)!$  zu dividiren ist, als Zahl der speciellen Fundamentalsysteme:

$$\frac{(2^{2p}-1)2^{2p-1}(2^{2p-2}-1)\dots 2^3(2^2-1)2}{1 \cdot 2 \dots 2p+1} = \frac{(2^{2p}-1)(2^{2p-2}-1)\dots(2^2-1)}{1 \cdot 2 \dots 2p+1} 2^{pp}. \quad (22)$$

Aus der Bildung des Systemes folgt zugleich: Wenn  $\mu$  Charakteristiken die Eigenschaft haben, dass zwischen je zweien die Relation (10) besteht und dass ihre Summe, falls  $\mu$  ungrade ist, nicht verschwindet, so können sie zu einem speciellen Fundamentalsystem ergänzt werden. So kann man  $2p + 1 - \lambda$  durch die Relationen (10) verbundene Charakteristiken  $B_i$ , deren Summe, wenn  $\lambda$  gerade ist, nicht verschwindet, zu einem speciellen Fundamentalsystem ergänzen auf

$$P_\lambda = \frac{1 \cdot 2 (2^2 - 1) 2^3 (2^4 - 1) \dots (2^{\lambda-1} - \delta)}{1 \cdot 2 \dots \lambda} \quad (23)$$

verschiedene Arten, wo  $\delta = 0$  oder  $= 1$ , je nachdem  $\lambda$  gerade oder ungrade ist.

Ein specielles Fundamentalsystem ist hiernach vollständig bestimmt durch  $2p - 2$  seiner Charakteristiken ( $\lambda = 3$ ,  $\delta = 1$ ,  $P_\lambda = 1$ ); es kann auf 2 Arten vervollständigt werden, wenn  $2p - 3$  Charakteristiken ( $\lambda = 4$ ,  $\delta = 0$ ,  $P_\lambda = 2$ ), auf 6 Arten, wenn  $2p - 4$  Charakteristiken gegeben sind u. s. f.

Man kann auch auf einfache Weise aus einem Fundamentalsystem alle übrigen ableiten. Zunächst ist klar:

Sind  $B_1, B_2, B_3, B_4$  vier Charakteristiken eines speciellen Fundamentalsystems und  $S$  ihre Summe und ersetzt man diese vier Charakteristiken durch  $SB_1, SB_2, SB_3, SB_4$  oder durch  $B_2B_3B_4, B_1B_3B_4, B_1B_2B_4, B_1B_2B_3$ , während man die übrigen ungeändert lässt, so hat man wieder ein specielles Fundamentalsystem.

Es ist aber auch leicht zu sehen, dass man durch wiederholte Anwendung dieser Operation aus einem Fundamentalsystem alle anderen ableiten kann. Denn ist  $B_1, \dots, B_{2p+1}$  ein specielles Fundamentalsystem, so kann mit Hilfe von  $\sum_{i=1}^{2p+1} B_i = 0$  (11) jede Charakteristik auf zwei Arten in die Form  $\sum_{i=1}^{\mu} B_i$  gebracht werden, wo  $\mu = 0, 1, \dots, 2p + 1$  ist. In der einen Darstellung kommt  $B_1$  vor, in der anderen nicht. Mithin kann jede Lösung der Congruenzen

$$(24) \quad B_1, X| \equiv 1, \quad B_2, X| \equiv 1, \dots, B_\lambda, X| \equiv 1$$

in der Form  $X = \sum^u B = B_\alpha B_\beta \dots$  angenommen werden, wo keiner der Indices  $\alpha, \beta, \dots$  gleich 1 ist.

Da unter dieser Voraussetzung

$$|B_1, B_\alpha B_\beta \dots| \equiv |B_1, B_\alpha| + |B_1, B_\beta| + \dots \equiv \mu$$

ist, so muss  $\mu$  ungrade sein. Da ferner

$$|B_2, B_\alpha B_\beta \dots| \equiv |B_2, B_\alpha| + |B_2, B_\beta| + \dots \equiv \mu - 1 \quad \text{oder} \quad \equiv \mu$$

ist, je nachdem einer der Indices  $\alpha, \beta, \dots$  gleich 2 ist oder nicht, so folgt, dass keiner der Indices  $\alpha, \beta, \dots$  gleich 2, 3,  $\dots, \lambda$  sein darf. Mithin sind die sämtlichen Lösungen der Congruenzen (24) dargestellt durch alle Summen je einer ungraden Anzahl der Charakteristiken  $B_{\lambda+1}, \dots, B_{2p+1}$ . Für  $B_{\lambda+1}$  kann man also jede Summe einer ungraden Zahl dieser letzteren Charakteristiken wählen, ähnlich für  $B_{\lambda+2}$  u. s. f., woraus die obige Behauptung folgt.

Will man auf diesem Wege ein gegebenes Fundamentalsystem in ein bestimmtes anderes verwandeln, so geht man schrittweise vor; dabei braucht man nur mit den Charakteristiken zu operiren, die nicht beiden Systemen gemein sind.

Wir untersuchen schliesslich das Verhalten eines speciellen Fundamentalsystems von  $2p + 2$  Charakteristiken  $0, B_1, \dots, B_{2p+1}$  gegenüber einer beliebigen Verlegung des kanonischen Querschnittsystems der Fläche  $T$ . Aus Satz I und II folgt unmittelbar:

(IV) Jedem Uebergang von einem kanonischen Querschnittsystem in ein anderes entspricht der Uebergang von einem speciellen Fundamentalsystem in ein anderes solches System.

Umgekehrt gilt der Satz:

(V) Jedem Uebergang von einem speciellen Fundamentalsystem in ein anderes entspricht der Uebergang von einem kanonischen Querschnittsystem in ein anderes solches System<sup>1)</sup>.

Der Beweis hat nur zu zeigen, dass man jedes Fundamentalsystem  $0, B_1, \dots, B_{2p+1}$  durch wiederholte Anwendung der in § 38 aufgestellten, elementaren Transformationen in ein bestimmtes Fun-

<sup>1)</sup> Diesen Satz hat Herr Frobenius (l. c. S. 187) für allgemeine Fundamentalsysteme (s. § 41) ohne Beweis angegeben.

damentalsystem 0,  $X, X_1, \dots, X_p, Y_1, \dots, Y_p$  verwandeln kann, etwa in folgendes System, das aus  $p$  ungraden und  $p + 2$  geraden Charakteristiken besteht:

$$\left. \begin{aligned} (X_1) &= (1000 \dots 00; 0000 \dots 00), & (Y_1) &= (0000 \dots 00; 1000 \dots 00), \\ (X_2) &= (1100 \dots 00; 1000 \dots 00), & (Y_2) &= (1000 \dots 00; 1100 \dots 00), \\ (X_3) &= (1110 \dots 00; 1100 \dots 00), & (Y_3) &= (1100 \dots 00; 1110 \dots 00), \\ &\dots & \dots & \dots \\ (X_p) &= (1111 \dots 11; 1111 \dots 10), & (Y_p) &= (1111 \dots 10; 1111 \dots 11), \\ (X) &= (1111 \dots 11; 1111 \dots 11), & (0) &= (0000 \dots 00; 0000 \dots 00). \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Wendet man die Transformationen  $T_1, T_2, T_3$  des § 38 auf die Formeln (2) an, so erhält man

$$\left. \begin{aligned} T_1: \xi_\mu &= x_\mu; \xi'_\mu = x'_\mu \quad (\mu=1, \dots, p) \text{ ausser } \xi'_m = x'_m \pm x_m; \\ T_2: \xi_\mu &= x_\mu; \xi'_\mu = x'_\mu \quad (\mu=1, \dots, p) \text{ ausser } \xi'_m = x_m \pm x'_m; \\ T_3: \xi_\mu &= x_\mu; \xi'_\mu = x'_\mu \quad (\mu=1, \dots, p) \text{ ausser } \xi'_n = x_n \pm x_m; \xi'_m = x'_m \mp x'_n. \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

Ist nun  $(x) = (x_1 \dots x_p; x'_1 \dots x'_p)$  eine beliebige, erste, von (0) verschiedene Charakteristik des gegebenen Fundamentalsystems  $B$ , so lässt sich dieselbe durch wiederholte Anwendung der Operationen (26) der Reihe nach auf die folgenden Formen bringen

$$\begin{aligned} (100 \dots 0; x'_1 x'_2 \dots x'_p), \\ (100 \dots 0; 1 \ x'_2 \dots x'_p), \\ (100 \dots 0; 1 \ 0 \dots 0), \\ (100 \dots 0; 0 \ 0 \dots 0). \end{aligned}$$

Die letzte Form ist die Charakteristik  $(X_1)$  in (25). Ist ferner  $(y)$  eine beliebige, zweite, von 0 verschiedene Charakteristik des Fundamentalsystems  $B$ , so muss dieselbe wegen (10) von der Form sein  $(y_1 y_2 \dots y_p; 1 y'_2 \dots y'_p)$ . Sie lässt sich, ohne dass die erste Charakteristik  $(X_1)$  sich ändert, durch die Operationen (26) der Reihe nach verwandeln in

$$\begin{aligned} (y_1 y_2 \dots y_p; 1 \ 0 \dots 0) \\ (0 \ 0 \dots 0; 1 \ 0 \dots 0). \end{aligned}$$

Die letzte Form ist die Charakteristik  $(Y_1)$  in (25). Nach (10) ist nun für zwei weitere, beliebige, von 0 verschiedene Charakteristiken  $(z)$  und  $(t)$  des Systems  $B$   $z_1 = z'_1 = t_1 = t'_1 = 1$  und folglich

$$\sum_{i=1}^p (z_i t'_i + t_i z'_i) \equiv \sum_{i=2}^p (z_i t'_i + t_i z'_i).$$

d. h. für sie reducirt sich die  $p$ -gliedrige Bedingung (10) auf eine eben solche,  $p - 1$ -gliedrige Bedingung. Man kann daher in den noch übrigen Charakteristiken  $B$  das erste und  $p + 1^{\text{te}}$  Element weglassen und mit den  $2p - 2$  bleibenden Elementen ebenso verfahren, wir bei den zwei ersten Charakteristiken mit den  $2p$  Elementen. Man erhält so der Reihe nach statt des Systems  $0, B_1 \dots B_{2p+1}$  die Charakteristiken  $0, X_1, Y_1, X_2, Y_2, \dots, X_p, Y_p$  und als letzte die Charakteristik  $X = (11 \dots 1; 11 \dots 1)$ . (q. e. d.)

#### § 40. Die lineare Transformation der Thetafunction<sup>1)</sup>.

Wir kommen zur Untersuchung der Transformation, welche die Thetafunction und ihre Elemente, nämlich ihre Argumente, ihre Moduln und ihre Charakteristik, bei einer Verlegung des kanonischen Querschnittsystems der Fläche  $T$  erfahren. Diese Untersuchung stützt sich auf die Ergebnisse der beiden letzten §§. Wir geben den Gleichungen des § 38 eine andere Form, indem wir an Stelle der  $p$  linear unabhängigen Integrale  $w_1, \dots, w_p$ , die den beiden Lagen der Querschnittsysteme  $a, b$  und  $a', b'$  entsprechenden zwei Systeme von  $p$  Normalintegralen, nämlich  $u_1, \dots, u_p$  mit den Perioden  $a_{ik}$  und  $v_1, \dots, v_p$  mit den Perioden  $b_{ik}$  einführen und die Beziehungen zwischen den Integralen  $u$  und  $v$  und zwischen den Moduln  $a_{ik}$  und  $b_{ik}$  aufsuchen, unter der Voraussetzung, dass die Coefficienten der kanonischen Transformation  $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ , den Bedingungen (6) oder (10) § 38 gemäss, irgendwie gegeben sind. Für die Grössen  $a_{ik}$  und  $b_{ik}$  gelten die früher bewiesenen Sätze (XIII und XV § 15), nämlich dass, wenn  $(i, k = 1, \dots, p)$  ist:  $a_{ik} = a_{ki}$ ;  $b_{ik} = b_{ki}$  und dass  $\sum_{ik} \bar{a}_{ik} x_i x_k$  und  $\sum_{ik} \bar{b}_{ik} y_i y_k$  für reelle Werthe der  $x$  und  $y$  negativ sind. Dabei bedeuten  $\bar{a}_{ik}$  und  $\bar{b}_{ik}$  die reellen Theile von  $a_{ik}$  und  $b_{ik}$ .

Die den Perioden der Integrale  $w$  entsprechenden Perioden der Integrale  $u$  an den Querschnitten  $a, b$  und Perioden der Integrale  $v$  an den Querschnitten  $a', b'$  sind nach (11) § 15 gegeben durch das Schema

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{c|c} w_k & u_1 \dots u_r \dots u_p \\ \hline a_r & A_{rk} \quad 0 \dots \pi i \dots 0 \\ b_r & B_{rk} \quad a_{r1} \dots a_{rp} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{c|c} w_k & v_1 \dots v_r \dots v_p \\ \hline a'_r & A'_{rk} \quad 0 \dots \pi i \dots 0 \\ b'_r & B'_{rk} \quad b_{r1} \dots b_{rp} \end{array} \right.$$

1) Thomae, Diss. Göttingen 1864 und Journ. für Matht. Bd. 75. S. 232 ff. (1872). Clebsch-Gordan, Ab. F. S. 311 ff. (1866) in anderer Herleitung. Weber, Annali di matem. Ser. II. T. IX. S. 126 ff. (1878).

Daher hat man die Gleichungen (vgl. (13) und (15) § 15), wenn  $(k, l, \mu = 1, \dots, p)$ :

$$\pi i w_k = \sum_l A_{lk} u_l = \sum_l A'_{lk} v_l, \quad (2)$$

$$\pi i B_{\mu k} = \sum_l A_{lk} a_{\mu l}, \quad \pi i B'_{\mu k} = \sum_l A'_{lk} b_{\mu l}. \quad (3)$$

Man kann in diesen Gleichungen entweder die Grössen  $v_i$  und  $b_{ik}$  oder die Grössen  $u_i$  und  $a_{ik}$  als die gegebenen, die anderen jedesmal als die gesuchten ansehen; man erhält so zwei Systeme von Gleichungen, die neben einander betrachtet werden sollen. Man löse zuerst die Gleichungen (2) nach den  $u$  auf; es sei  $(\mu, \nu = 1, \dots, p)$ :

$$u_\mu = \sum_\nu M_{\nu\mu} v_\nu. \quad (4)$$

Setzt man in (2)  $v_1, \dots, v_r, \dots, v_p = 0, \dots, \pi i, \dots, 0$ , so erhält man als entsprechenden Werth von  $w_k$  nach dem Schema (1) und nach (2) § 38:

$$A'_{rk} = \sum_\mu (\alpha_{r\mu} A_{\mu k} + \beta_{r\mu} B_{\mu k}). \quad (5)$$

Der entsprechende Werth von  $u_\mu$  ist

$$\pi i M_{r\mu} = \alpha_{r\mu} \pi i + \sum_l \beta_{rl} a_{\mu l}. \quad (6)$$

Denn der Werth der linken Seite dieser Gleichung folgt unmittelbar aus (4); der Werth der rechten Seite wird leicht verificirt; setzt man nämlich den Werth (5) von  $w_k$  und den Werth der rechten Seite von (6) für  $u_\mu$  in (2) ein, so stimmen beide Seiten von (2) wegen der ersten Gleichung (3) überein.

Setzt man dagegen in (2)  $v_1, \dots, v_p = b_{r1}, \dots, b_{rp}$ , so geht nach dem Schema (1) und nach (2) § 38  $w_k$  über in

$$B'_{rk} = \sum_\mu (\gamma_{r\mu} A_{\mu k} + \delta_{r\mu} B_{\mu k}) \quad (7)$$

und folglich  $u_\mu$  über in

$$\sum_i M_{i\mu} b_{ir} = \gamma_{r\mu} \pi i + \sum_i \delta_{ri} a_{\mu i} = P_{r\mu}. \quad (8)$$

Der Werth der linken Seite ergibt sich wieder unmittelbar aus (4); der der rechten Seite, indem man den Werth (7) von  $w_k$  und den Werth der rechten Seite von (8) für  $u_\mu$  in (2) einträgt und die erste Gleichung (3) berücksichtigt.

Die Gleichungen (4, 6, 8) lösen die Aufgabe, die Grössen  $u_i$  und  $a_{ik}$  zu bestimmen, wenn die Grössen  $v_i$  und  $b_{ik}$  gegeben sind. Denn aus (6) und (8) erhält man, wenn  $v = 1, \dots, p$  gesetzt wird, die Werthe von  $a_{\mu 1}, \dots, a_{\mu p}$  und die Werthe der  $M_{v\mu}$ ; alsdann aus (4) die der  $u_\mu$ . Die Determinante der Grössen  $M_{v\mu}$  kann nach den Sätzen des § 15 nicht verschwinden.

Man erhält ein zweites, ganz analoges System von Gleichungen, indem man die Gleichungen (2) nach den  $v$  auflöst; es sei

$$(9) \quad v_\mu = \sum_v N_{\mu v} u_v.$$

Setzt man  $u_1, \dots, u_v, \dots, u_p = 0, \dots, \pi i, \dots, 0$ , so geht nach dem Schema (1) und nach (8) § 38  $w_k$  über in

$$A_{vk} = \sum_\mu (\delta_{\mu v} A'_{\mu k} - \beta_{\mu v} B'_{\mu k})$$

und folglich  $v_\mu$  über in

$$(10) \quad \pi i N_{\mu v} = \delta_{\mu v} \pi i - \sum_i \beta_{iv} b_{\mu i}.$$

Setzt man dagegen  $u_1, \dots, u_p = a_{v1}, \dots, a_{vp}$ , so geht  $w_k$  über in

$$B_{vk} = \sum_\mu (-\gamma_{\mu v} A'_{\mu k} + \alpha_{\mu v} B'_{\mu k})$$

und folglich  $v_\mu$  über in

$$(11) \quad \sum_i N_{\mu i} a_{vi} = -\gamma_{\mu v} \pi i + \sum_i \alpha_{iv} b_{\mu i} = Q_{\mu v}.$$

Die Vergleichung der beiden Formelsysteme (4, 6, 8) und (9, 10, 11) zeigt, dass man in den Entwicklungen durchgehend die Grössen

$$(12a) \quad u_i, a_{ik}, \alpha_{i\mu}, \beta_{i\mu}, \gamma_{i\mu}, \delta_{i\mu}, M_{v\mu}, P_{v\mu}$$

vertauschen kann bez. mit den Grössen

$$(12b) \quad v_i, b_{ik}, \delta_{\mu i}, -\beta_{\mu i}, -\gamma_{\mu i}, \alpha_{\mu i}, N_{\mu v}, Q_{\mu v}.$$

Trägt man die Werthe der  $v$  aus (9) in (4) und umgekehrt die der  $u$  aus (4) in (9) ein, so erhält man zwischen den  $M$  und  $N$  die Beziehungen

$$(13) \quad \begin{cases} \sum_v M_{v\mu} N_{v\mu} = 1, & \sum_v M_{v\mu} N_{vi} = 0, \\ \sum_v M_{\mu v} N_{\mu v} = 1, & \sum_v M_{iv} N_{\mu v} = 0, \end{cases} \quad (i \gtrless \mu).$$



Setzt man

$$M = \sum \pm M_{11} \dots M_{pp}, \quad N = \sum \pm N_{11} \dots N_{pp}, \quad (14)$$

so folgt

$$MN = 1. \quad (15)$$

Diese Entwicklungen sollen nunmehr zur Transformation der Thetafunction verwandt werden. Auf Grund der Gleichungen (4, 6, 8) suchen wir Beziehungen auf zwischen Thetafunctionen mit den Argumenten  $v_h$  und Moduln  $b_{hk}$  und Thetafunctionen mit den Argumenten  $u_h$  und Moduln  $a_{hk}$ . Hierzu gehen wir aus von der Thetafunction erster Ordnung mit den Argumenten  $u_h$ , den Moduln  $a_{hk}$  und der zweitheiligen Charakteristik  $(x)$ , nämlich (vgl. (37) § 26):

$$\begin{aligned} \vartheta_x(u; a) &= \vartheta_x(u_1, \dots, u_p; a) \\ &= (-1)^{\sum x_i x'_i} \sum_{n_1} \sum_{a_p} e^{i \sum_{k=1}^p a_{ik} \left(n_i + \frac{x_i}{2}\right) \left(n_k + \frac{x_k}{2}\right) + 2 \sum_i \left(n_i + \frac{x_i}{2}\right) \left(u_i + \frac{1}{2} x'_i \pi i\right)} \end{aligned} \quad (16)$$

In diese Function tragen wir die Werthe (4) ein, wodurch sie in eine Function der Argumente  $v_i$  übergeht, und untersuchen das Verhalten dieser Function bei Vermehrung der Argumente um die zu den  $v_i$  gehörigen Periodensysteme.

Wächst  $v_r$  um  $\pi i$ , also  $u_\mu$  um den Werth (6), so geht  $\vartheta_x(u; a)$  nach (12) § 26 über in

$$\vartheta_x(u; a) \cdot (-1)^i \sum_i (a_{ri} x_i + \beta_{ri} x'_i) \quad -2 \sum_i \beta_{ri} u_i - \sum_{i,k} a_{ik} \beta_{ri} \beta_{i,k}. \quad (17)$$

Wächst  $v_1, \dots, v_p$  um  $b_{r1}, \dots, b_{rp}$ , also  $u_\mu$  um den Werth (8), so geht  $\vartheta_x(u; a)$  über in

$$\vartheta_x(u; a) \cdot (-1)^i \sum_i (\gamma_{ri} x_i + \delta_{ri} x'_i) \quad -2 \sum_i \delta_{ri} u_i - \sum_{i,k} a_{ik} \delta_{ri} \delta_{i,k}. \quad (18)$$

Aus (17) schliesst man, dass die Function  $\vartheta_x(u; a)$  durch Multiplication mit einem Factor, dessen Logarithmus eine homogene Function zweiten Grades in  $u_1, \dots, u_p$  ist, in eine Function verwandelt werden kann, die für jede der Variabeln  $v_1, \dots, v_p$  die Periode  $\pi i$  besitzt. Wir betrachten daher, indem wir

$$f(u) = f(u_1, \dots, u_p) = \sum_{i,k} c_{ik} u_i u_k \quad (19)$$

setzen, statt  $\vartheta_x(u; a)$  die folgende Function:

$$\vartheta_x(u_1, \dots, u_p; a) e^{f(u_1, \dots, u_p)} = F(v_1, \dots, v_p). \quad (20)$$

Es wird sich zeigen, dass sich die Coefficienten  $c_{ik}$  in (19) so bestimmen lassen, dass (20) eine Thetafunction erster Ordnung mit den Argumenten  $v_i$ , den Moduln  $b_{ik}$  und einer gewissen, zweitheiligen Charakteristik (§) ist, dass sie also den beiden Functionalgleichungen genügt. (Vgl. (38) § 26):

$$(21) \quad \begin{cases} F(v_1, \dots, v_i + \pi i, \dots, v_p) = (-1)^{\xi_v} F(v_1, \dots, v_i, \dots, v_p) \\ F(v_1 + b_{v1}, \dots, v_p + b_{vp}) = (-1)^{\xi_v} F(v_1, \dots, v_p) e^{-2\pi v - b_{v1}}. \end{cases}$$

Wir suchen zunächst der ersten Gleichung (21) zu genügen; dabei bestimmen sich die Grössen  $c_{ik}$  und die Zahlen  $\xi_v$ . Lässt man  $v_v$  um  $\pi i$  wachsen, so wächst  $u_\mu$  um  $\pi i M_{v\mu}$  (6) und es geht  $f(u)$  über in

$$(22) \quad f(u_1, \dots, u_i) + 2\pi i \sum_{i,k} c_{ik} u_i M_{i,k} - \pi^2 \sum_{i,k} c_{ik} M_{vi} M_{v,k}.$$

Soll nun  $F(v_1, \dots, v_p)$  der ersten Gleichung (21) genügen, so hat man, wie die Vergleichung mit (17) ergibt, zu setzen:

$$\sum_i \beta_{vi} u_i = \pi i \sum_{i,k} c_{ik} u_i M_{i,k},$$

oder

$$(23) \quad \beta_{vi} = \pi i \sum_k c_{ik} M_{i,k} \quad (v, i = 1, \dots, p).$$

Hieraus folgt durch Auflösung nach  $c_{ik}$  und wegen (6)

$$(24) \quad c_{ik} = \frac{1}{\pi i} \sum_v \beta_{vi} \frac{\partial \log M}{\partial M_{v,k}} = \frac{\partial \log M}{\partial a_{ik}},$$

wo  $M$  die Determinante (14) bedeutet. Hiermit sind die Coefficienten  $c_{ik}$  in (19) eindeutig bestimmt; für sie gelten die Gleichungen

$$(25) \quad c_{ik} = c_{ki},$$

wie aus (24) unmittelbar folgt.

Man kann nun auch das letzte Glied in (22) bilden. Aus (23) in Verbindung mit (6) folgt:

$$(26) \quad -\pi^2 \sum_{i,k} c_{ik} M_{vi} M_{v,k} = \pi i \sum_i M_{vi} \beta_{vi} = \pi i \sum_i \alpha_{vi} \beta_{vi} + \sum_{i,k} a_{ik} \beta_{vi} \beta_{v,k}.$$

Aus (17) und (22) ergibt sich nunmehr, dass die Function  $F(v_1, \dots, v_p)$  der ersten Gleichung (21) genügt, wenn man setzt:

$$(27) \quad \xi_v \equiv \sum_i (\alpha_{vi} x_i + \beta_{vi} x'_i + \alpha_{vi} \beta_{vi}) \pmod{2}.$$

Wir suchen ferner die Bedingungen auf, unter denen die Function (20) auch der zweiten Gleichung (21) genügt; dabei ergeben sich

die Zahlen  $\xi'$ . Lässt man  $v_1, \dots, v_p$  um  $b_{r1}, \dots, b_{rp}$  wachsen, so wächst  $u_\mu$  um  $P_{r\mu}$  (8); folglich geht  $f(u)$  über in

$$f(u_1, \dots, u_p) + 2 \sum_{i,k} c_{ik} u_i P_{rk} + \sum_{i,k} c_{ik} P_{ri} P_{rk}. \quad (28)$$

Um die beiden letzten Glieder von (28) auszuwerthen, entnehme man den Gleichungen (6) und (8) die Werthe von  $\alpha_{ri}$  und  $\gamma_{ri}$  und trage sie in die Gleichungen (10) § 38 nämlich

$$\sum_i (\alpha_{ri} \delta_{\mu i} - \beta_{ri} \gamma_{\mu i}) = \begin{cases} +1, & \text{wenn } \mu = r, \\ 0, & \text{wenn } \mu \neq r \end{cases}$$

ein; man erhält

$$\sum_i \delta_{ri} M_{\mu i} - \pi i \sum_i \beta_{ri} P_{ri} = \begin{cases} 1, & \text{wenn } \mu = r, \\ 0, & \text{wenn } \mu \neq r. \end{cases}$$

Ersetzt man hier  $\beta_{ri}$  durch seinen Werth aus (23), so folgt

$$\sum_i M_{\mu i} (\delta_{ri} - \sum_k c_{ik} P_{rk}) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } \mu = r, \\ 0, & \text{wenn } \mu \neq r. \end{cases} \quad (29)$$

Multiplicirt man die linke Seite von (29) mit  $v_\mu$  und summirt nach  $\mu$ , so folgt wegen (4)

$$\sum_{i,k} c_{ik} u_i P_{rk} = -v_r + \sum_i \delta_{ri} u_i.$$

Multiplicirt man dagegen die linke Seite von (29) mit  $b_\mu$  und summirt nach  $\mu$ , so folgt wegen (8)

$$\sum_{i,k} c_{ik} P_{ri} P_{rk} = -b_{rr} + \pi i \sum_i \gamma_{ri} \delta_{ri} + \sum_{i,k} a_{ik} \delta_{ri} \delta_{rk}. \quad (30)$$

Wächst also  $v_1, \dots, v_p$  um  $b_{r1}, \dots, b_{rp}$ , so geht  $f(u)$  nach (28, 29, 30) über in

$$f(u_1, \dots, u_p) - 2v_r - b_{rr} + 2 \sum_i \delta_{ri} u_i + \pi i \sum_i \gamma_{ri} \delta_{ri} + \sum_{i,k} a_{ik} \delta_{ri} \delta_{rk}.$$

Dies in Verbindung mit (18) zeigt, dass die Function  $F(c_1, \dots, c_p)$  (20) auch der zweiten Gleichung (21) genügt, wenn man setzt:

$$\xi'_r \equiv \sum_i (\gamma_{ri} x_i + \delta_{ri} x'_i + \gamma_{ri} \delta_{ri}) \pmod{2}. \quad (31)$$

Man kann also in der That den Bedingungen (21) genügen; die Grössen  $c_{ik}$  bestimmen sich aus (24), die Charakteristik ( $\xi$ ) aus (27) und (31). Die Auflösung der letzten Gleichungen nach  $x_i$  und  $x'_i$  lautet

$$(32) \quad x_i \equiv \sum_{\mu} (\delta_{\mu i} \xi_{\mu} - \beta_{\mu i} \xi'_{\mu} + \beta_{\mu i} \delta_{\mu i}), \quad x'_i \equiv \sum_{\mu} (-\gamma_{\mu i} \xi_{\mu} + \alpha_{\mu i} \xi'_{\mu} + \alpha_{\mu i} \gamma_{\mu i}),$$

d. h. die aufgelösten Gleichungen unterscheiden sich von den ursprünglichen nur dadurch, dass an Stelle der Transformationscoefficienten die inversen Coefficienten getreten sind.

Die Transformationsformel für die Thetafunction lautet nunmehr nach (20) und (24)

$$(33) \quad \vartheta_z(v; b) = A \vartheta_x(u; a) e^{f(u)},$$

wo

$$(34) \quad f(u) = \sum_{i,k} \frac{\partial \log M}{\partial a_{ik}} u_i u_k.$$

Es ist klar, dass man in den vorstehenden Entwicklungen durchgehend die Grössen

$$u, a, \alpha_{i\mu}, \quad \beta_{i\mu}, \quad \gamma_{i\mu}, \delta_{i\mu}, M, P, x$$

vertauschen kann bez. mit

$$v, b, \delta_{i\mu}, -\beta_{i\mu}, -\gamma_{i\mu}, \alpha_{i\mu}, N, Q, y.$$

Man erhält so gleichzeitig mit (33) und (34) die Formeln

$$(35) \quad \vartheta_x(u; a) = B \vartheta_z(v; b) e^{\varphi(v)},$$

wo

$$(36) \quad \varphi(v) = \sum_{i,k} \frac{\partial \log N}{\partial b_{ik}} v_i v_k.$$

Die Constanten  $A$  und  $B$ , sowie die Functionen  $f(u)$  und  $\varphi(v)$  in (33) und (35) stehen in enger Beziehung zu einander. Eliminirt man aus beiden Gleichungen die Functionen  $\vartheta$  und setzt dann  $u_1, \dots, u_p$ , also nach (4) auch  $v_1, \dots, v_p$  gleich 0,  $\dots, 0$ , so folgt

$$(37) \quad AB = 1 \quad \text{und} \quad f(u) + \varphi(v) \equiv 0 \pmod{2\pi i}.$$

Es bleibt noch die Constante  $A$  in (33) zu bestimmen; dieselbe ist abhängig von den Moduln  $a_{ik}$  (oder  $b_{ik}$ ), den Transformationscoefficienten  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  und der Charakteristik  $x$  (oder  $\xi$ ). Wir verweisen wegen dieser Rechnung auf die Litteratur<sup>1)</sup>.

Die gewonnenen Resultate fassen wir zusammen in den Satz:

Bei einer Verlegung des kanonischen Querschnittsystems oder bei einer kanonischen Transformation der

1) Thomae, l. c. Clebsch-Gordan, l. c. S. 318 ff. Weber, Journ. für Math. Bd. 74. S. 574 (1871).

Perioden, dargestellt durch die Gleichungen (2) § 38 mit den Bedingungen (6) oder (10) § 38, verändern sich auch

- 1) die Argumente der Thetafunction  $u_k$  in  $v_k$   
gemäss den Gleichungen (4) oder (9);
- 2) die Moduln der Thetafunction  $a_{ik}$  in  $b_{ik}$   
gemäss den Gleichungen (8) oder (11);
- 3) die Charakteristik der Thetafunction  $x$  in  $\xi$   
gemäss den Gleichungen (27) und (31) oder (32);
- 4) die Thetafunction selber  $\vartheta_x(u; a)$  in  $\vartheta_\xi(v; b)$   
gemäss den Gleichungen (33) oder (35).

Diese Transformation heisst die lineare Transformation der Thetafunctionen. Da die Transformationscoefficienten  $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$  auf unendlich viele Arten gewählt werden können, so heisst die Theorie der linearen Transformation auch die Theorie der unendlich vielen Formen der Thetafunction. Da ferner lineare Transformationen, deren Coefficienten  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  nach dem Modul 2 congruent sind, zu denselben Charakteristiken der transformirten Thetafunctionen führen, so betrachtet man nur solche lineare Transformationen als wesentlich verschieden, deren Coefficienten (mod 2) verschieden sind; die Zahl dieser letzteren ist endlich.

#### §. 41. Transformation der Thetacharakteristiken.

In § 40 wurde die einer Verlegung des kanonischen Querschnittsystems  $(a, b)$  entsprechende, lineare Transformation der Thetafunction untersucht. Bei derselben ändern sich die Argumente, die Moduln und die Charakteristik der Thetafunction. Wir betrachten jetzt eingehender die Transformation der Thetacharakteristiken, die von der der Periodencharakteristiken (§ 39) wesentlich abweicht. Die Transformation zwischen zwei Thetacharakteristiken  $x$  und  $\xi$  war gegeben durch die linearen, nicht homogenen Gleichungen<sup>1)</sup> (27) und (31) § 40, nämlich, wenn  $(i, \nu = 1, \dots, p)$ :

$$\begin{aligned}\xi_r &\equiv \sum_i (\alpha_{ri} x_i + \beta_{ri} x'_i + \alpha_{ri} \beta_{ri}), \\ \xi'_r &\equiv \sum_i (\gamma_{ri} x_i + \delta_{ri} x'_i + \gamma_{ri} \delta_{ri}) \pmod{2},\end{aligned}\tag{1}$$

wobei vorausgesetzt ist, dass die Coefficienten  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  den Gleichungen (6) oder (10) § 38 genügen.

1) Für  $p = 2$ : Hermite, Comptes rendus. T. 40, S. 367 (1855).

Wie aus Periodencharakteristiken, so lassen sich auch aus Theta-characteristiken gewisse Formen bilden, die der linearen Transformation oder der Querschnittverlegung gegenüber invariant sind. Ein erster Satz ist folgender:

(1) Ist  $(x)$  eine beliebige Thetacharakteristik, so ist der Ausdruck

$$(2) \quad x \equiv \sum_i x_i x'_i$$

invariant für jede Verlegung des Querschnittsystems oder jede lineare Transformation der Thetafunctionen.

Dass  $|\xi| \equiv |x|$  ergibt sich aus (1) mit Hilfe der Relationen (6) oder (10) § 38. Dasselbe folgt auch so: Setzt man in der Transformationsgleichung für die Thetafunction (33) § 40  $-u_i$  für  $u_i$ , also nach (4) § 40 auch  $-v_i$  für  $v_i$  ( $i = 1, \dots, p$ ), so nimmt, da die Constante  $A$  von den  $u_i$  unabhängig und  $f(u)$  homogen vom zweiten Grade in den  $u_i$  ist, die linke Seite den Factor  $(-1)^{\frac{p}{2}}$ , die rechte Seite den Factor  $(-1)^{|x|}$  an nach (41) § 26. Da andererseits die Gleichung (33) § 40 ungeändert bleiben muss, so folgt  $(-1)^{|\xi|} = (-1)^{|x|}$  oder  $|\xi| \equiv |x| \pmod{2}$ . (q. e. d.)

Hiernach geht jede gerade Charakteristik wieder in eine gerade, jede ungrade Charakteristik wieder in eine ungrade über; dasselbe gilt von den Thetafunctionen. Aus (1) ergibt sich sofort ein zweiter Satz. Nach (1) geht die Summe einer ungraden Anzahl von Thetacharakteristiken  $x, y, z, \dots$  über in die Summe der transformirten Thetacharakteristiken  $\xi, \eta, \xi, \dots$ . Es ist also auch  $|xyz|$  und allgemein  $|xx_1 \dots x_{2\lambda}|$  invariant. Daher folgt aus (1):

(II) Sind  $x, y, z$  drei beliebige Thetacharakteristiken, so ist der Ausdruck

$$(3) \quad |x, y, z| \equiv |x| + |y| + |z| + |xyz|$$

invariant für jede Verlegung des Querschnittsystems oder jede lineare Transformation der Thetafunctionen.

Der Ausdruck  $|x, y, z|$  lässt sich auch schreiben (vgl. die Definitionen S. 263)

$$(4) \quad |x, y, z| \equiv |x, y| + |y, z| + |z, x| \equiv |xy| + |yz| + |zx|,$$

so dass, wenn  $C$  eine beliebige Thetacharakteristik ist,

$$(5) \quad |x, y, z| \equiv |Cx, Cy, Cz|.$$

Wie früher für die Periodencharakteristiken der invariante Ausdruck von zwei Charakteristiken  $|x, y|$  (I, § 39), so gibt hier für die Thetacharakteristiken der invariante Ausdruck von drei Charakteristiken

$[x, y, z]$  Anlass zur Untersuchung eines Systems von Thetacharakteristiken von der Beschaffenheit, dass zwischen je dreien derselben dieser Ausdruck (3) entweder den Werth 0 oder 1 (mod 2) hat. Systeme der letzteren Art führen auf die sog. allgemeinen Fundamentalsysteme von Charakteristiken<sup>1)</sup>. Man kann dieselben noch einfacher unmittelbar aus den früher (§ 39) betrachteten, speciellen Fundamentalsystemen herleiten, indem man definirt:

(III) Addirt man zu den Charakteristiken eines speciellen Fundamentalsystems von  $2p + 2$  Charakteristiken  $0, B_1, \dots, B_{2p+1}$  eine beliebige Charakteristik  $A_0$  und setzt

$$A_0 B_i \equiv A_i \quad \text{oder} \quad B_i \equiv A_0 A_i, \quad (6)$$

so bilden die  $2p + 2$  Charakteristiken

$$A_0, A_1, \dots, A_{2p+1} \quad (7)$$

ein allgemeines Fundamentalsystem von  $2p + 2$  Charakteristiken.

Ist  $C$  eine beliebige Charakteristik, so bilden die  $2p + 2$  Charakteristiken  $CA_0, CA_1, \dots, CA_{2p+1}$  offenbar ebenfalls ein allgemeines Fundamentalsystem und zwar ein von dem ursprünglichen verschiedenes, wenn  $C$  von 0 verschieden ist. Setzt man  $C = A_0$  und  $CA_i = B_i$ , so erhält man umgekehrt aus dem allgemeinen ein specielles Fundamentalsystem von der in § 39 betrachteten Art.

Die Eigenschaften eines allgemeinen Fundamentalsystems sind nach der Definition (III) folgende:

1) Zwischen je dreien der Charakteristiken (7) besteht die Relation:

$$[A_i, A_k, A_l] \equiv 1 \pmod{2}. \quad (8)$$

Dies folgt unmittelbar aus (6) und der Darstellung (4) von  $[x, y, z]$ .

Umgekehrt können die Bedingungen (8) zur Definition eines allgemeinen Fundamentalsystems dienen.

2) Da  $A_0$  als beliebige Charakteristik sich in die Form bringen lassen muss  $A_0 \equiv B_1 \dots B_{2\lambda} \equiv B_{2\lambda+1} \dots B_{2p+1}$ , so folgt aus (6),

1) Die allgemeinen Fundamentalsysteme sind untersucht von Herrn Frobenius (Journ. für Math. Bd. 89 S. 203 ff. 1880) auf Grund der Definitionsgleichungen (8). Systeme von Charakteristiken, für die der Ausdruck (3) den Werth 0 bez. 1 hat, heissen auch syzygetische bez. azygetische Systeme. Entsprechende Bezeichnungen gelten für die speciellen Fundamentalsysteme. Die obige Herleitung der Eigenschaften der allgemeinen aus denen der speciellen Fundamentalsysteme hat Herr Prym gegeben (Unters. üb. d. Riemann'sche Thetaformel, Leipzig 1882, S. 64–70). Dasselbst ist auch die Bezeichnung „kanonische Darstellung“ der Charakteristiken durch ein Fundamentalsystem eingeführt.

dass zwischen den Charakteristiken (7) zwei Relationen bestehen von der Form

$$(9) \quad A_0 A_1, \dots A_{2\lambda} \equiv 0, \quad A_{2\lambda+1} \dots A_{2p+1} \equiv 0;$$

aus ihnen folgt

$$(10) \quad A_0 A_1 \dots A_{2p+1} \equiv 0.$$

Eine weitere Relation aber kann zwischen den  $2p+2$  Charakteristiken (7) nicht bestehen, weil sonst eine lineare Relation zwischen den Charakteristiken  $B$  bestehen müsste, ausser  $B_1 B_2 \dots B_{2p+1} \equiv 0$ , was nicht der Fall ist (Satz III § 39).

Man kann nun, ebenso wie (§ 39) durch ein specielles, so auch durch ein allgemeines Fundamentalsystem sämmtliche  $2^{2p}$  Charakteristiken in kanonischer Form darstellen, d. h. so, dass sich der gerade oder ungrade Charakter einer jeden Charakteristik sofort erkennen lässt. Nach (18) § 39 hat man für eine beliebige Charakteristik  $\varepsilon$  die Darstellung

$$(11) \quad \varepsilon = \mathfrak{L} + \alpha_1 B_1 + \dots + \alpha_{2p+1} B_{2p+1}.$$

Durch Einführung der  $A$  aus (6) erhält man statt dessen

$$\varepsilon = \mathfrak{L} + (\alpha_1 + \dots + \alpha_{2p+1}) A_0 + \alpha_1 A_1 + \dots + \alpha_{2p+1} A_{2p+1}.$$

Addirt und subtrahirt man auf der rechten Seite  $(p+1) A_0$  und setzt

$$\mathfrak{L} + (p+1) A_0 \equiv K, \quad \alpha_0 \equiv \sum_{v=1}^{2p+1} \alpha_v - (p+1),$$

so erhält man die Darstellung

$$(12) \quad \varepsilon = K + \alpha_0 A_0 + \alpha_1 A_1 + \dots + \alpha_{2p+1} A_{2p+1}$$

mit der Bedingung

$$(13) \quad \sum_{v=0}^{2p+1} \alpha_v \equiv p+1 \pmod{2}.$$

Der gerade oder ungrade Charakter von (12) lässt sich nun leicht feststellen.

Nach (19) § 39 ist  $\varepsilon$  gerade, wenn von den  $2p+1$  Grössen  $\alpha_1, \dots, \alpha_{2p+1}$  entweder  $p+4\varrho$  oder  $p+4\varrho+1$  den Werth 1 haben. Im ersten Falle folgt aus (13)  $\alpha_0 = 1$ ; im zweiten Falle  $\alpha_0 = 0$ , so dass in beiden Fällen von den  $2p+2$  Grössen  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{2p+1}$  in (12)  $p+4\varrho+1$  den Werth 1, die übrigen den Werth 0 haben.

Dagegen ist  $\varepsilon$  ungrade, wenn von den  $2p+1$  Grössen  $\alpha_1, \dots, \alpha_{2p+1}$  entweder  $p+4\varrho+2$  oder  $p+4\varrho+3$  den Werth 1 haben; im ersten Falle ist  $\alpha_0 = 1$ , im zweiten Falle  $\alpha_0 = 0$ , so dass in beiden



Fällen von den  $2p + 2$  Grössen  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{2p+1}$  in (12)  $p + 4q + 3$  den Werth 1, die übrigen den Werth 0 haben.

Hieraus folgt, wenn  $\sum^i A$  die Summe von  $i$  beliebigen unter den Charakteristiken (7) bedeutet, der Satz:

(IV) Sind  $A_0, A_1, \dots, A_{2p+1}$  die  $2p + 2$  Charakteristiken eines allgemeinen Fundamentalsystems, definirt durch das Bildungsgesetz (III) (oder, was dasselbe, durch die Bedingungen (8)), so bestehen zwischen denselben nur zwei Gleichungen von der Form (9). Ferner stellen sich die sämtlichen  $2^{2p}$  Charakteristiken dar in kanonischer Form, nämlich, wenn  $q = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  ist,

$$\begin{aligned} \text{die geraden Charakteristiken in der Form } K + \sum_{p+4q+1}^{p+4q+1} A, \\ \text{die ungeraden Charakteristiken in der Form } K + \sum_{p+4q-1}^{p+4q-1} A. \end{aligned} \quad (14)$$

Wir zeigen noch, dass (ähnlich wie bei den speciellen Fundamentalsystemen) in den Darstellungen (14)  $K$  die Summe der unter den  $2p + 2$  Charakteristiken  $A_i$  enthaltenen, ungeraden Charakteristiken ist und dass die Zahl dieser Charakteristiken  $\equiv p \pmod{4}$  ist.

Die Darstellung einer Charakteristik  $\varepsilon$  in der kanonischen Form (12) mit den Bedingungen (13) ist auf zwei Arten möglich, von denen die eine aus der andern hervorgeht durch Addition von (10). Eine dritte solche Darstellung kann nicht bestehen, da sich durch ihre Verbindung mit den beiden genannten Darstellungen ausser (9) und (10) noch eine weitere, lineare Relation zwischen den  $A$  ergeben würde, was unmöglich.

Man erhält aber, indem man zu der Gleichung (12) die Gleichungen (9) addirt, für dieselbe Charakteristik  $\varepsilon$  noch zwei weitere Darstellungen der Form (12), bei denen aber  $\sum_{r=0}^{2p+1} \alpha_r \equiv p \pmod{2}$ . Diese Darstellungen sollen nichtkanonische heissen, da sich bei ihnen nicht aus der Anzahl der von 0 verschiedenen Grössen  $\alpha$  auf den Charakter von  $\varepsilon$  schliessen lässt.

Nun sei eine der nichtkanonischen Darstellungen der Charakteristik (0) die folgende

$$0 = K + A_{\lambda_1} + \dots + A_{\lambda_s} \quad (s \equiv p \pmod{2}). \quad (15)$$

Bezeichnet man mit  $u_1, \dots, u_{2p+2-s}$  die  $2p + 2 - s$  von  $\lambda_1, \dots, \lambda_s$  verschiedenen Zahlen aus der Reihe 1, 2, ...,  $2p + 2$  und addirt zur

linken und zur rechten Seite von (15) einmal eine beliebige der  $s$  Charakteristiken  $A_\lambda$ , etwa  $A_{\lambda_\sigma}$ , das andere mal eine beliebige der  $2p + 2 - s$  Charakteristiken  $A_\mu$ , etwa  $A_{\mu_\tau}$ , so erhält man für  $A_{\lambda_\sigma}$  und  $A_{\mu_\tau}$  die kanonischen Darstellungen:

$$(16) \quad \begin{aligned} A_{\lambda_\sigma} &= K + A_{\lambda_1} + \cdots + A_{\lambda_s} + A_{\lambda_\sigma}, \\ A_{\mu_\tau} &= K + A_{\lambda_1} + \cdots + A_{\lambda_s} + A_{\mu_\tau}. \end{aligned}$$

Die Zahl der Charakteristiken auf der rechten Seite ist in der ersten Gleichung (16)  $s - 1$ , in der zweiten Gleichung  $s + 1$ . Nach Satz IV sind daher die  $s$  Charakteristiken  $A_\lambda$  und ebenso die  $2p + 2 - s$  Charakteristiken  $A_\mu$  entweder sämtlich gerade oder sämtlich ungrade, die ersteren aber stets von entgegengesetztem Charakter wie die letzteren. Die Charakteristik  $K$  muss also nach (16) ebensowohl gleich der Summe der geraden, wie gleich der Summe der ungraden unter den  $2p + 2$  Charakteristiken  $A$  sein. Man kann daher nach (15) die  $s$  Charakteristiken  $A_\lambda$  als die unter den  $2p + 2$  Charakteristiken  $A$  vorhandenen ungraden Charakteristiken betrachten und erhält dann nach (16) und Satz IV für  $s - 1$  die Form  $p + 4q - 1$ , wonach  $s \equiv p \pmod{4}$ . (q. e. d.)

Hieraus ergibt sich noch, dass die kanonischen Darstellungen (14) sämtlich Combinationen einer ungraden Anzahl (wesentliche Combinationen), die nichtkanonischen Darstellungen dagegen Combinationen einer geraden Anzahl der Charakteristiken  $A_0, A_1, \dots, A_{2p+1}$  sind.

Die Herleitung eines allgemeinen Fundamentalsystems  $A_0, \dots, A_{2p+1}$  ergibt sich aus der eines speciellen Systems.  $A_0$  ist beliebig, also auf  $2^{2p}$  Arten wählbar. Alsdann erhält man die Charakteristiken  $A_0 A_i = B_i$  wie früher angegeben, womit alle  $A_i$  bestimmt sind. Da hierbei auch alle Permutationen der Charakteristiken eines jeden allgemeinen Fundamentalsystems  $2p + 2$  erhalten werden, so ist die Zahl der allgemeinen Fundamentalsysteme nach (22) § 39:

$$(17) \quad = 2^{2p} \frac{(2^{2p} - 1)(2^{2p-2} - 1) \cdots (2^2 - 1)}{1 \cdot 2 \cdots 2p + 2} 2^{pp}.$$

Ferner folgt aus § 39, dass  $2p + 2 - \lambda$  durch die Relationen (8) verbundene Charakteristiken  $A$ , deren Summe, falls  $\lambda$  gerade ist, nicht verschwindet, zu einem allgemeinen Fundamentalsystem ergänzt werden können auf  $P_\lambda$  (23) § 39 Arten, wobei  $\delta = 0$  oder  $= 1$  ist, je nachdem  $\lambda$  gerade oder ungrade ist, dass also z. B. ein allgemeines Fundamentalsystem auf 1, 2, 6, .. Arten vervollständigt werden kann, wenn bez.  $2p - 1, 2p - 2, 2p - 3, \dots$  seiner Charakteristiken gegeben sind.

Für die Verwandlung eines allgemeinen Fundamentalsystems in ein anderes gilt derselbe Satz von  $A_0, A_1, \dots, A_{2p+1}$ , der S. 337

von  $B_1, \dots, B_{2p+1}$  ausgesprochen wurde. Denn für  $A_{\lambda+1}$  kann man wie dort jede Summe einer ungraden Zahl von Charakteristiken  $A_{\lambda+1}, \dots, A_{2p+1}$  wählen<sup>1)</sup>.

Keht man zurück zu der Verlegung des kanonischen Querschnittsystems, so ergibt sich für die allgemeinen Fundamentalsysteme von Charakteristiken aus der invarianten Eigenschaft von  $[x, y, z]$  der Satz: (V) Jedem Uebergang von einem kanonischen Querschnittsystem der Fläche  $T$  in ein anderes entspricht eine bestimmte, lineare Transformation der Thetafunctionen oder der Uebergang eines allgemeinen Fundamentalsystems von Thetacharakteristiken in ein anderes. Dabei bleibt der gerade oder ungrade Charakter einer jeden Charakteristik des Systems und folglich auch die Zahl  $s$  seiner ungraden Charakteristiken erhalten.

Umgekehrt gilt der Satz:

Jedem Uebergang eines allgemeinen Fundamentalsystems von Thetacharakteristiken in ein anderes, mit derselben Zahl  $s$  der ungraden Charakteristiken, entspricht eine bestimmte Verlegung des kanonischen Querschnittsystems der Fläche  $T$ .

Denn seien  $A_0, A_1, \dots, A_{2p+1}$  und  $A_0, A_1, \dots, A_{2p+1}$  zwei allgemeine Fundamentalsysteme von Thetacharakteristiken mit derselben Zahl  $s$  von ungraden Charakteristiken, welche durch eine Transformation der Form (1), nämlich, wenn  $(i, \nu = 1, \dots, p)$ :

$$\xi_r \equiv \sum_i (\alpha_{ri} x_i + \beta_{ri} x'_i + \gamma_{ri} \beta_i), \quad \xi'_r \equiv \sum_i (\gamma_{ri} x_i + \delta_{ri} x'_i + \gamma'_{ri} \delta_i) \quad (18)$$

in einander übergehen, wobei die Coefficienten  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  den Gleichungen (10) § 38 genügen. Setzt man  $A_0 A_i = B_i$  und  $A_0 A_i = B_i (i=1, \dots, 2p+1)$ , so folgt, dass die speciellen Fundamentalsysteme  $0, B_1, \dots, B_{2p+1}$  und  $0, B_1, \dots, B_{2p+1}$  in einander übergehen durch eine Transformation der Form

$$\eta_r \equiv \sum_i (\alpha_{ri} y_i + \beta_{ri} y'_i), \quad \eta'_r \equiv \sum_i (\gamma_{ri} y_i + \delta_{ri} y'_i),$$

oder, wenn man  $\eta_r, \eta'_r, y_i, y'_i$  bezüglich durch  $-\xi_r, \xi_r, -z'_i, z_i$  und  $\alpha_{ri}, \beta_{ri}, \gamma_{ri}, \delta_{ri}$  bez. durch  $\delta'_{ir}, -\beta'_{ir}, -\gamma'_{ir}, \alpha'_{ir}$  ersetzt, durch eine Transformation der Form

$$\xi_r \equiv \sum_i (\alpha'_{ir} z_i + \gamma'_{ir} z'_i), \quad \xi'_r \equiv \sum_i (\beta'_{ir} z_i + \delta'_{ir} z'_i), \quad (19)$$

1) Frobenius, Journ. für Math. Bd. 89, S. 213 (1880). Dasselbst finden sich noch weitere Sätze über Complexe von Fundamentalsystemen.

wo die Coefficienten  $\alpha'$ ,  $\beta'$ ,  $\gamma'$ ,  $\delta'$  nunmehr den Gleichungen genügen

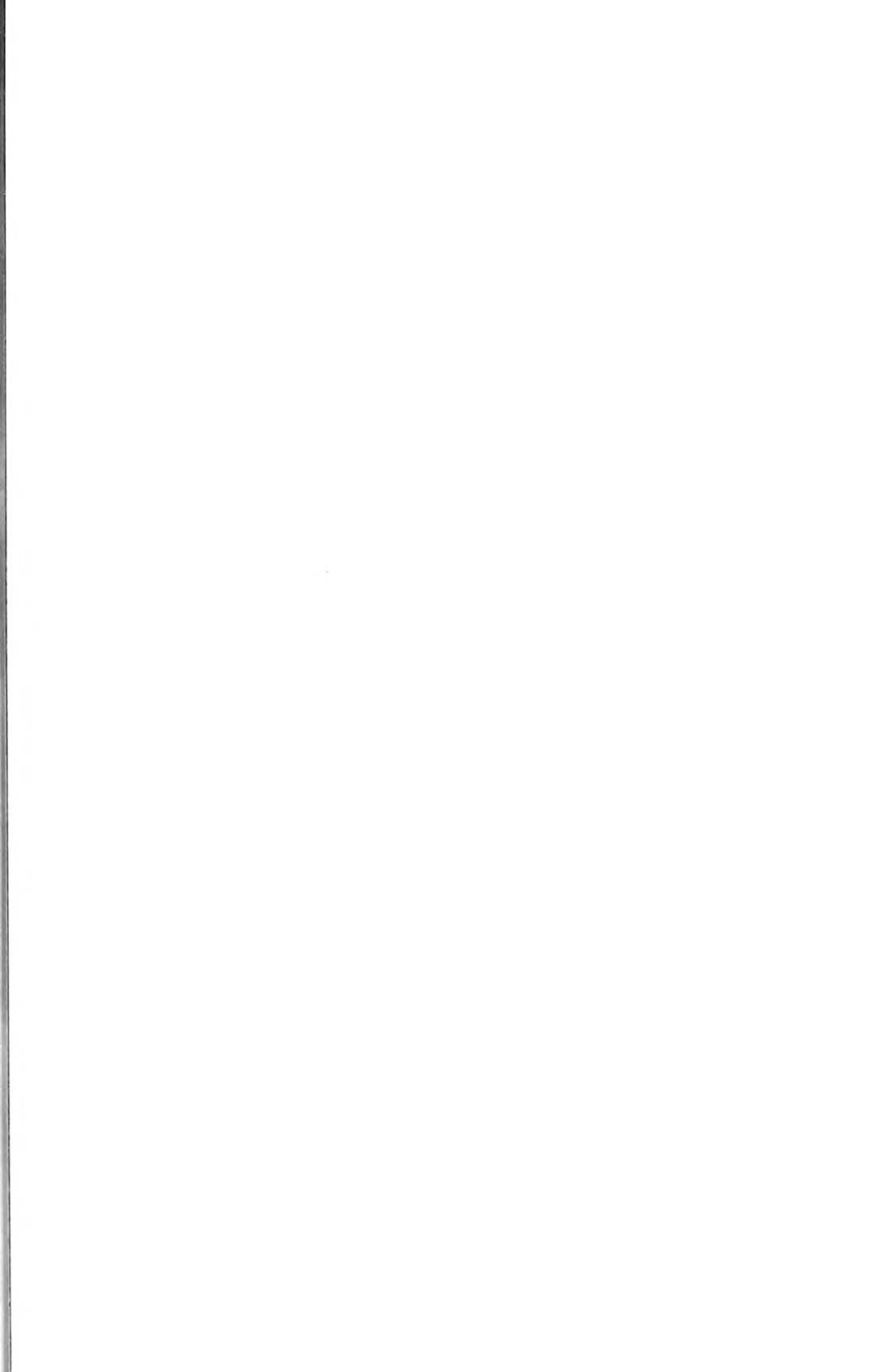
$$(20) \quad \sum_i (\alpha'_{iu} \gamma'_{iu} - \alpha'_i \gamma'_{iu}) = 0, \quad \sum_i (\beta'_{iu} \delta'_{iu} - \beta'_i \delta'_{iu}) = 0,$$

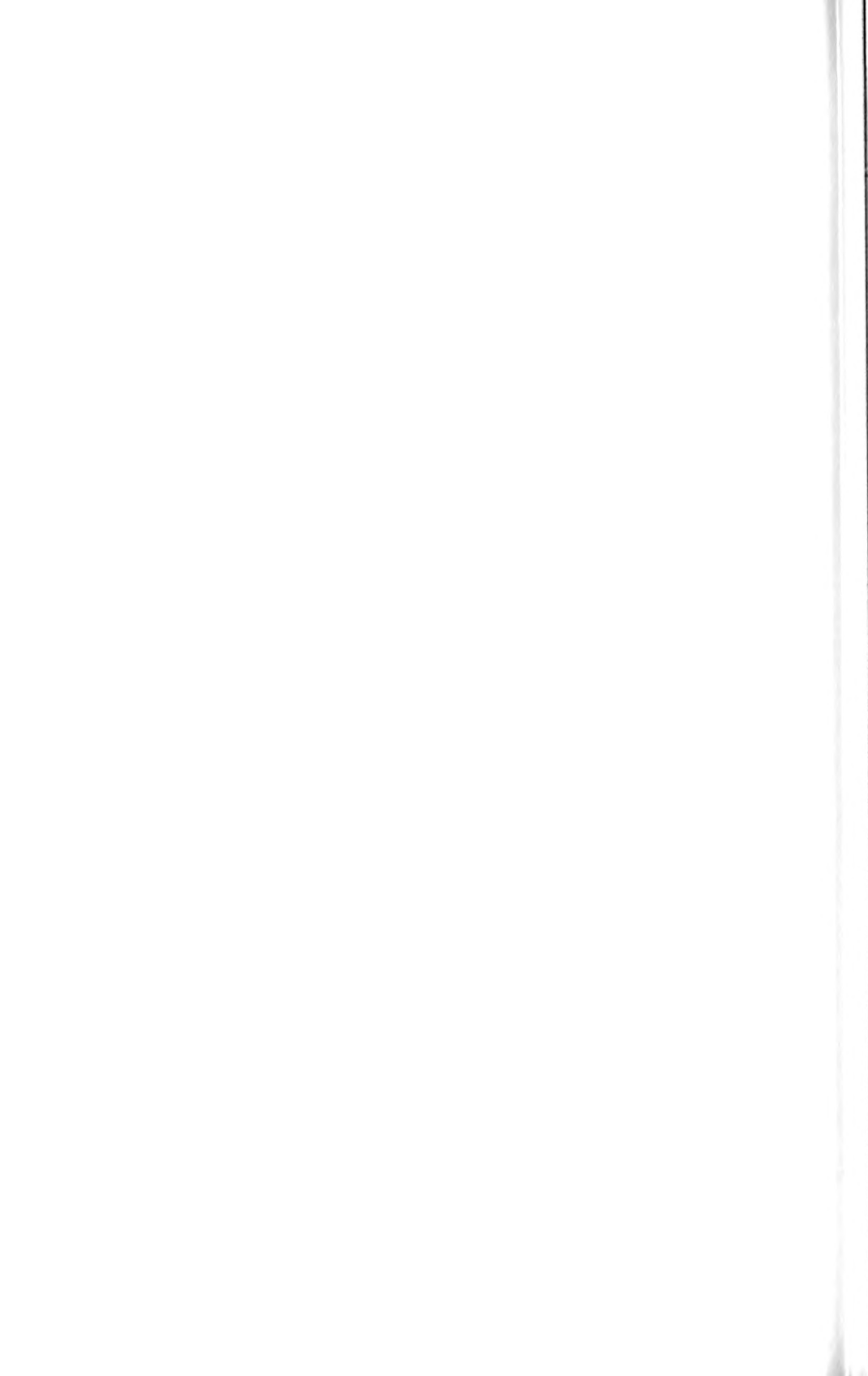
$$\sum_i (\alpha'_{iu} \delta'_{iu} - \beta'_i \gamma'_{iu}) = \begin{cases} +1, & \text{wenn } u = v, \\ 0, & \text{wenn } u \neq v. \end{cases}$$

Die Gleichungen (19) mit den Bedingungen (20) vermitteln aber den Uebergang von einem speciellen Fundamentalsystem oder einem Fundamentalsystem von Periodencharakteristiken in ein anderes, wie die Vergleichung von (19) und (20) mit (2) § 39 und (6) § 38 zeigt, und einem solchen Uebergang entspricht nach Satz V § 39 stets eine bestimmte Verlegung des kanonischen Querschnittsystems. (q. e. d.)

Wir werfen zum Schluss noch einen Rückblick auf die Lösung des Jacobi'schen Umkehrproblems (Abschn. VI).

Durch die vorstehende Untersuchung der allgemeinen Fundamentalsysteme von  $2p + 2$  Thetacharakteristiken sind nicht allein die in § 32 S. 263 und 264 benutzten Sätze bewiesen, sondern es tritt auch der Einfluss klar hervor, den die Verlegung des kanonischen Querschnittsystems der Fläche  $T$  auf die Lösung des Umkehrproblems ausübt. Führt man nämlich ein kanonisches Querschnittsystem  $(a, b)$  in ein anderes  $(a', b')$  über, so ändert sich an der im Abschnitt VI (s. bes. § 32 Satz VII) gegebenen Lösung des Umkehrproblems nichts, als dass sich einem Fundamentalsystem von  $2p + 2$  Berührungsfunktionen  $\psi_\mu$  oder Wurzelfunktionen  $\sqrt{\psi_\mu}$  statt des ursprünglich gewählten Fundamentalsystems von  $2p + 2$  Thetacharakteristiken ein anderes solches System zuordnet. Für d. neue Zuordnung geben die Gleichungen (4), (6), (8), (27), (31) und (33) § 40 die transformirten Werthe der Argumente  $u_h$ , der Moduln  $a_{hk}$ , der Charakteristik  $\mu$  und der Thetafunction  $\vartheta_\mu(u; a)$  an. Umgekehrt kann man von vornherein einem beliebigen Fundamentalsystem von Functionen  $\psi_\mu$  ein beliebiges Fundamentalsystem von Thetacharakteristiken  $\mu$  zuordnen und nachträglich die Lage des Querschnittsystems angeben, die dieser Zuordnung entspricht. Verbindet man schliesslich die im Abschnitt IV betrachtete, eindeutige Transformation der algebraischen Fundamentalgleichung  $F(x, y) = 0$  mit der im Abschnitt VIII untersuchten linearen Transformation der Thetafunction, so erhält man aus einer bestimmten Form der Lösung des Umkehrproblems, wie sie im Abschnitt VI angegeben wurde, die allgemeinste Form der Lösung dieses Problems.





**PLEASE DO NOT REMOVE  
CARDS OR SLIPS FROM THIS POCKET**

---

**UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY**

---

*P&A Sci.*

